

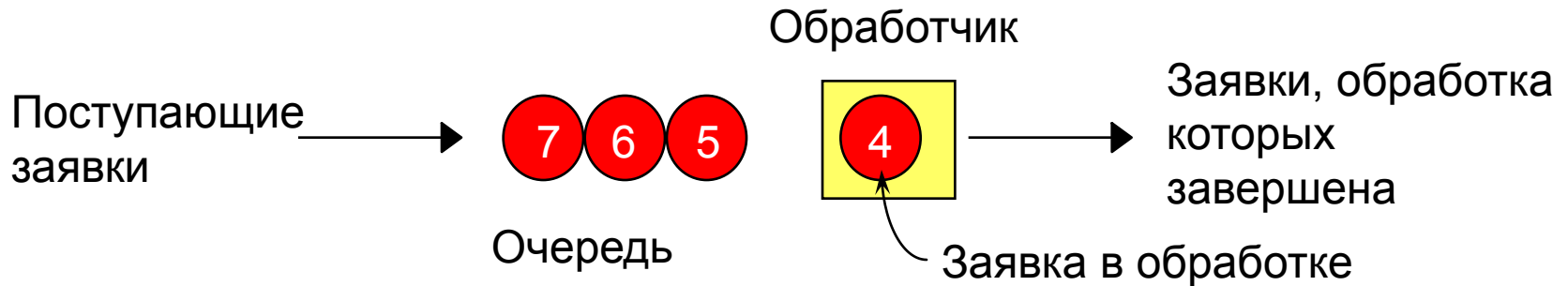
# Имитационное моделирование экономических процессов

Моделирование систем массового обслуживания

Грибанова Екатерина Борисовна

# Система массового обслуживания

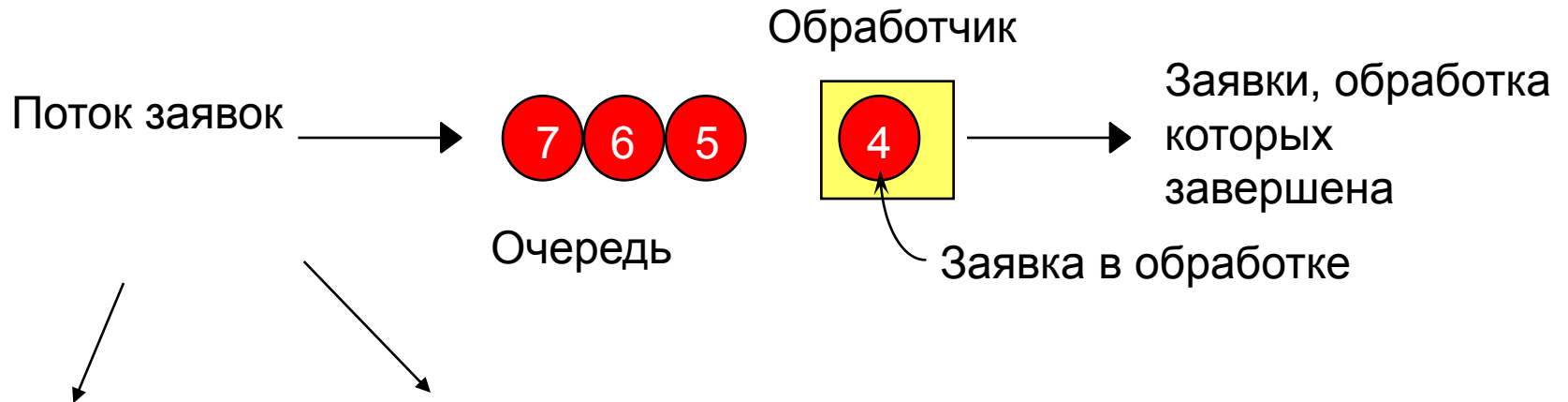
(СМО) – система, предназначенная для обслуживания потока заявок.



Система массового обслуживания	Канал обслуживания	Заявки
Магазин	Касса	Покупатели
Телефонная служба	Диспетчер	Звонки клиентов
Парикмахерская	Парикмахер	Клиенты

# Классификация систем массового обслуживания

*По природе входного потока*



Детерминированный  
(по записи)

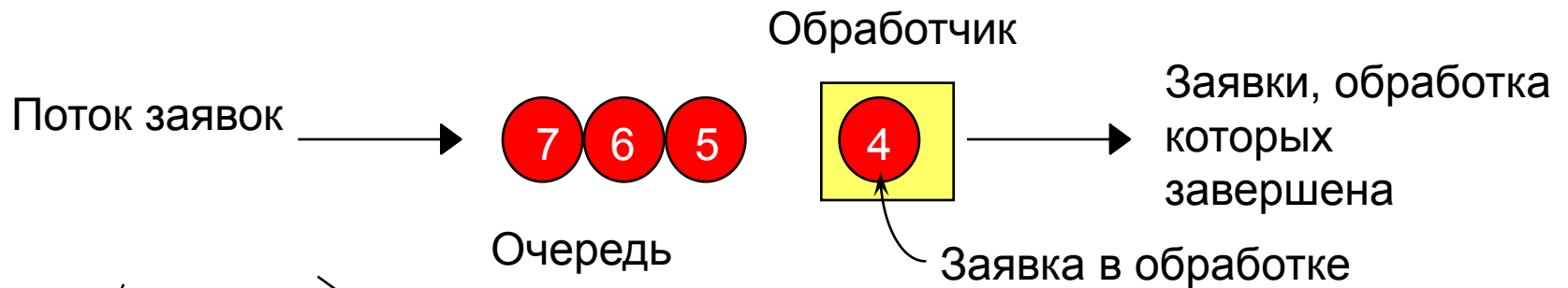
Время поступления заявки
09:00
09:15
09:30

Стохастический  
(случайное время поступления)

Время поступления заявки
09:00
09:05
09:23

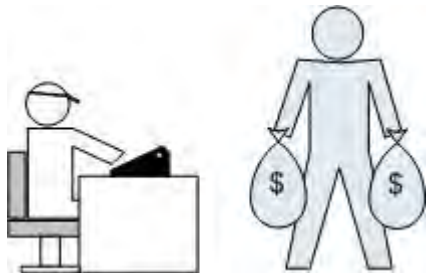
# Классификация систем массового обслуживания

*По количеству поступающих заявок*



Одиночное поступление

(вкладчик в банке)



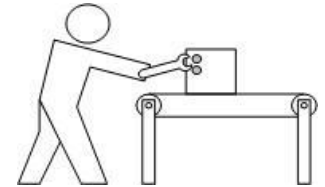
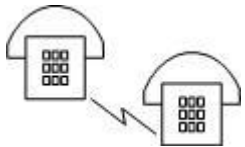
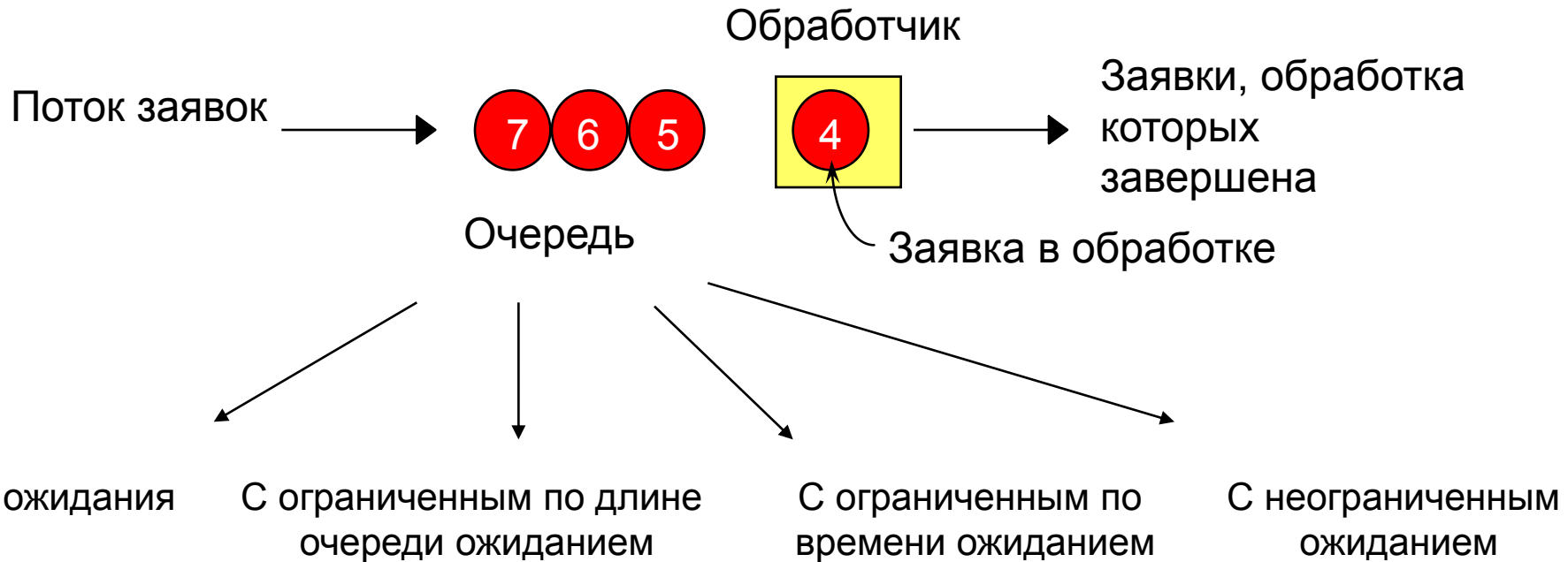
Групповое поступление

(приезд группы туристов на экскурсию)



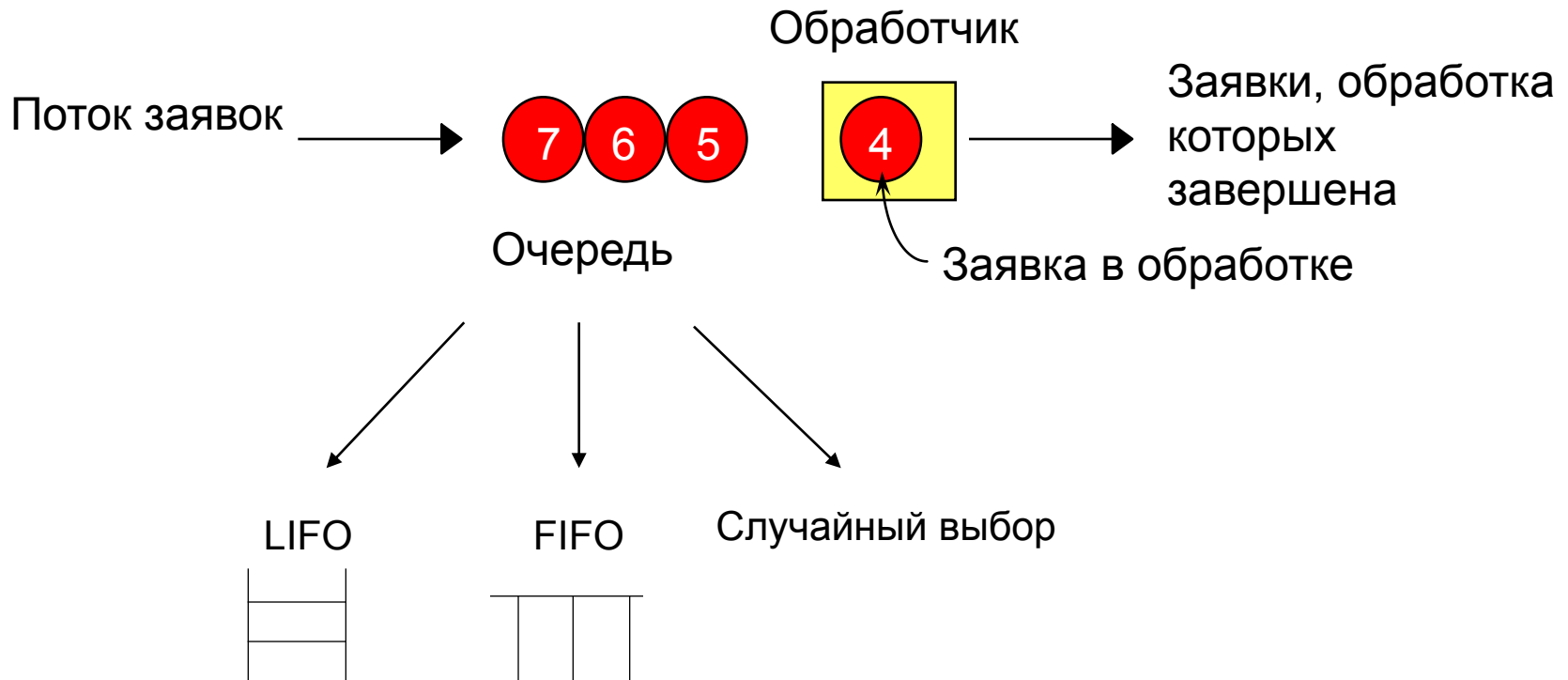
# Классификация систем массового обслуживания

*По наличию очереди*



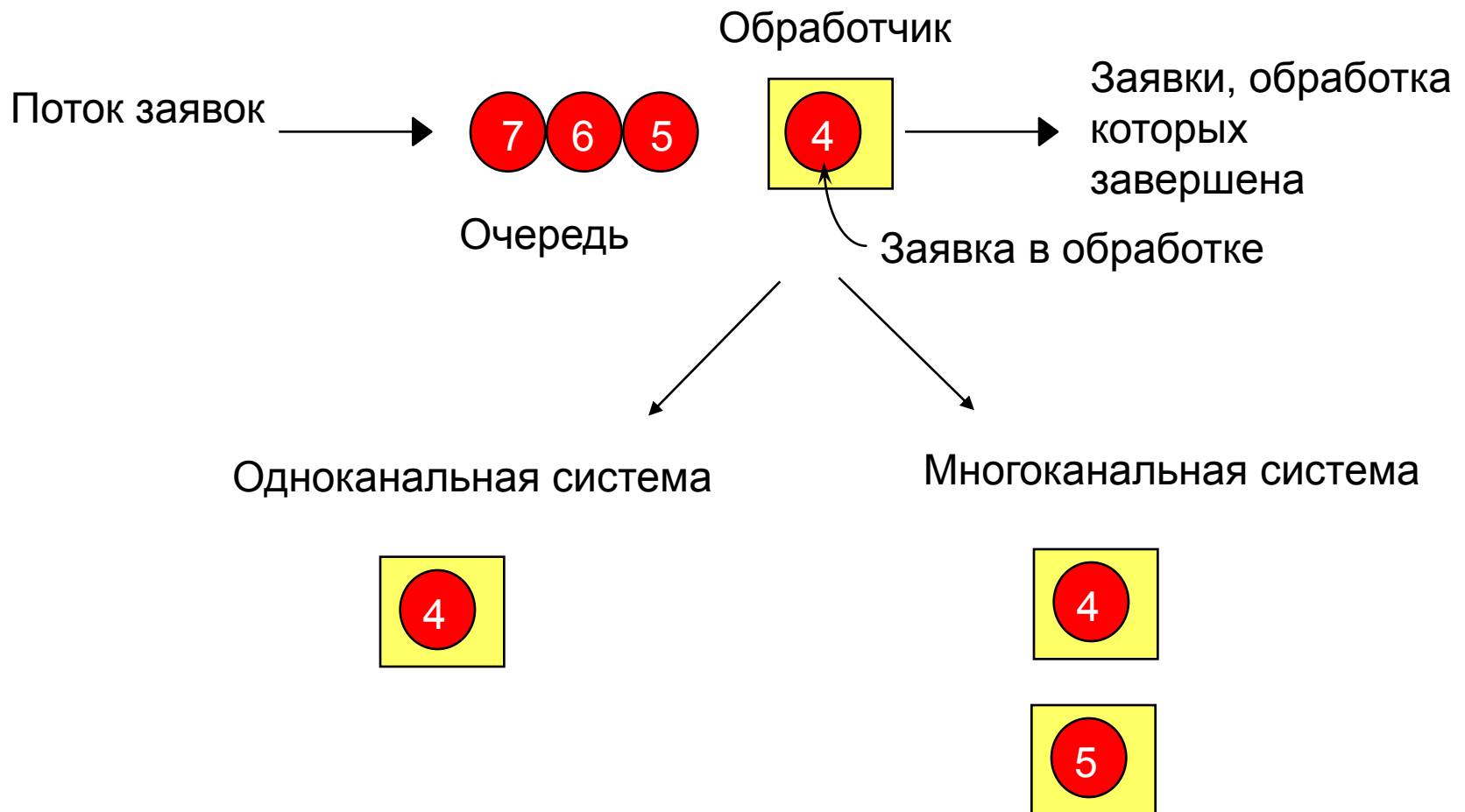
# Классификация систем массового обслуживания

*По дисциплине выбора заявки из очереди*



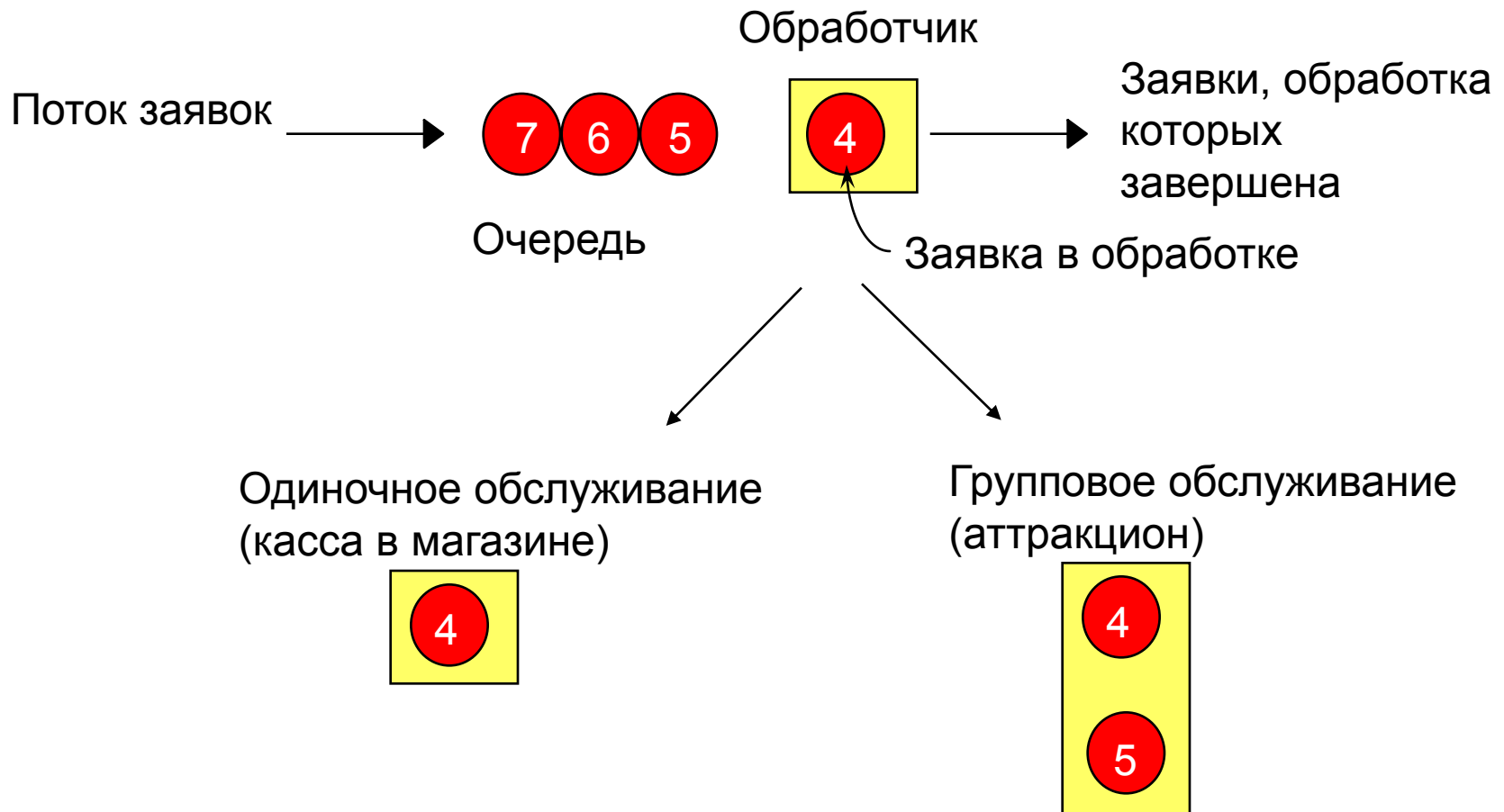
# Классификация систем массового обслуживания

*По числу каналов обслуживания*



# Классификация систем массового обслуживания

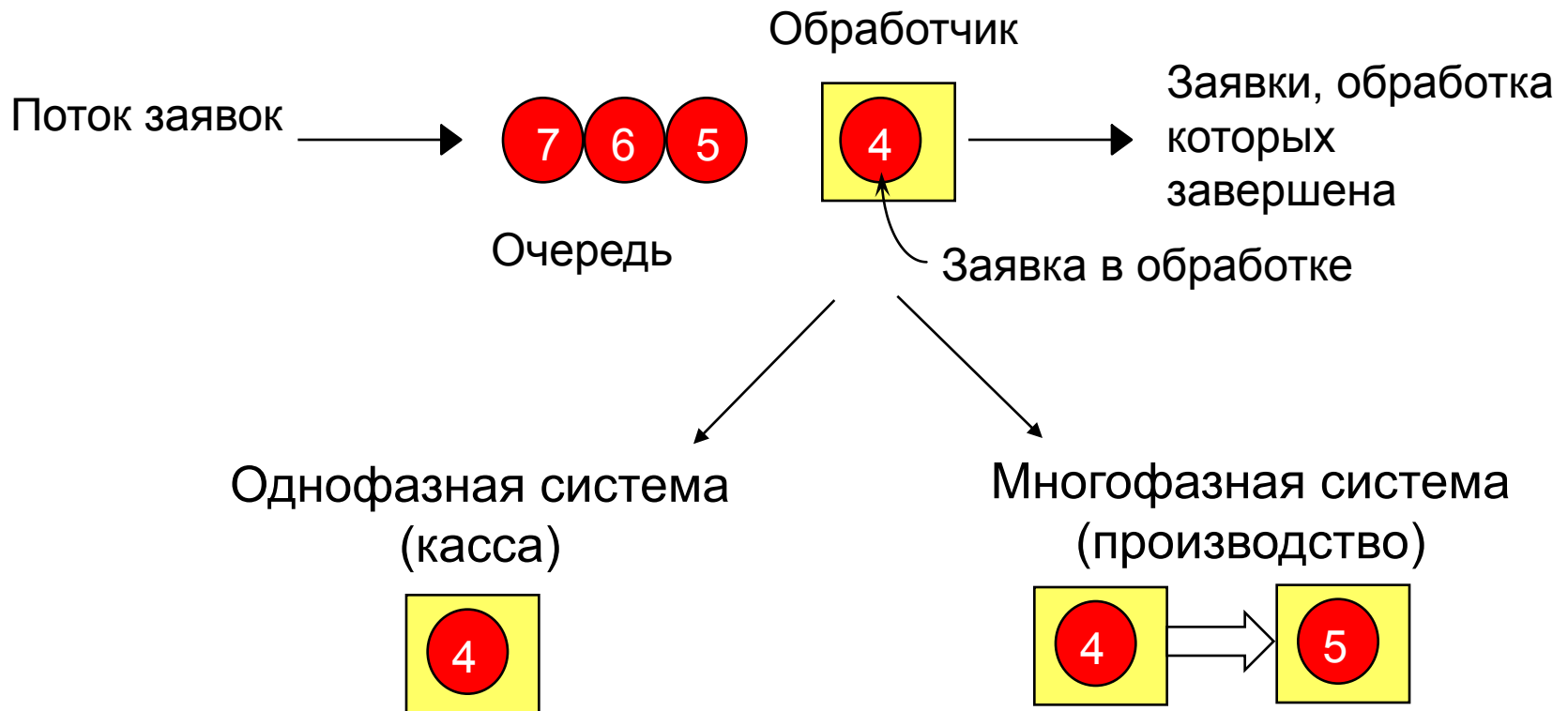
*По количеству одновременно обслуживаемых заявок*





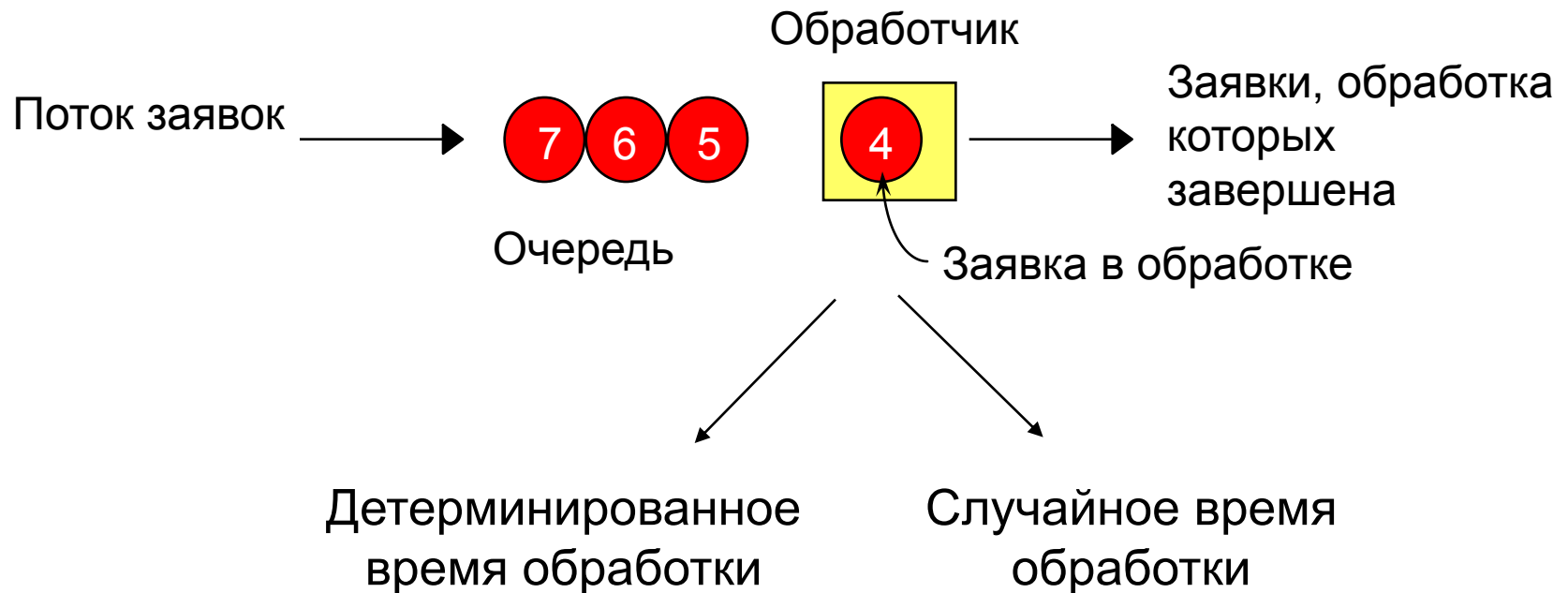
# Классификация систем массового обслуживания

*По числу фаз обслуживания*



# Классификация систем массового обслуживания

*По природе времени обслуживания*



# Изучение систем массового обслуживания

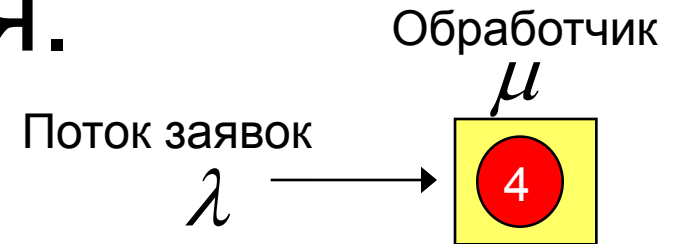


Теория массового обслуживания

Имитационное моделирование

# Теория массового обслуживания.

## Одноканальная система без ожидания.



$\lambda$  - интенсивность потока заявок.

$\mu$  - интенсивность потока обслуживаний.

$Q$  - относительная пропускная способность (средняя доля пришедших заявок, обслуживаемых системой).

$A$  - абсолютная пропускная способность (среднее число заявок, обслуживаемых в единицу времени).

$$Q = \frac{\mu}{\lambda + \mu}$$

$$A = \frac{\lambda \mu}{\lambda + \mu}$$

# Задача

В телефонную службу поступают заявки с интенсивностью 90 заявок в час, а средняя продолжительность разговора по телефону 2 минуты. Определите абсолютную и относительную пропускную способность.

$$Q = \frac{\mu}{\lambda + \mu}$$

$$A = \frac{\lambda \mu}{\lambda + \mu}$$

# Задача

$$\lambda = 90(1/\text{ч})$$

$$\mu = \frac{1}{2} = 0,5(1/\text{мин}) = 30(1/\text{ч})$$

$$Q = \frac{30}{90 + 30} = 0,25$$

$$A = \frac{\lambda\mu}{\lambda + \mu} = \frac{90 \cdot 30}{120} = 22,5$$

# Одноканальная система с неограниченной очередью



$\rho$  - интенсивностью нагрузки канала

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

$L_{сист}$  - среднее число заявок в системе

$$L_{сист} = \frac{\rho}{1 - \rho}$$

$L_{оч}$  - среднее число заявок в очереди

$$L_{оч} = L_{сист} - \rho$$

# Задача

В порту имеется один причал для разгрузки судов. Интенсивность потока судов равна 0,4 (судов в сутки). Среднее время разгрузки одного судна составляет 2 суток. Предполагается, что очередь может быть неограниченной длины. Вычислить характеристики СМО.

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

$$L_{\text{сист}} = \frac{\rho}{1 - \rho}$$

$$L_{\text{оч}} = L_{\text{сист}} - \rho$$



# Задача

$$\lambda = 0,4(1/\text{сутки})$$

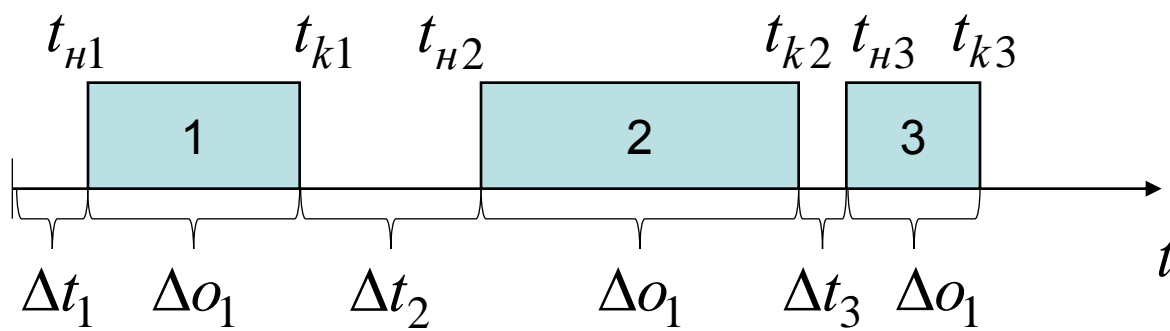
$$\mu = \frac{1}{2} = 0,5(1/\text{суток})$$

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{0,4}{0,5} = 0,8$$

$$L_{\text{сист}} = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{0,8}{0,2} = 4$$

$$L_{\text{оч}} = L_{\text{сист}} - \rho = 4 - 0,8 = 3,2$$

# Моделирование поступления и обслуживания непересекающихся заявок



$$t_{H1} = \Delta t_1$$

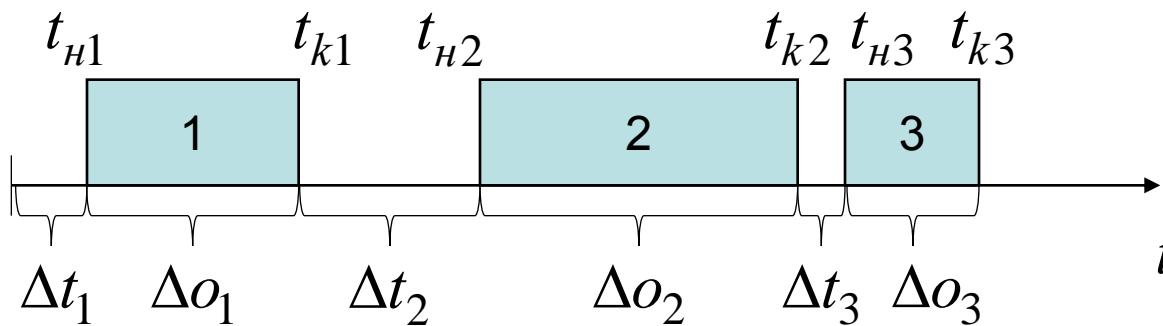
$$t_{K1} = t_{H1} + \Delta o_1$$

$$t_{H2} = t_{K1} + \Delta t_2$$

$$t_{K2} = t_{H2} + \Delta o_2$$

Номер заявки	Сл.величина времени между заявками	Время поступления, $t_H$	Сл.величина времени обслуживания заявки	Время окончания обслуживания, $t_K$
1	0,2	0,2	0,4	0,6
2	0,1	0,7	0,5	1,2
3	0,8	2	1	3 18

# Задача



$$t_{H1} = \Delta t_1$$

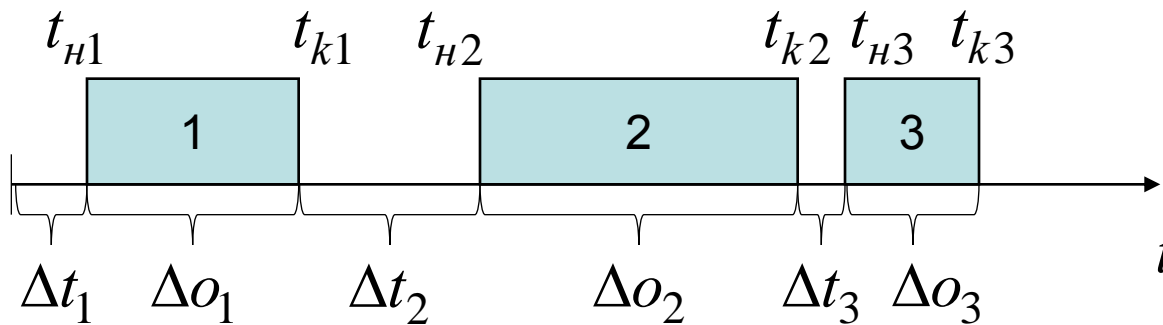
$$t_{K1} = t_{H1} + \Delta O_1$$

$$t_{H2} = t_{K1} + \Delta t_2$$

$$t_{K2} = t_{H2} + \Delta O_2$$

Номер заявки	Сл.величина времени между заявками	Время поступления, $t_H$	Сл.величина времени обслуживания заявки	Время окончания обслуживания, $t_K$
1	2		10	
2	1		15	
3	3		5	
4	4		20	19

# Задача



$$t_{H1} = \Delta t_1$$

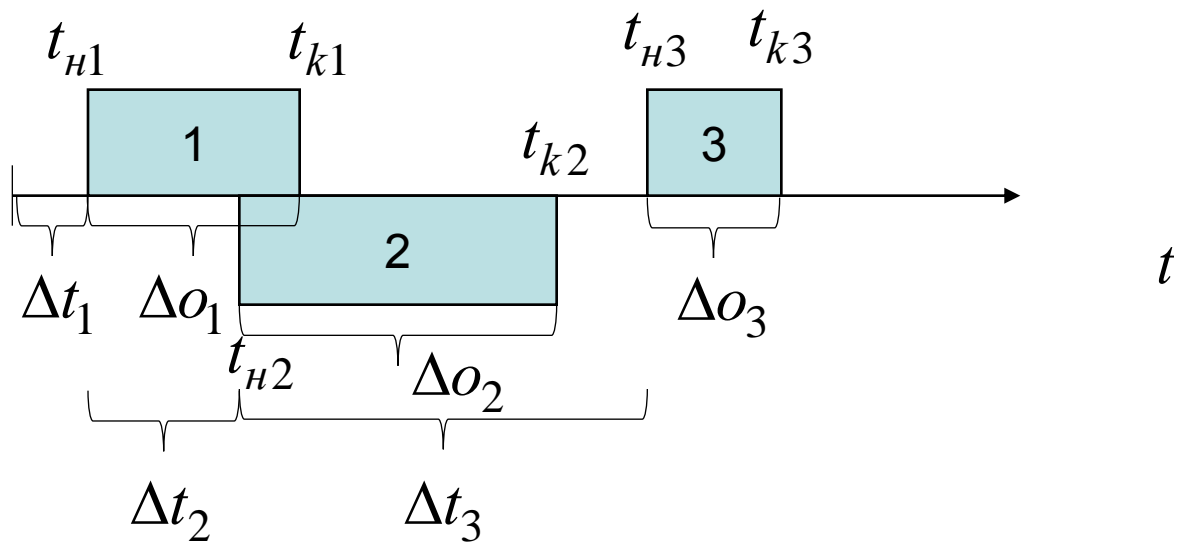
$$t_{K1} = t_{H1} + \Delta O_1$$

$$t_{H2} = t_{K1} + \Delta t_2$$

$$t_{K2} = t_{H2} + \Delta O_2$$

Номер заявки	Сл.величина времени между заявками	Время поступления, $t_H$	Сл.величина времени обслуживания заявки	Время окончания обслуживания, $t_K$
1	2	2	10	12
2	1	13	15	28
3	3	31	5	36
4	4	40	20	60 20

# Моделирование поступления и обслуживания пересекающихся заявок



$$t_{H1} = \Delta t_1$$

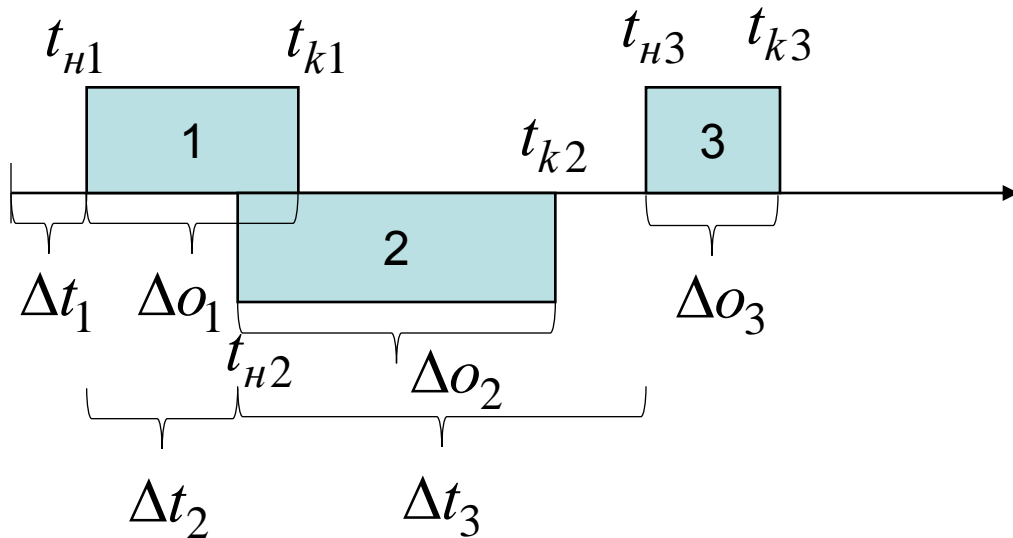
$$t_{K1} = t_{H1} + \Delta o_1$$

$$t_{H2} = t_{H1} + \Delta t_2$$

$$t_{K2} = t_{H2} + \Delta o_2$$

Номер заявки	Сл.вел. времени между заявками	Время поступления, $t_H$	Сл.вел. времени обслуживания заявки	Время окончания обслуживания, $t_K$
1	0,2	0,2	0,4	0,6
2	0,1	0,3	0,5	0,8
3	0,8	1,1	1	2,1

# Задача



$$t_{H1} = \Delta t_1$$

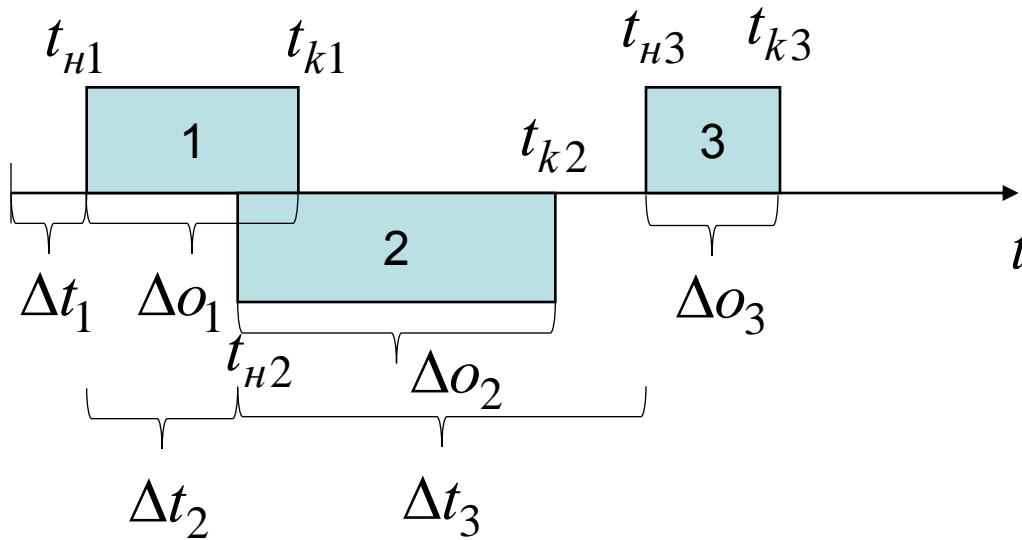
$$t_{K1} = t_{H1} + \Delta o_1$$

$$t_{H2} = t_{H1} + \Delta t_2$$

$$t_{K2} = t_{H2} + \Delta o_2$$

Номер заявки	Сл.вел. времени между заявками	Время поступления, $t_H$	Сл.вел. времени обслуживания заявки	Время окончания обслуживания, $t_K$
1	2		10	
2	1		15	
3	3		5	
4	4		20	

# Задача



$$t_{H1} = \Delta t_1$$

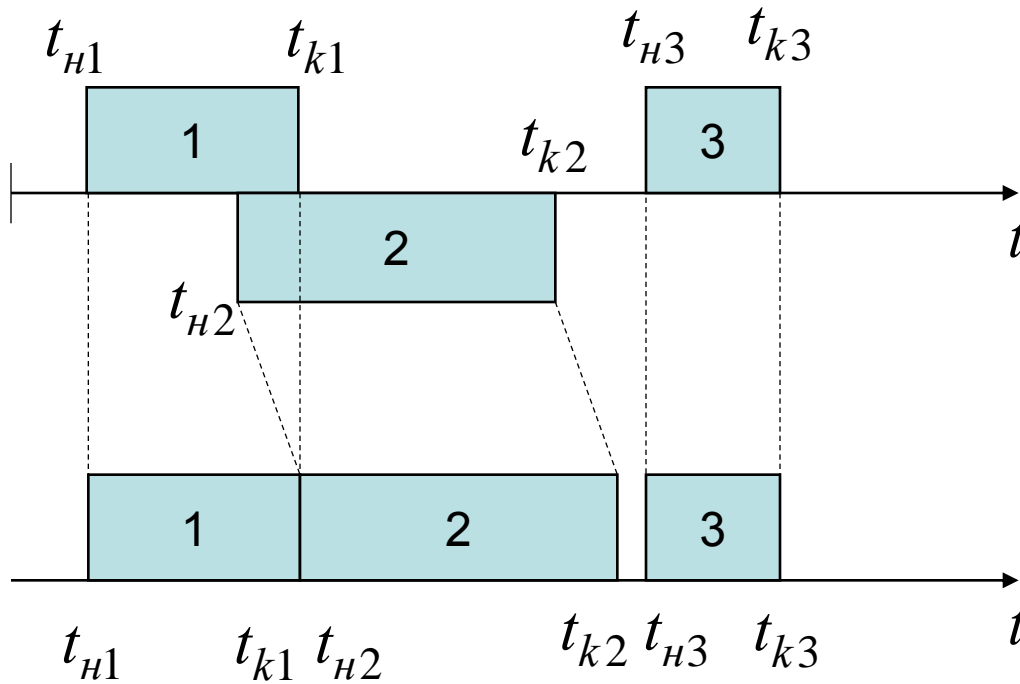
$$t_{K1} = t_{H1} + \Delta o_1$$

$$t_{H2} = t_{H1} + \Delta t_2$$

$$t_{K2} = t_{H2} + \Delta o_2$$

Номер заявки	Сл.вел. времени между заявками	Время поступления, $t_H$	Сл.вел. времени обслуживания заявки	Время окончания обслуживания, $t_K$
1	2	2	10	12
2	1	3	15	18
3	3	6	5	11
4	4	10	20	30

# Последовательная проводка заявок

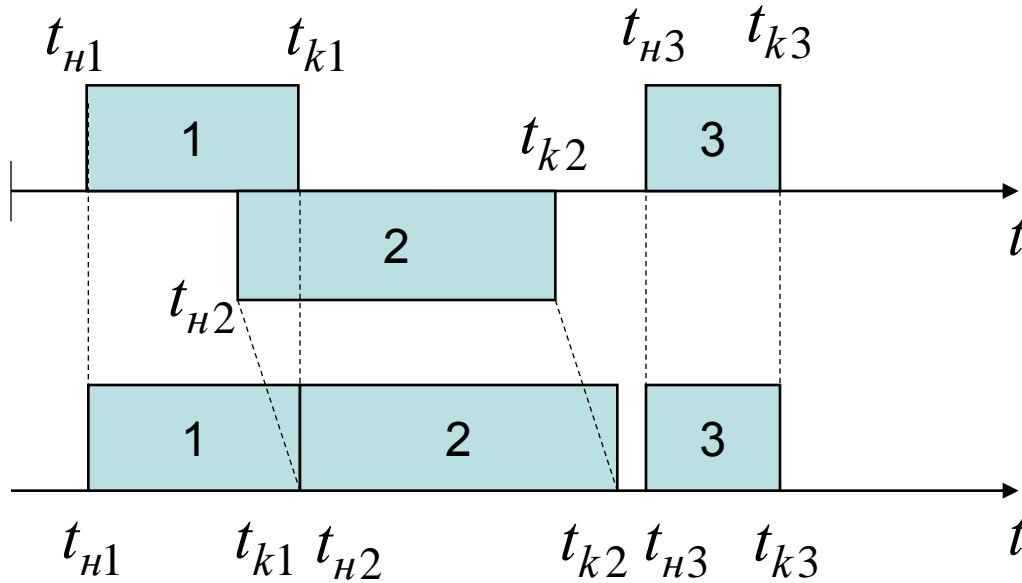


$$t_{H2} = t_{K1}, \text{если } t_{H2} < t_{K1}$$

Номер заявки	Сл.вел. времени между заявками	Время поступления, $t_H$	Сл.вел. времени обслуживания заявки	Время начала обслуживания	Время окончания обслуживания, $t_K$
1	0,2	0,2	0,4	0,2	0,6
2	0,1	0,3	0,5	0,6	1,1
3	0,8	1,1	1	1,1	2,1 <sup>24</sup>



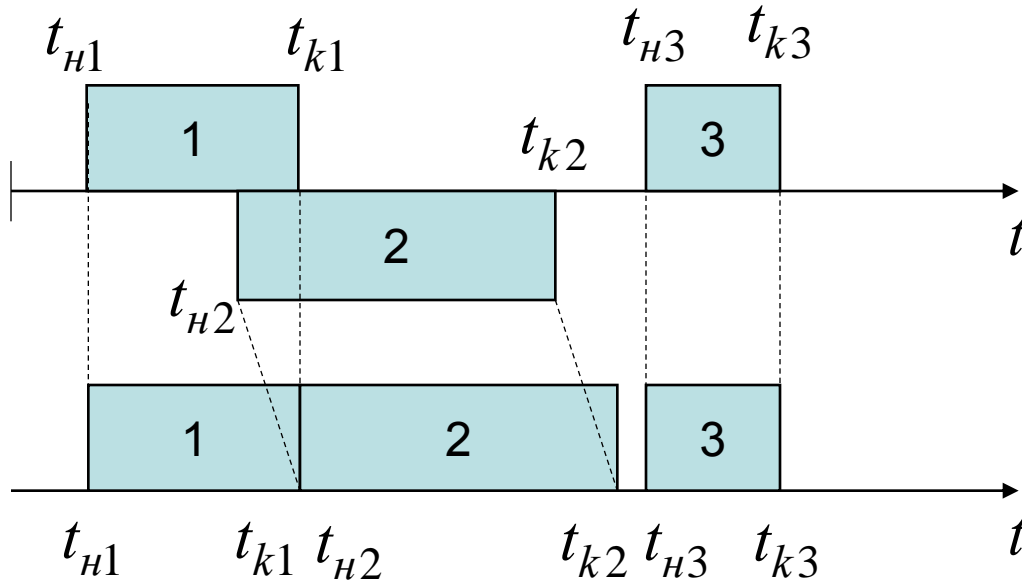
# Задача



$$t_{H2} = t_{K1}, \text{ если } t_{H2} < t_{K1}$$

Номер заявки	Сл.вел. времени между заявками	Время поступления, $t_H$	Сл.вел. времени обслуживания заявки	Время начала обслуживания	Время окончания обслуживания, $t_K$
1	2		10		
2	1		15		
3	3		5		
4	4		20		25

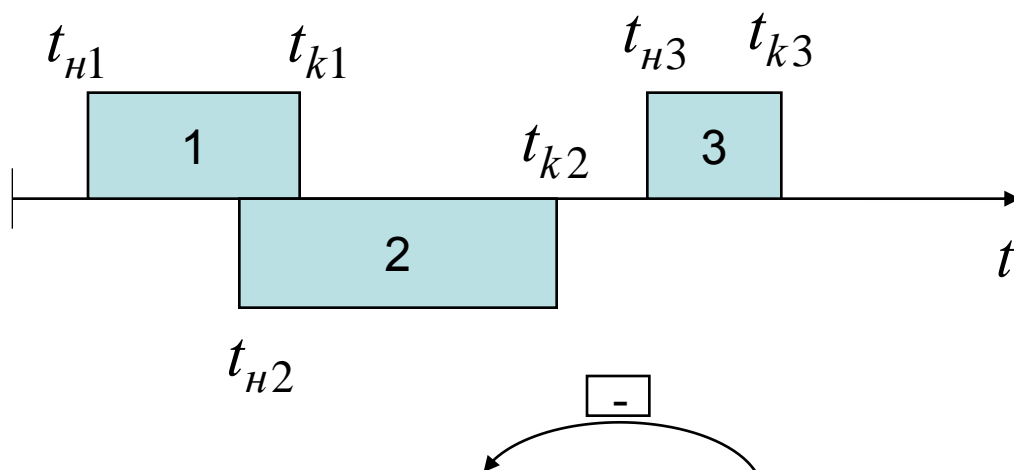
# Задача



$$t_{H2} = t_{K1}, \text{ если } t_{H2} < t_{K1}$$

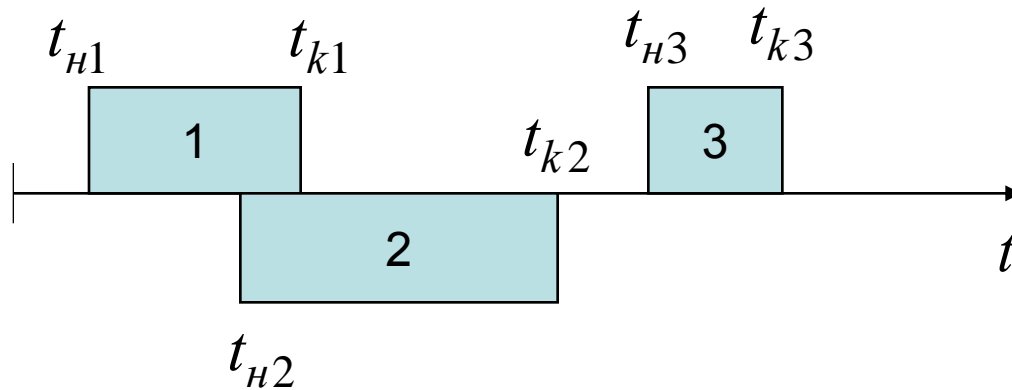
Номер заявки	Сл.вел. времени между заявками	Время поступления, $t_H$	Сл.вел. времени обслуживания заявки	Время начала обслуживания	Время окончания обслуживания, $t_K$
1	2	2	10	2	12
2	1	3	15	12	27
3	3	6	5	27	32
4	4	10	20	32	52 <sup>26</sup>

# Расчет времени ожидания



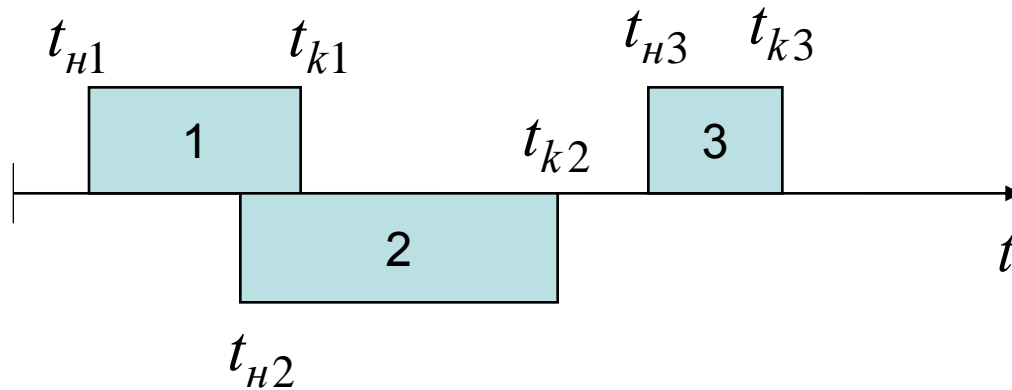
Номер заявки	Время поступления, $t_H$	Время начала обслуживания	Время окончания обслуживания, $t_K$	Время ожидания, $t_{ож}$
1	0,2	0,2	0,6	0
2	0,3	0,6	1,1	0,3
3	1,1	1,1	2,1	0

# Задача



Номер заявки	Время поступления, $t_H$	Время начала обслуживания	Время окончания обслуживания, $t_K$	Время ожидания, $t_{ож}$
1	2	2	12	
2	3	12	18	
3	6	27	11	
4	10	32	30	

# Задача



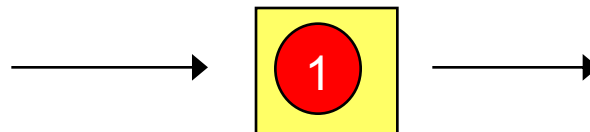
Номер заявки	Время поступления, $t_H$	Время начала обслуживания	Время окончания обслуживания, $t_K$	Время ожидания, $t_{ож}$
1	2	2	12	0
2	3	12	18	9
3	6	27	11	21
4	10	32	30	22

# СМО с ограниченным ожиданием

Максимальное время ожидания: 0:02.

Заявка, №	Время прибытия	Время обслуживания	Обслуживание		Ожидание
			Начало	Конец	
	9:00				
1	9:09	0:30			
2	9:14	0:25			
3	9:16	0:02			
4	9:17	0:02			
5	9:38	0:11			

Обработчик



# СМО с ограниченным ожиданием

Максимальное время ожидания: 0:02.

Заявка, №	Время прибытия	Время обслуживания	Обслуживание		Ожидание
			Начало	Конец	
	9:00				
1	9:09	0:30	9:09	9:39	0:00
2	9:14	0:25			0:25
3	9:16	0:02			0:23
4	9:17	0:02			0:22
5	9:38	0:11	9:39	9:50	0:01

Доля заявок, которые не были обслужены?

# СМО с ограниченным ожиданием

Максимальное время ожидания: 0:02.

Заявка, №	Время прибытия	Время обслуживания	Обслуживание		Ожидание
			Начало	Конец	
	9:00				
1	9:09	0:30	9:09	9:39	0:00
2	9:14	0:25			0:25
3	9:16	0:02			0:23
4	9:17	0:02			0:22
5	9:38	0:11	9:39	9:50	0:01

Доля заявок, которые не были обслужены= $3/5=0,6$



# СМО с ограниченным ожиданием

Максимальная длина очереди: 2

Заявка, №	Время прибытия	Время обслуживания	Длина очереди	Обслуживание		Ожидание
				Начало	Конец	
	9:00					
1	9:00	0:08				
2	9:01	0:04				
3	9:06	0:04				
4	9:07	0:03				
5	9:09	0:01				

# СМО с ограниченным ожиданием

Максимальная длина очереди: 2

Заявка, №	Время прибытия	Время обслуживания	Длина очереди	Обслуживание		Ожидание
				Начало	Конец	
	9:00					
1	9:00	0:08	0	9:00	9:08	0:00
2	9:01	0:04	1	9:08	9:12	0:07
3	9:06	0:04	2	9:12	9:16	0:06
4	9:07	0:03	-	9:16	9:19	нет
5	9:09	0:01	2	9:19	9:20	0:10

Процент обслуженных заявок-?

# СМО с ограниченным ожиданием

Максимальная длина очереди: 2

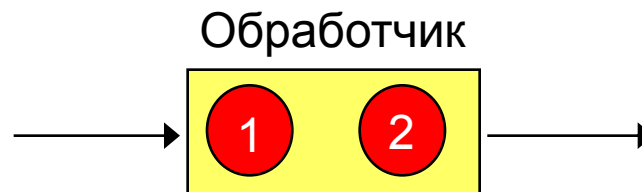
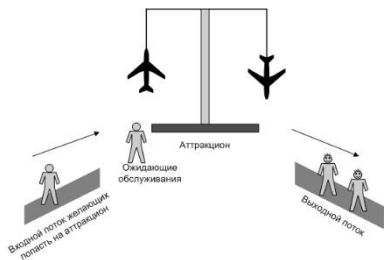
Заявка, №	Время прибытия	Время обслуживания	Длина очереди	Обслуживание		Ожидание
				Начало	Конец	
	9:00					
1	9:00	0:08	0	9:00	9:08	0:00
2	9:01	0:04	1	9:08	9:12	0:07
3	9:06	0:04	2	9:12	9:16	0:06
4	9:07	0:03	-	9:16	9:19	нет
5	9:09	0:01	2	9:19	9:20	0:10

Доля обслуженных заявок= $4/5=0,8$

# СМО с групповым обслуживанием заявок

Число заявок в группе: 2.

Заявка, №	Время прибытия	Время обслуживания	Обслуживание		Ожидание
			Начало	Конец	
	9:00				
1	9:02				
2	9:07	0:23			
3	9:14				
4	9:16	0:24			
5	9:18				
6	9:26	0:22			



# СМО с групповым обслуживанием заявок

Число заявок в группе: 2.

Заявка, №	Время прибытия	Время обслуживания	Обслуживание		Ожидание
			Начало	Конец	
	9:00				
1	9:02				0:05
2	9:07	0:23	9:07	9:30	0:00
3	9:14				0:02
4	9:16	0:24	9:16	9:40	0:00
5	9:18				0:08
6	9:26	0:22	9:26	9:48	0:00

Среднее время ожидания-?

# СМО с групповым обслуживанием заявок

Число заявок в группе: 2.

Заявка, №	Время прибытия	Время обслуживания	Обслуживание		Ожидание
			Начало	Конец	
	9:00				
1	9:02				0:05
2	9:07	0:23	9:07	9:30	0:00
3	9:14				0:02
4	9:16	0:24	9:16	9:40	0:00
5	9:18				0:08
6	9:26	0:22	9:26	9:48	0:00

Среднее время ожидания=Общее время ожидания/Число заявок=15/6=2,5 мин.