

# Использование продуктов Wolfram SystemModeler и Wolfram Mathematica в учебном процессе университета

*Сафронов Кирилл Сергеевич, старший преподаватель*

[safronov.kirill.pm@gmail.com](mailto:safronov.kirill.pm@gmail.com)

Кафедра прикладной математики и математического моделирования  
Санкт-Петербургский государственный морской технический университет

30 апреля 2022

# Введение

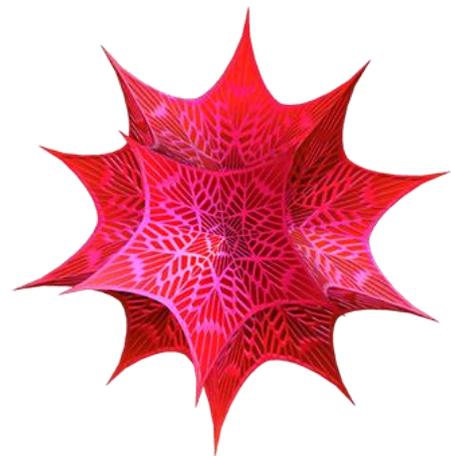
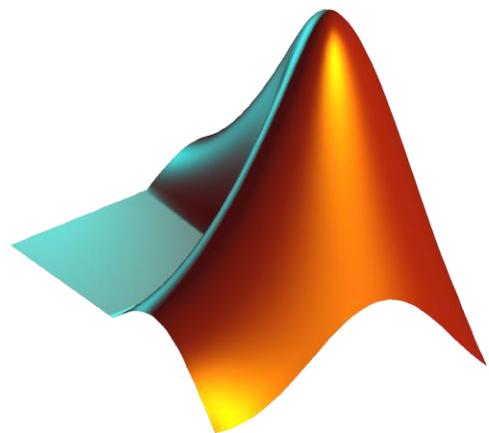
Направление подготовки кафедры ПМММ:

01.03.04 – Прикладная математика (бакалавриат)

Дисциплины, при освоении которых используются продукты компании Wolfram Research:

- Компьютерные математические среды (1 семестр)
- Системы компьютерной алгебры (5 семестр)
- Компьютерное моделирование динамических систем с использованием среды WSM (7 семестр)

# Системы компьютерной математики



axiom™



# Преимущества Wolfram Mathematica

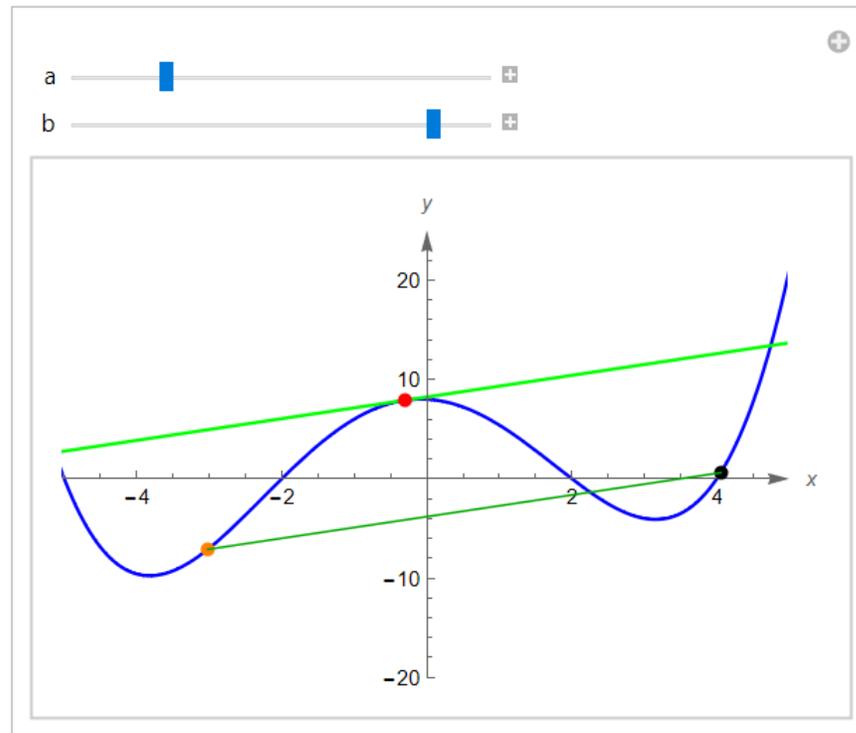
- Мощное ядро для символьных вычислений
- Множество реализованных численных методов
- Удобный и понятный интерфейс
- Огромное количество встроенных функций
- Гибкая настройка всех встроенных функций
- Широкие возможности для работы с графиками
- Поддержка разных парадигм программирования

# Wolfram Mathematica в учебном процессе

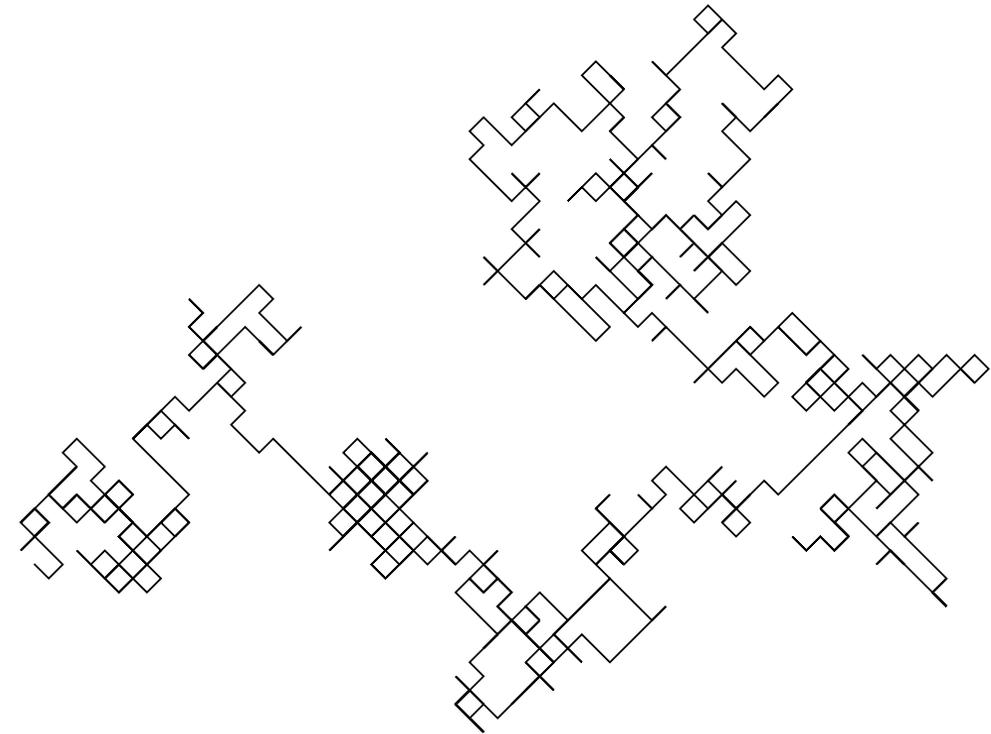
- Помощь в решении задач по различным дисциплинам: математически анализ, алгебра, дифференциальные уравнения, уравнения математической физики и др.
- Выполнение курсовых работ с использованием Wolfram Mathematica
- Выполнение выпускных квалификационных работ в Wolfram Mathematica

# Wolfram Mathematica в учебном процессе

## Демонстрация теоремы Лагранжа из математического анализа

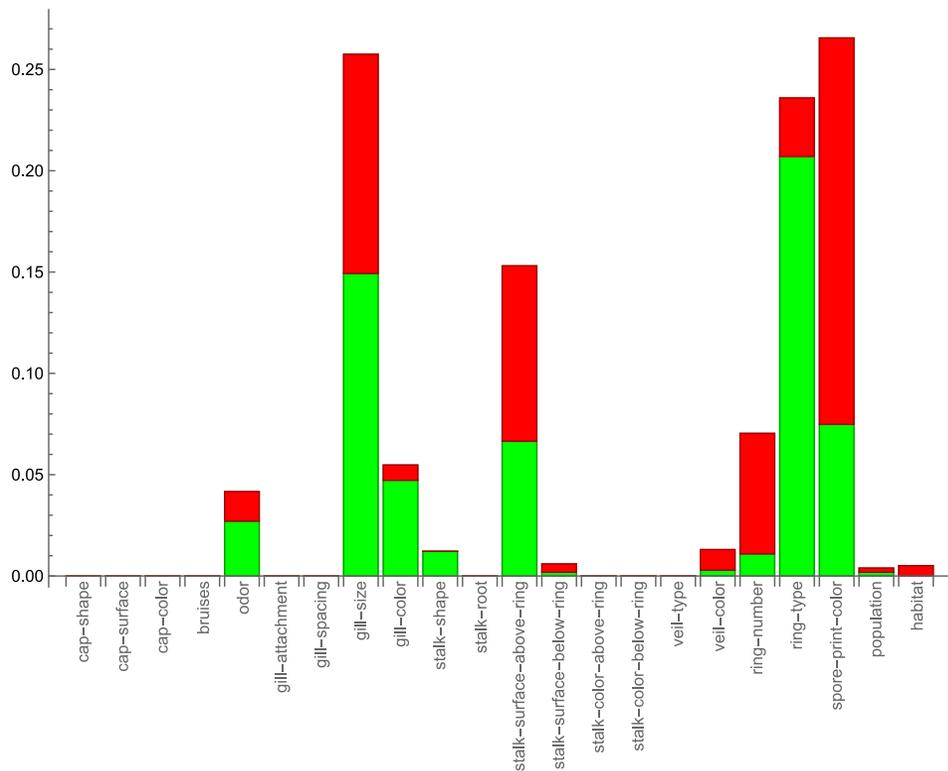


## Демонстрация случайного блуждания



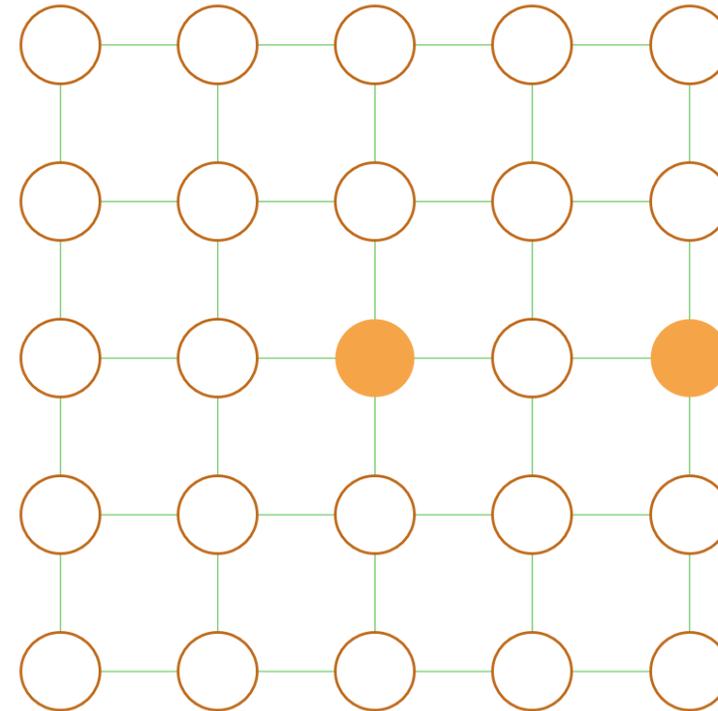
# Wolfram Mathematica в учебном процессе

## Применение в задачах математической статистики



## Моделирование мультиагентной системы передачи сообщений

ENGINE[canvas][5, 5][0.3][1, {"right", "up"}][0, 5, 12][1000][2]



# Wolfram Mathematica в учебном процессе

- Учебное пособие – «Интегральные уравнения в среде Wolfram Mathematica», 2022
- Выпускные квалификационные работы в 2022:
  - Сравнительный анализ методов линеаризации в нелинейных оптимизационных задачах
  - Решение интегральных уравнений в Wolfram
  - Оценка эффективности методов решения задач квадратичного программирования в инженерных приложениях
  - Моделирование подводной беспроводной сенсорной сети

# Интегральные уравнения в среде Wolfram Mathematica: учебное пособие

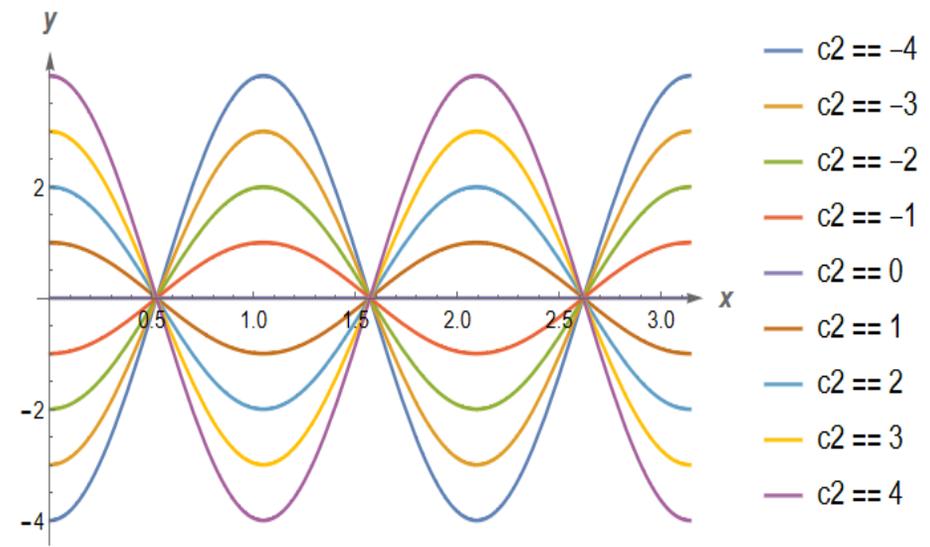
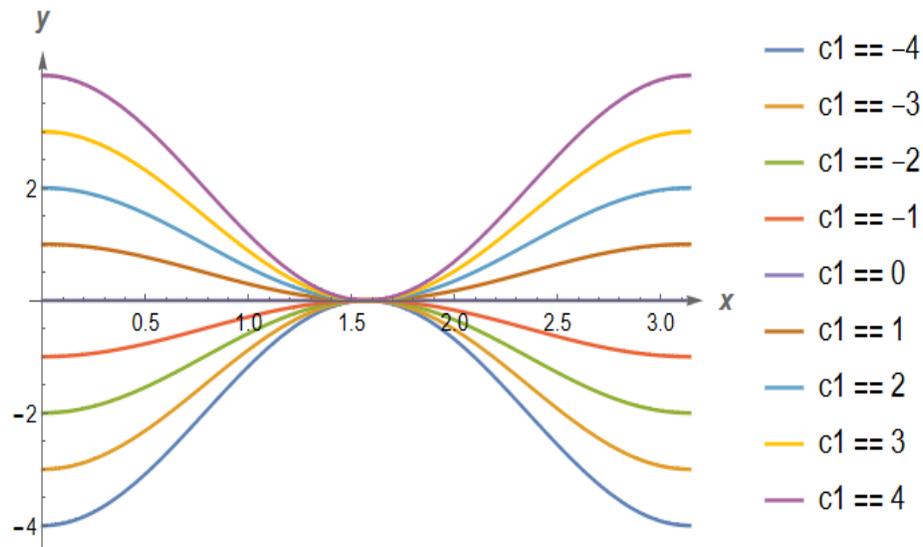
## СОДЕРЖАНИЕ

	Введение	5			
1	Общие понятия. Классификация интегральных уравнений	11			
1.1	Основные типы интегральных уравнений. Понятие решения	11			
1.1.1	Уравнение Фредгольма второго рода	15			
1.1.2	Уравнение Фредгольма первого рода	17			
1.1.3	Уравнение Вольтерры второго рода	17			
1.1.4	Уравнение Вольтерры первого рода	17			
1.2	Уравнения со слабой особенностью	18			
1.3	Задача Абеля. Интегральное уравнение Абеля	20			
1.4	Решение интегральных уравнений методом дифференцирования	27			
2	Интегральные уравнения с разностными ядрами	37			
2.1	Понятие разностного ядра. Решение интегральных уравнений с разностными ядрами методом дифференцирования	37			
2.2	Решение интегральных уравнений с разностными ядрами с помощью интегральных преобразований	41			
2.2.1	Решение интегральных уравнений Вольтерра с разностными ядрами с помощью преобразования Лапласа	41			
2.2.2	Решение систем интегральных уравнений с разностными ядрами с помощью преобразования Лапласа	50			
2.2.3	Решение интегро-дифференциальных уравнений с разностными ядрами с помощью преобразования Лапласа	55			
2.3	Решение интегральных уравнений Фредгольма с разностными ядрами с помощью преобразования Фурье	63			
3	Теория Фредгольма	78			
3.1	Решение интегральных уравнений Фредгольма методом резольвенты. Метод определителей Фредгольма	78			
3.2	Метод итерированных ядер	86			
3.3	Характеристические числа и собственные функции. Решение однородных интегральных уравнений Фредгольма с вырожденным ядром	102			
3.4	Решение неоднородных интегральных уравнений Фредгольма с вырожденным ядром. Теоремы Фредгольма	112			
4	Симметричные интегральные уравнения	139			
4.1	Построение ортонормированной системы собственных функций симметричного ядра	139			
4.2	Представление решения в виде разложения по ортонормированным собственным функциям симметричного ядра	142			
5	Приближенные методы решения интегральных уравнений	168			
5.1	Приближенное решение уравнения Фредгольма с помощью замены интеграла конечной суммой	168			
5.2	Метод последовательных приближений	173			
5.3	Метод Бубнова-Галеркина	190			
5.4	Метод замены ядра вырожденным	194			
6	Индивидуальные задания. Прохождение итогового тестирования после изучения курса	202			

# Интегральные уравнения в среде Wolfram Mathematica: учебное пособие

Найти характеристические числа и собственные функции интегрального уравнения:

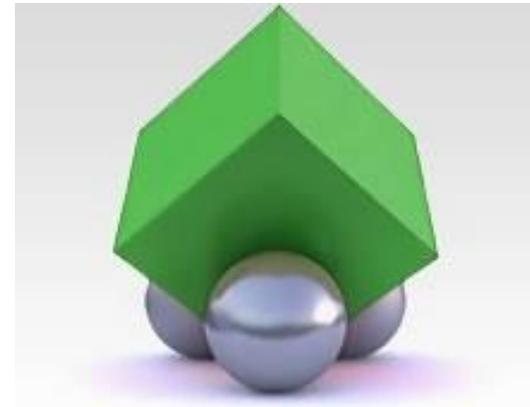
$$\varphi(x) - \lambda \int_0^{\pi} (\cos 2t \cos^2 x + \cos^3 t \cos 3x) \varphi(t) dt = 0$$



# Компьютерное моделирование

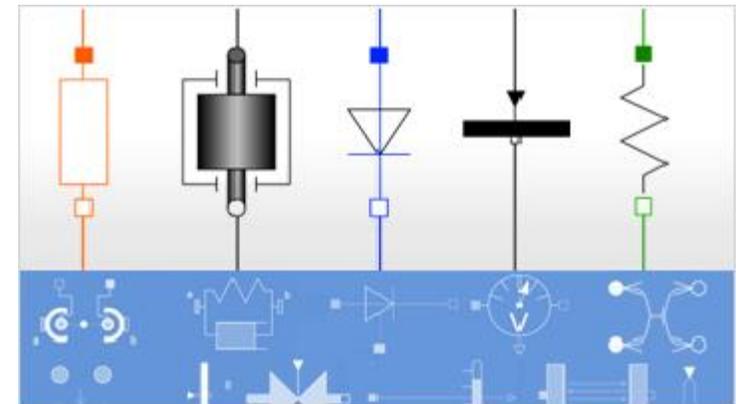
Используемые среды компьютерного моделирования:

- Wolfram SystemModeler
- Rand Model Designer / AnyDynamics



# Wolfram SystemModeler

- Компьютерное моделирование динамических систем, описываемых алгебро-дифференциальными уравнениями
- Компонентно-ориентированный подход
- На базе языка моделирования Modelica
- Интерактивная графическая среда

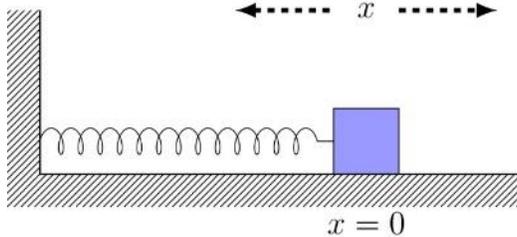


# Wolfram SystemModeler – Возможности

- Создание модели с помощью Drag-and-drop
- Мультидоменное моделирование
- Множество библиотек готовых компонентов
- Возможность выбора численных методов (решателя)
- Симуляция в реальном времени
- 3D визуализация для механических систем
- Интеграция с Wolfram Mathematica

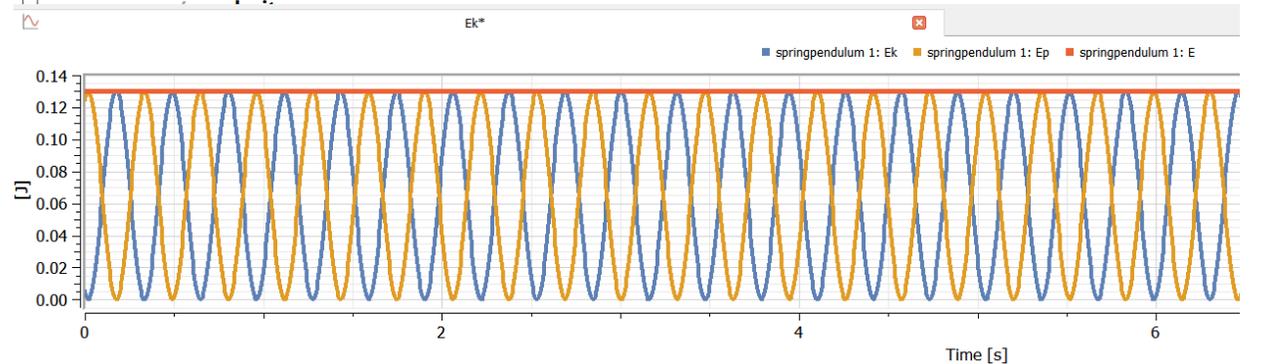
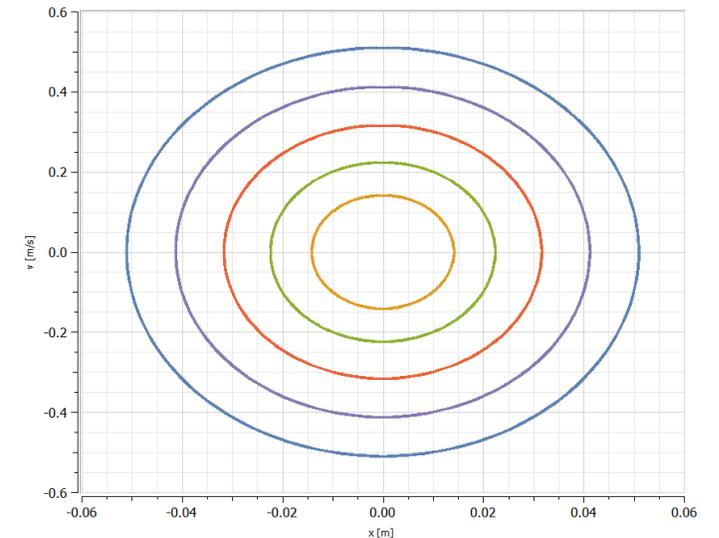
# Wolfram SystemModeler – Возможности

## Создание модели с использованием языка Modelica – Пружинный маятник



```
springpendulum
model springpendulum
  parameter Real m ( unit = "kg" ) = 1 "mass";
  parameter Real k ( unit = "N/m" ) = 100 "coefficient of spring stiffness";
  Real x(unit = "m", start = 0.05) "displacement";
  Real v(unit = "m/s", start = 0.1) "velocity";
  Real Ep(unit="J") "potential energy";
  Real Ek(unit="J") "kinetic energy";
  Real E(unit="J") "full energy";
equation
  der(x) = v;
  der(v) = -k / m * x;
  Ep = k*x*x/2;
  Ek = m*v*v/2;
  E = Ep + Ek;
end springpendulum;
```

Name	Unit	Description
<input type="checkbox"/> der(v)	m/...	Derivative of v
<input type="checkbox"/> der(x)	m/s	Derivative of x
<input checked="" type="checkbox"/> E	J	full energy
<input checked="" type="checkbox"/> Ek	J	kinetic energy
<input checked="" type="checkbox"/> Ep	J	potential energy
<input type="checkbox"/> k	N/m	coefficient of spring stiffness
<input type="checkbox"/> m	kg	mass



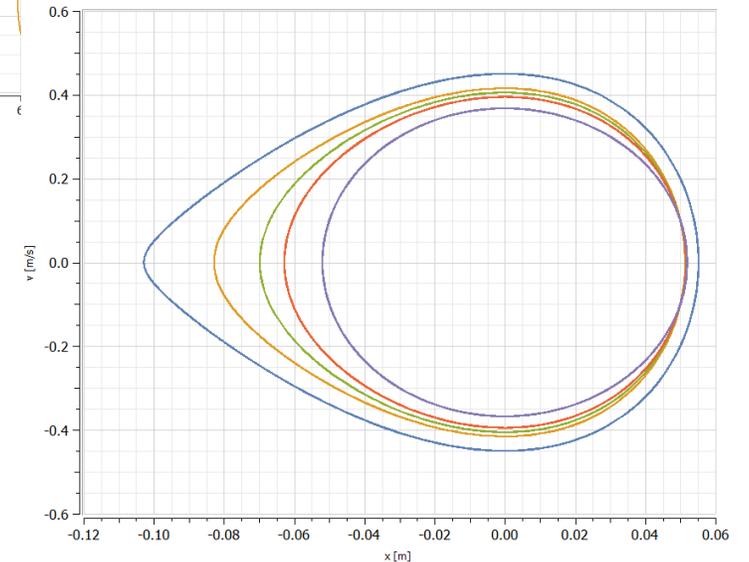
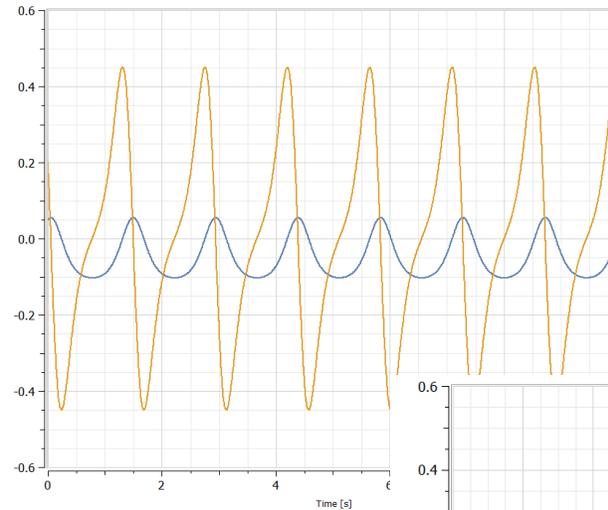
# Wolfram SystemModeler – Возможности

Создание модели с использованием языка Modelica – Нелинейный пружинный маятник

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -k(x + \alpha x^2) - \gamma \frac{dx}{dt}$$

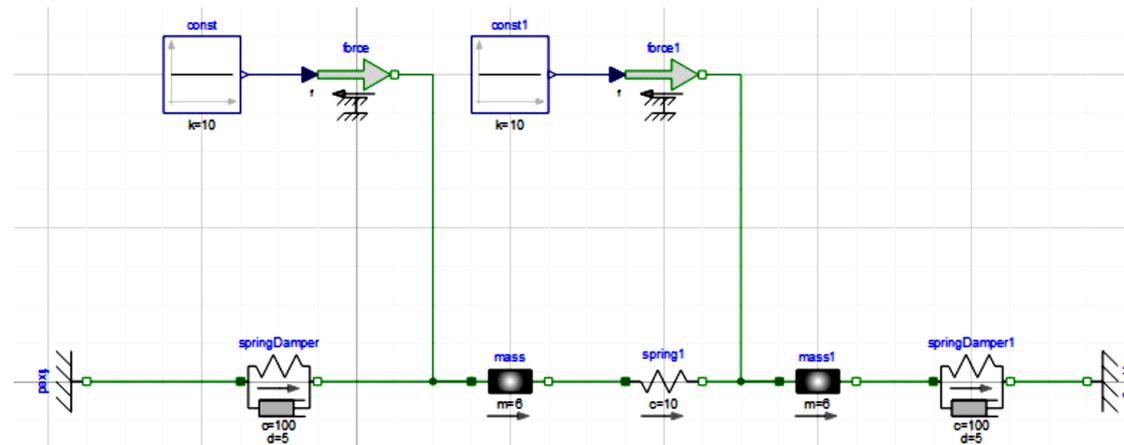
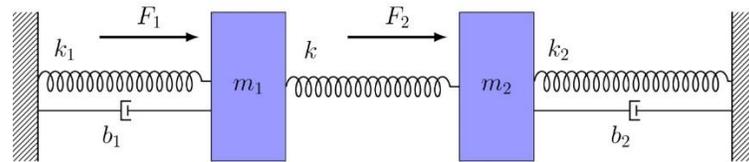


```
nonleardampedspringpendulum
model nonleardampedspringpendulum
  parameter Real m(unit = "kg") = 1 "mass";
  parameter Real k(unit = "N/m") = 100 "coefficient of spring stiffness";
  parameter Real gamma(unit = "N s/m") = 0 "viscosity";
  parameter Real alpha = 1 "nonlinear coefficient";
  Real x(unit = "m", start = 0.05) "displacement";
  Real v(unit = "m/s", start = 0.1) "velocity";
equation
  der(x) = v;
  m * der(v) = (-k * (x + alpha * x * x)) - gamma * v;
end nonleardampedspringpendulum;
```



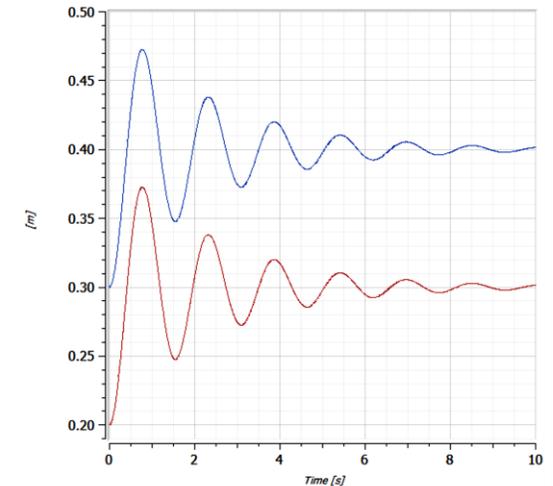
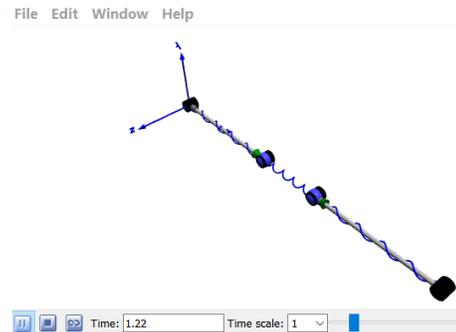
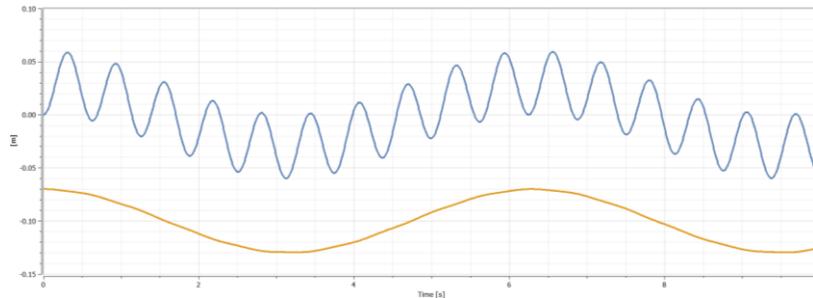
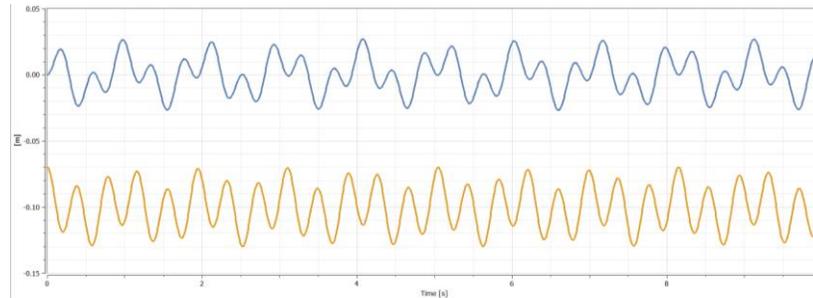
# Wolfram SystemModeler – Возможности

- Компонентное моделирование – Система с демпферами и пружиной –  
Построение модели



# Wolfram SystemModeler – Возможности

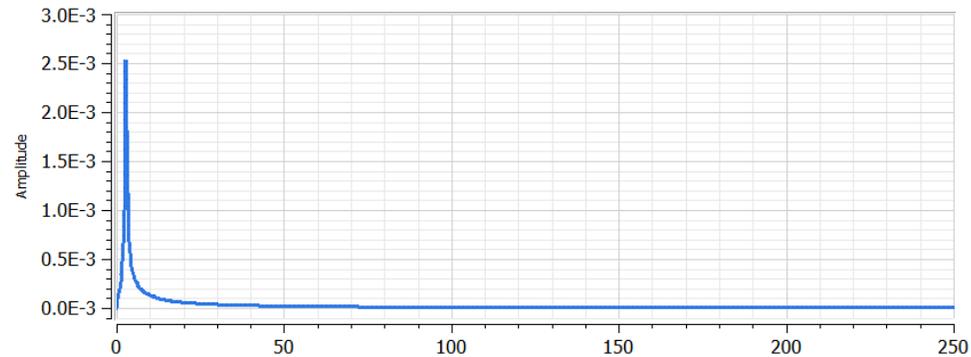
- Компонентное моделирование – Система с демпферами и пружиной – Симуляция



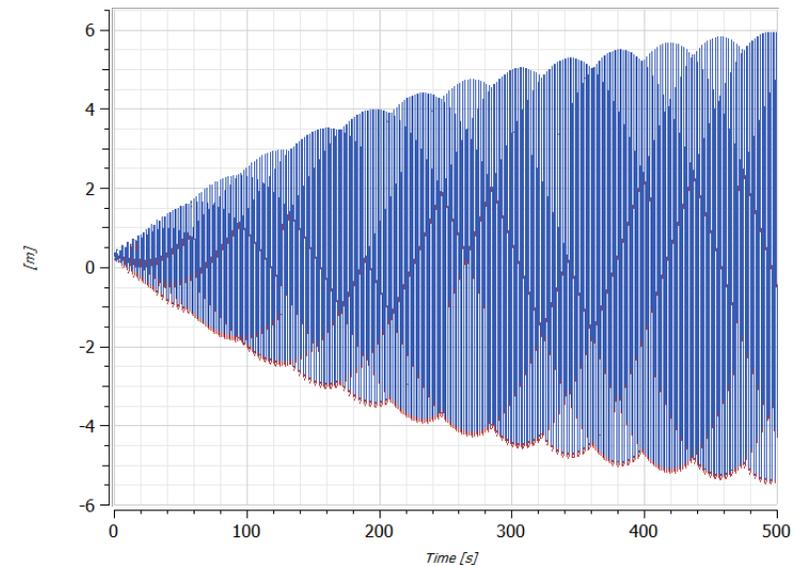
# Wolfram SystemModeler – Возможности

- Компонентное моделирование – Система с демпферами и пружиной – Анализ

FFT-анализ

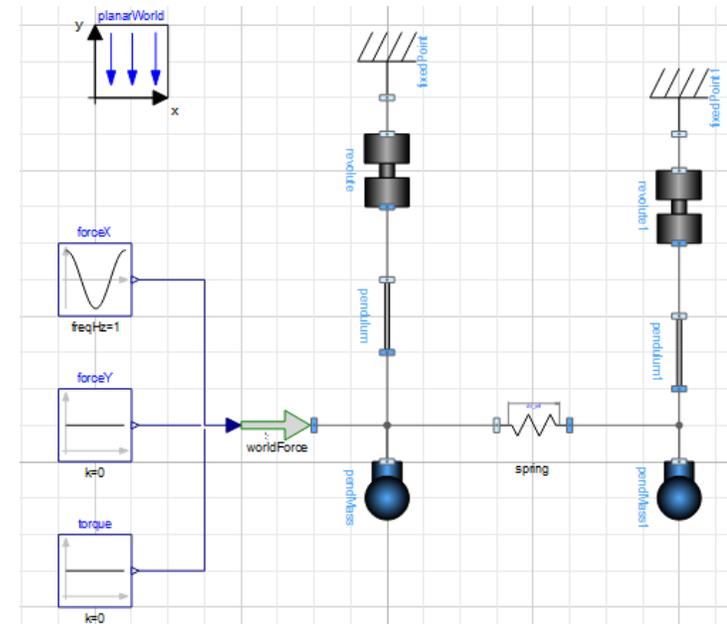
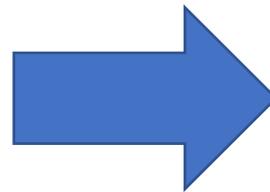
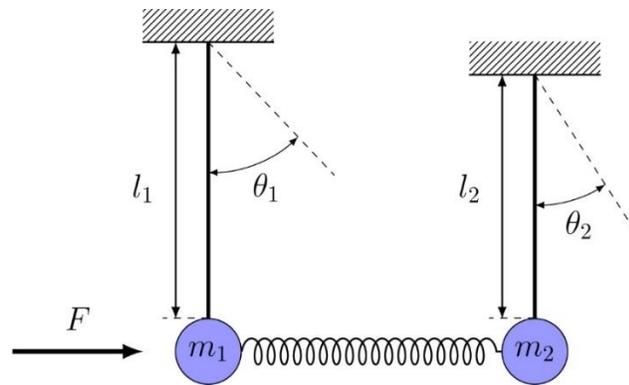


Получение эффекта резонанса



# Wolfram SystemModeler – Возможности

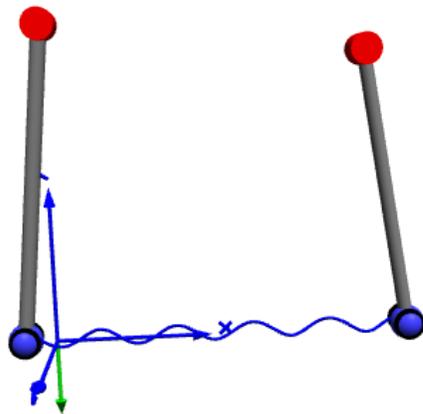
- Компонентное моделирование – Связанные маятники – Построение модели



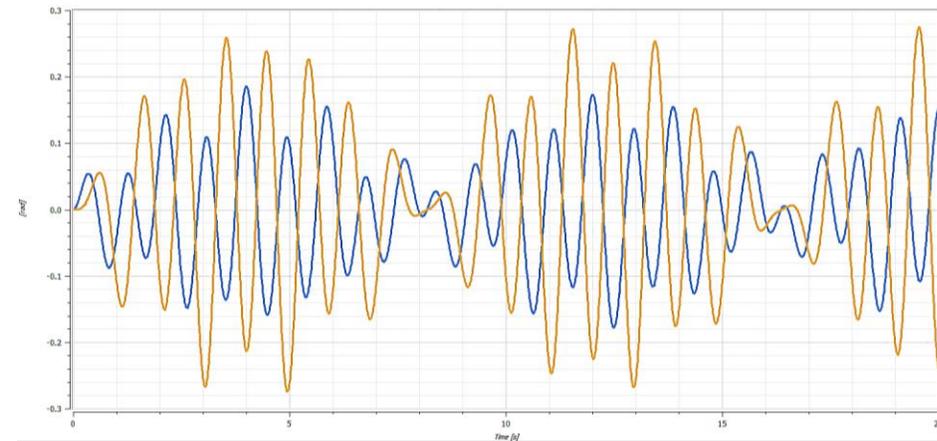
# Wolfram SystemModeler – Возможности

- Компонентное моделирование – Связанные маятники – Симуляция

File Edit Window Help



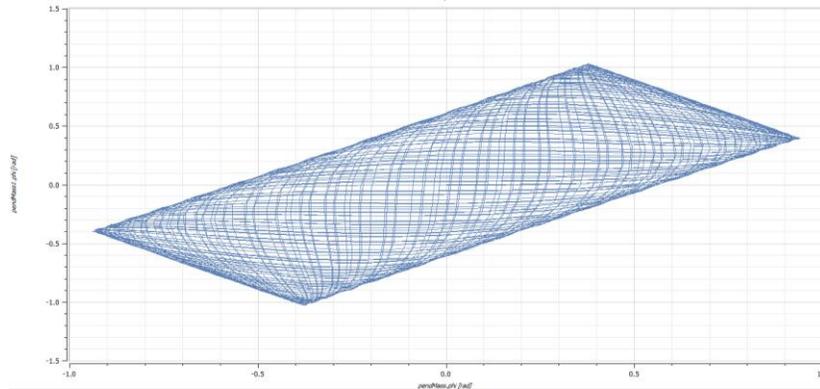
Time: 6.3 Time scale: 1



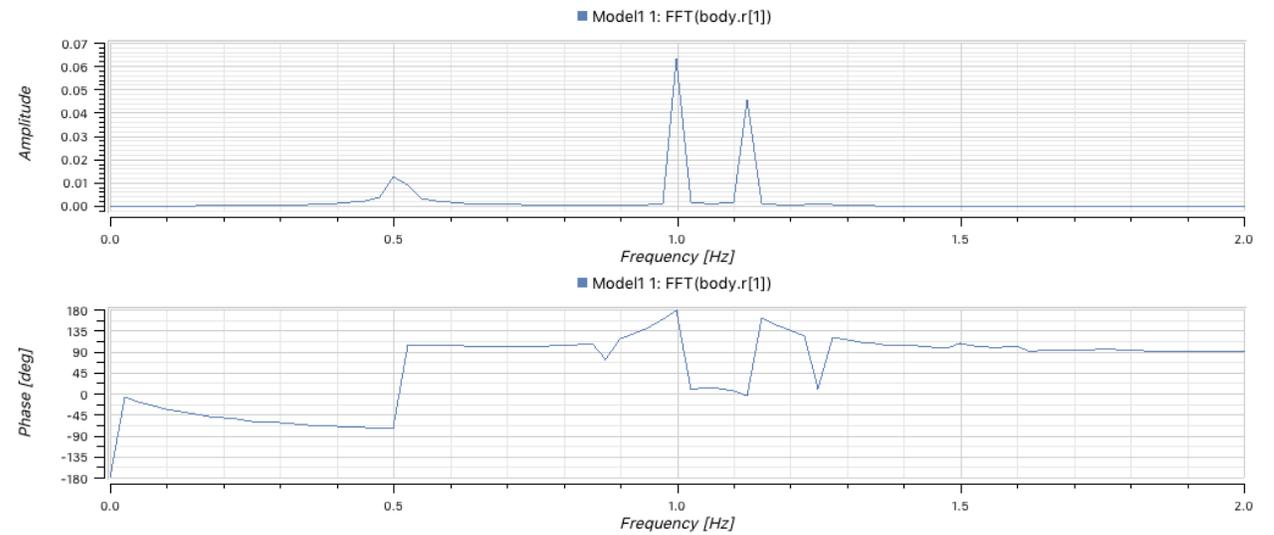
# Wolfram SystemModeler – Возможности

- Компонентное моделирование – Связанные маятники – Анализ

Нахождение огибающей фазовых траекторий

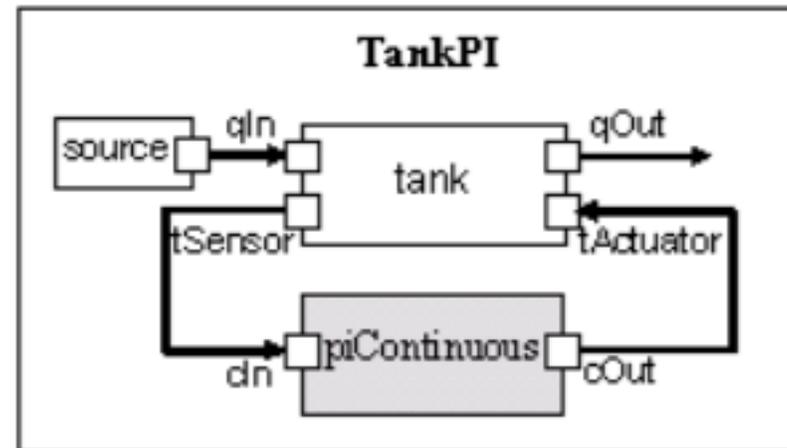
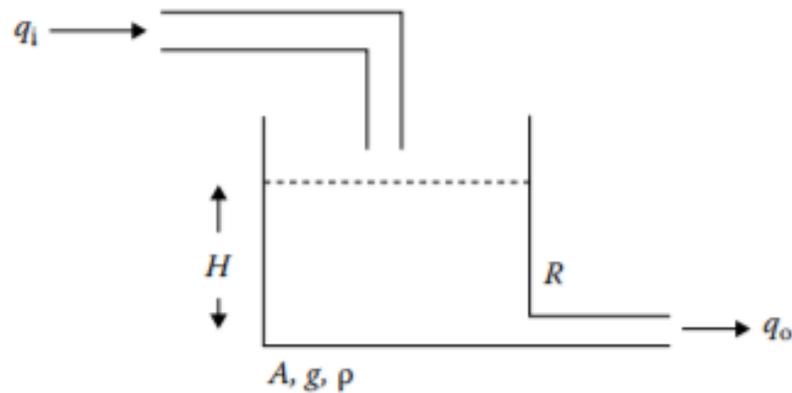


FFT-анализ



# Wolfram SystemModeler – Возможности

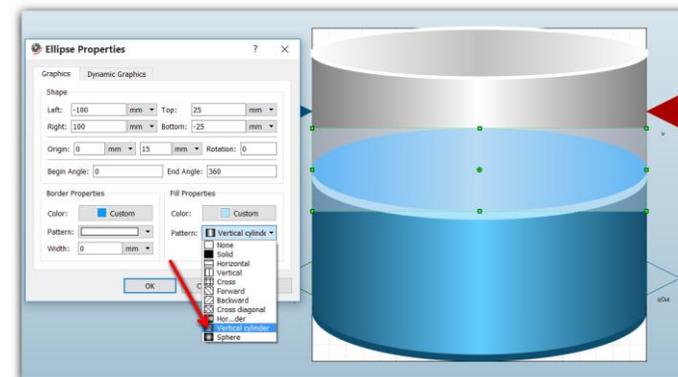
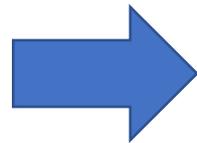
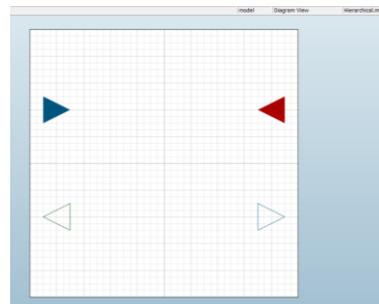
- Создание пользовательских классов – Гидравлические системы



# Wolfram SystemModeler – Возможности

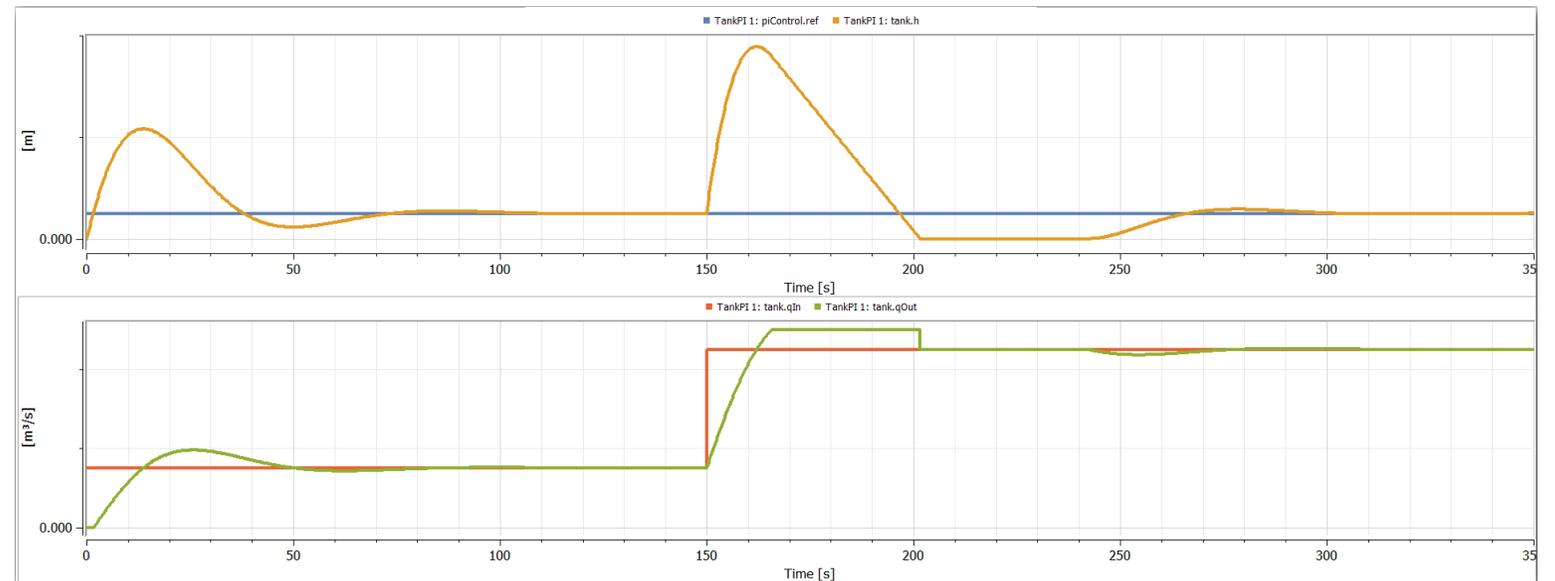
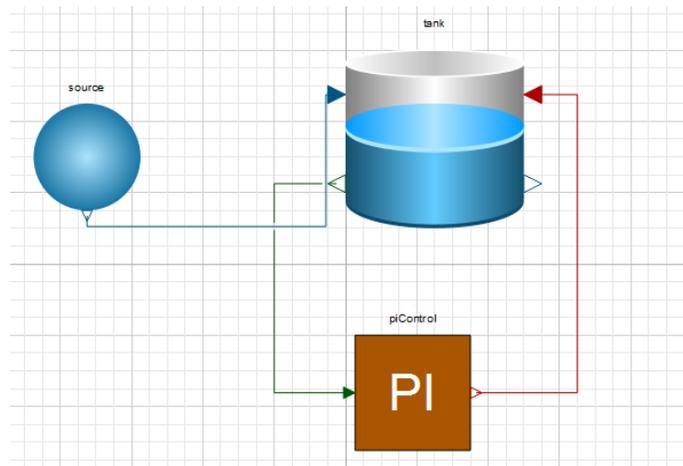
- Создание пользовательских классов – Гидравлические системы

```
model Tank "Model of a simple tank holding liquid"  
  parameter Real A(unit = "m2") = 1.0 "Bottom area";  
  parameter Real minFlow(unit = "m3/s") = 0.0 "Minimum flow through output valve";  
  parameter Real maxFlow(unit = "m3/s") = 0.5 "Maximum flow through output valve";  
  Interfaces.ActSignalInput u "Actuator controlling output flow, connector" ▯;  
  Interfaces.LiquidFlowInput qIn "Flow through input valve, connector" ▯;  
  Interfaces.ReadSignalOutput y "Sensor reading tank level, connector" ▯;  
  Interfaces.LiquidFlowOutput qOut "Flow through output valve, connector" ▯;  
  Real h(start = 0.0, unit = "m") "Liquid level";  
  Real qOutMax(unit = "m3/s") "Maximum output flow considering that the tank level cannot be negative";  
equation  
  assert(minFlow >= 0, "minFlow - minimum flow through output valve must be >= 0");  
  der(h) = (qIn - qOut) / A;  
  qOutMax = if h > 0 then maxFlow else min(qIn, maxFlow);  
  qOut = Functions.LimitValue(minFlow, qOutMax, -u);  
  y = h;  
  ▯;  
end Tank;
```



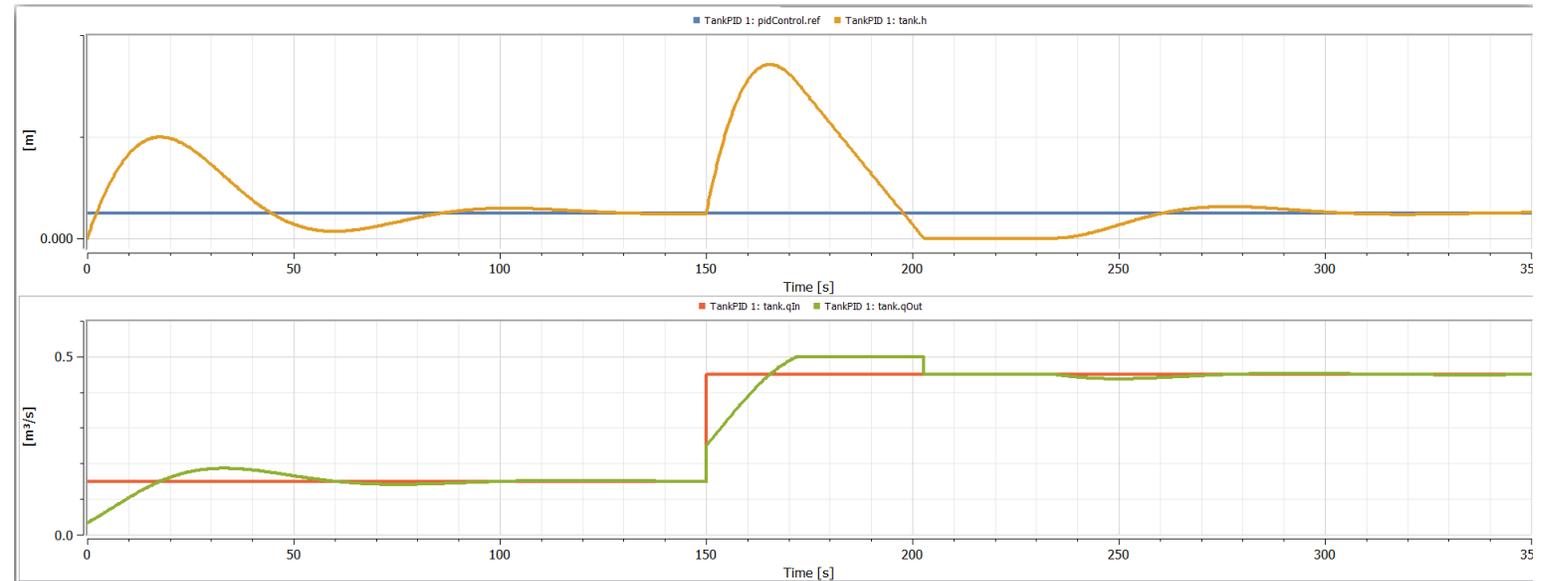
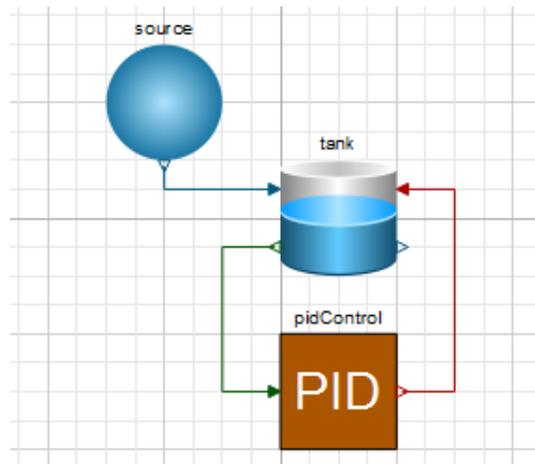
# Wolfram SystemModeler – Возможности

- Создание пользовательских классов – Гидравлические системы



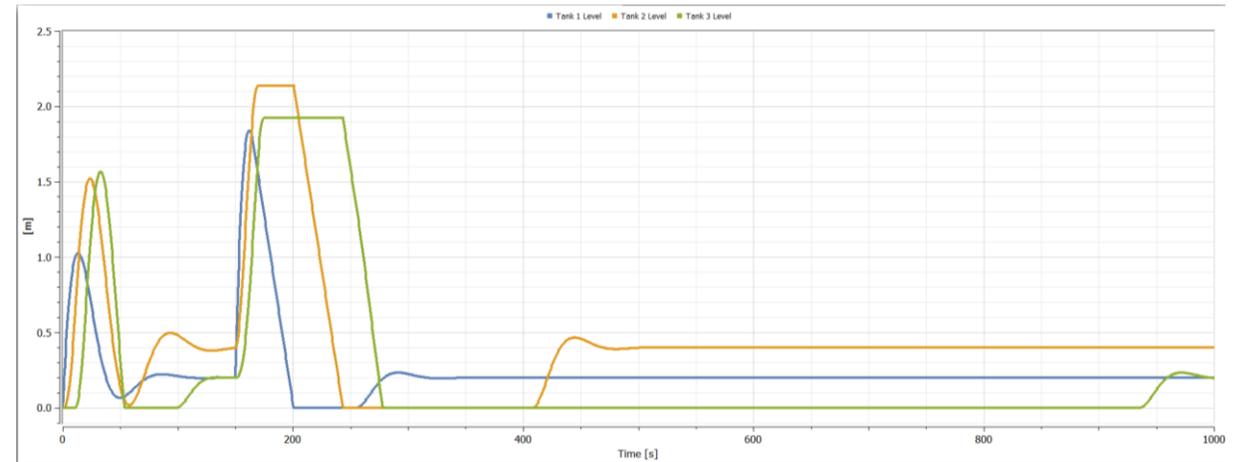
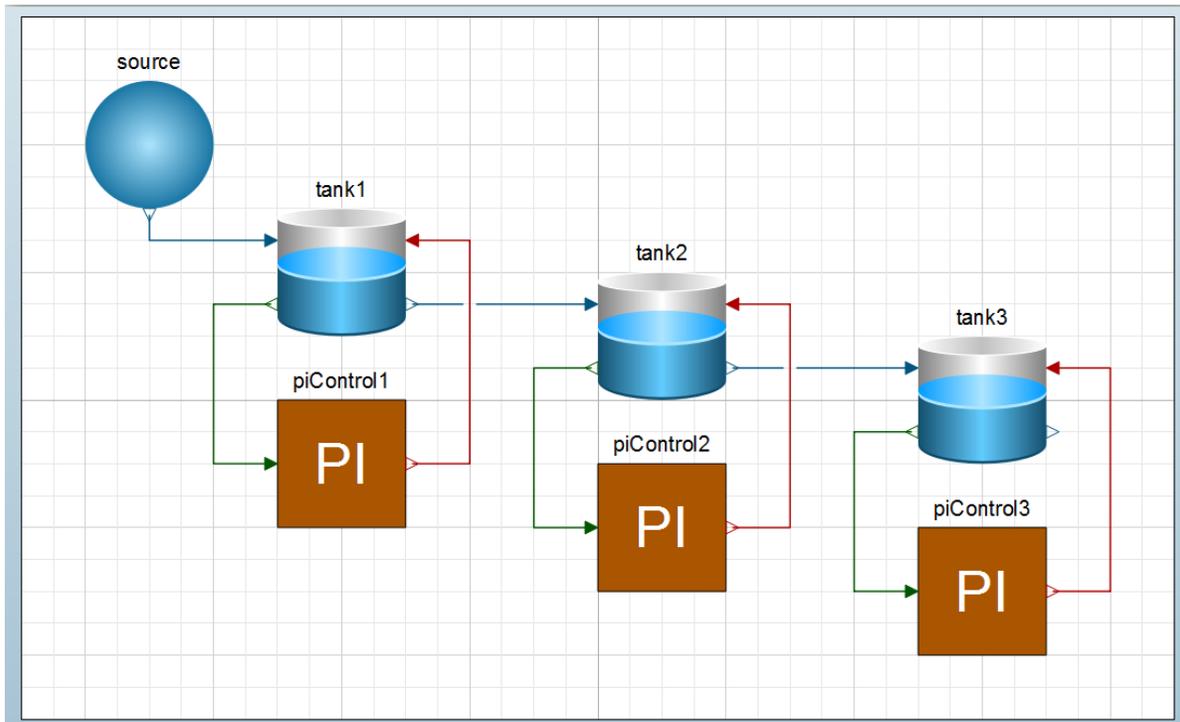
# Wolfram SystemModeler – Возможности

- Создание пользовательских классов – Гидравлические системы



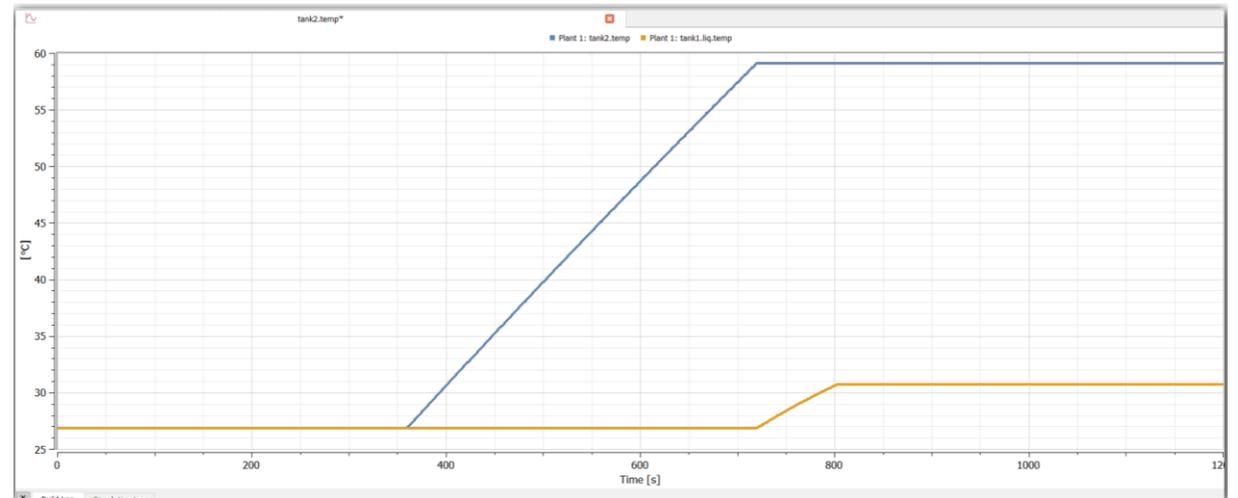
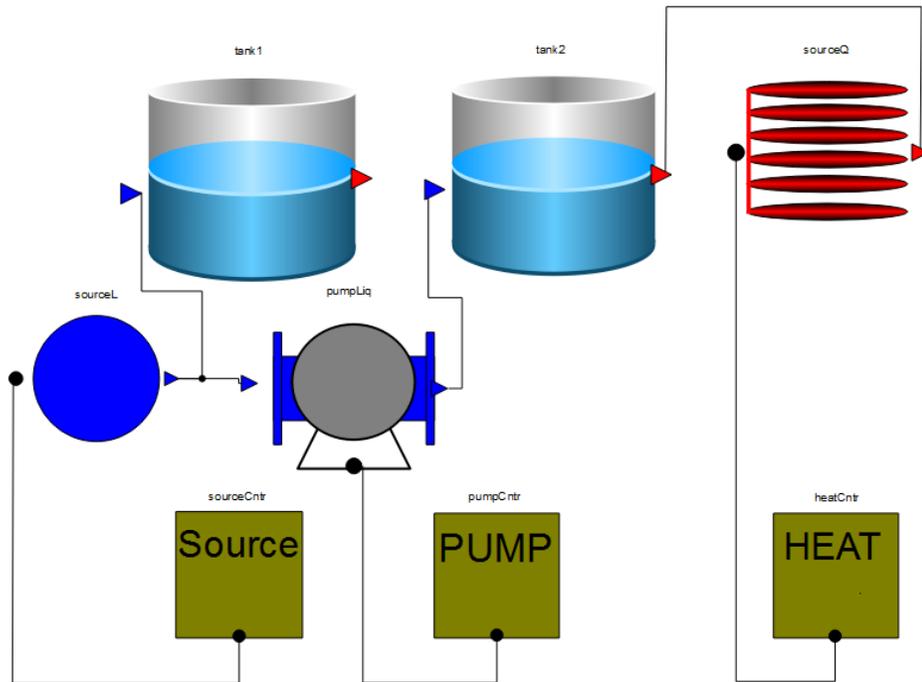
# Wolfram SystemModeler – Возможности

- Создание пользовательских классов – Гидравлические системы

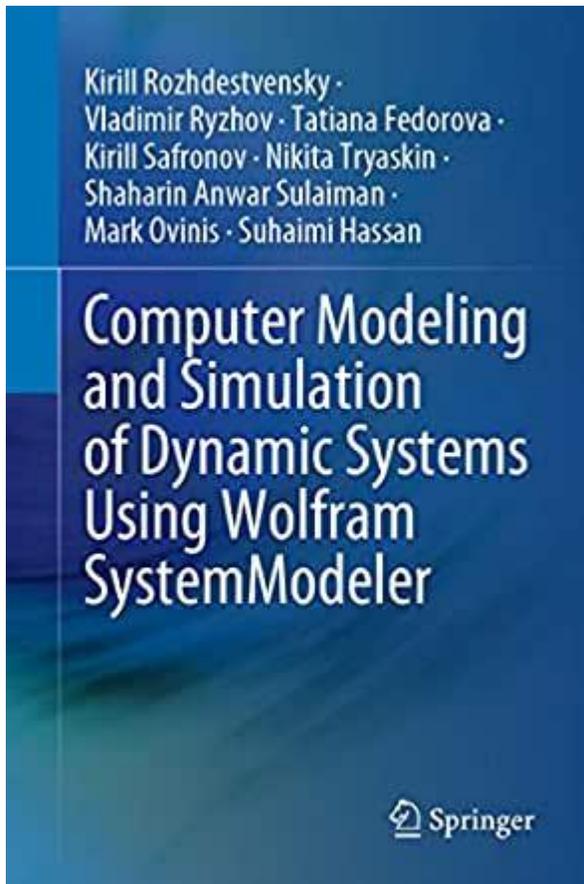


# Wolfram SystemModeler – Возможности

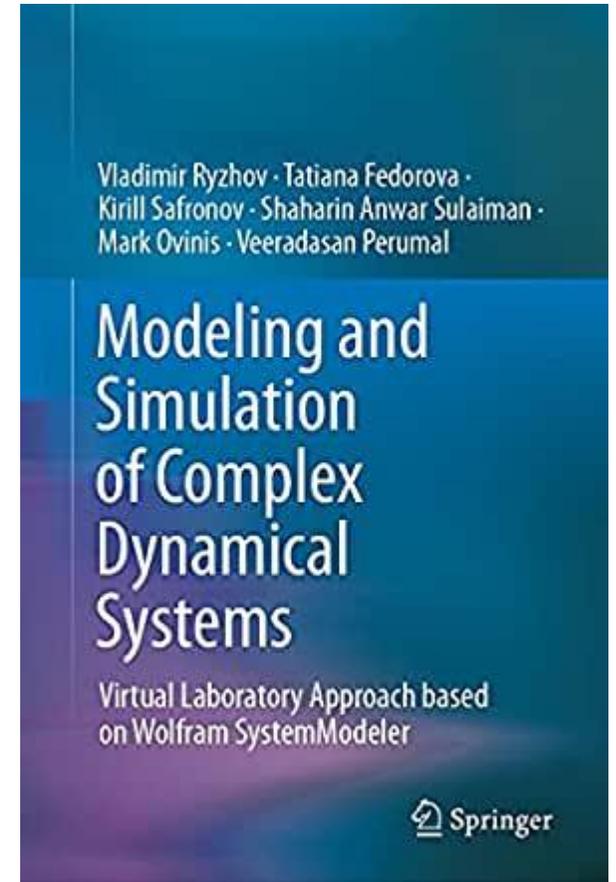
- Создание пользовательских классов – Гидравлические системы



# Учебные пособия кафедры ПМММ



- Компьютерное моделирование динамических систем с использованием среды Wolfram SystemModeler, 2019
- Виртуальные лабораторные работы в среде Wolfram SystemModeler, 2019
- Руководство по выполнению виртуальных лабораторных работ в среде Wolfram SystemModeler, 2019
- [Computer Modeling and Simulation of Dynamic Systems Using Wolfram SystemModeler](#), 2020
- [Modeling and Simulation of Complex Dynamical Systems](#), 2021



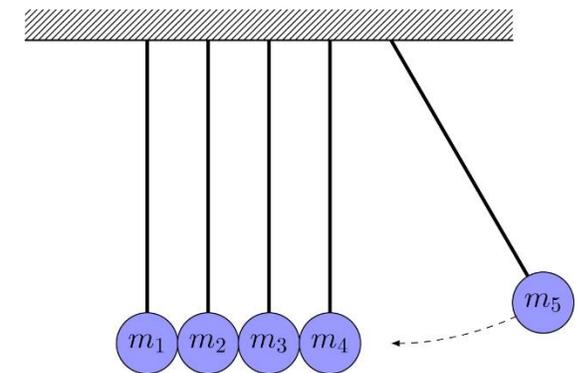
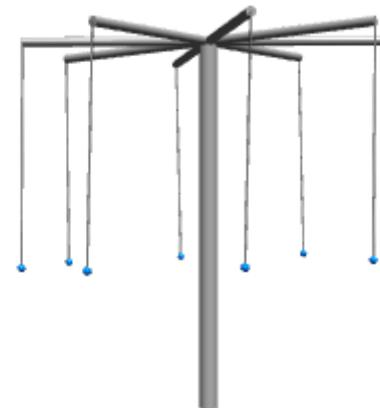
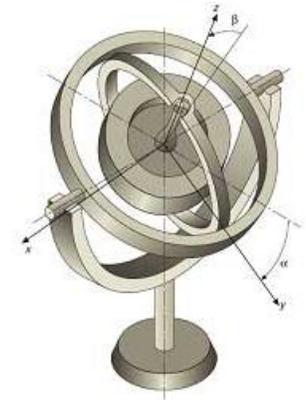
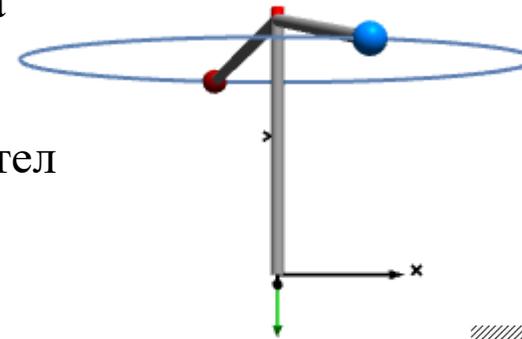
# Компьютерное моделирование динамических систем с использованием среды Wolfram SystemModeler

## Содержание

- Предисловие
  - 1. Моделирование систем
    - 1.1. Основные понятия моделирования
    - 1.2. Классификация математических моделей
    - 1.3. Основные свойства математических моделей
    - 1.4. Компьютерное моделирование и вычислительный эксперимент
    - 1.5. Классификация компьютерных моделей
    - 1.6. Открытые и изолированные модели
    - 1.7. Однокомпонентные и многокомпонентные модели
    - 1.8. Непрерывные, дискретные и гибридные модели
    - 1.9. Линейные и нелинейные системы
    - 1.10. Компонентно-ориентированный подход в моделировании
  - 2. Описание среды Wolfram SystemModeler
    - 2.1. Общие понятия
    - 2.2. Центр моделирования Model Center
    - 2.3. Центр выполнения численного эксперимента [Simulation Center](#)
      - 2.3.1 [Браузер эксперимента Experiment Browser](#)
      - 2.3.2 [Выбор решателя Solver](#)
      - 2.3.3 [Построение графиков](#)
      - 2.3.4 [Анимация модели](#)
      - 2.3.5 [Пример инструментов Simulation Center: FFT анализ](#)
    - 2.4. Процесс создания динамической модели в Wolfram SystemModeler
      - 2.4.1 [Создание собственного компонента в текстовом режиме](#)
      - 2.4.2 [Выполнение численного эксперимента](#)
      - 2.4.3 [Создание собственной библиотеки компонентов для моделирования сложных систем](#)
      - 2.5. Основы компонентного моделирования в WSM
        - 2.5.1 [Создание компьютерной модели пружинного маятника: код на языке Modelica и компонентное моделирование](#)
        - 2.5.2 [Анализ свойств созданного компонента](#)
        - 2.5.3 [Пример использования созданных компонентов: многозвенная цепь](#)
      - 2.6. Создание гибридной модели в пакете WSM с использованием возможностей языка Modelica
        - 2.6.1 [Использование возможностей языка Modelica для описания непрерывных и дискретных событий](#)
        - 2.6.2 [Пример использования средств языка Modelica: прыгающий мяч](#)
      - 2.7. Общие рекомендации по созданию компьютерной модели
  - 3. Компьютерное моделирование динамических систем
    - 3.1. Моделирование динамической системы
    - 3.2. Фундаментальные принципы построения математических моделей
      - 3.2.1 [Использование законов Ньютона и законов сохранения](#)
      - 3.2.2 [Вариационные принципы](#)
    - 3.3. Иерархические принципы построения математических моделей
    - 3.4. Универсальность компьютерной модели и эквивалентные физические системы
  - 4. Моделирование механических колебательных систем с одной степенью свободы. Примеры
    - 4.1. Математический маятник
    - 4.2. Маятник Галилея
    - 4.3. Математический маятник с пружиной
  - 5. Моделирование механических колебательных систем с несколькими степенями свободы. Примеры
    - 5.1. Движение двух тел с трением
    - 5.2. Механическая система с демпфером и пружиной
    - 5.3. Движение трёх тел, соединённых демпфером и пружинами
    - 5.4. Связанные маятники
    - 5.5. Двойной маятник
    - 5.6. Двойной торсионный осциллятор
    - 5.7. Вращательная механическая система с зубчатой передачей
    - 5.8. Механическая система с двумя пружинами и блоком
    - 5.9. Сложная механическая система с пружинами и блоком
  - 6. Иерархические компонентные модели. Примеры
    - 6.1. Задача об уровне жидкости в резервуаре с плоским дном
    - 6.2. Задача о нагреве и истечении жидкости из системы двух резервуаров
    - 6.3. Задача о равновесии обратного маятника
- Заключение  
Литература

# Виртуальные лабораторные работы в среде Wolfram SystemModeler

1. Компьютерное моделирование движения тела, брошенного под углом к горизонту
2. Компьютерное моделирование механической системы с пружиной и демпфером
3. Компьютерное моделирование баллистического маятника
4. Компьютерное моделирование маятника Ньютона
5. Компьютерное моделирование вращательного движения тел
6. Компьютерное моделирование эллиптического маятника
7. Компьютерное моделирование связанных маятников
8. Компьютерное моделирование двойного маятника
9. Компьютерное моделирование карусели
10. Компьютерное моделирование гироскопа



Спасибо за внимание!