

УДК 004.9

О ВЛИЯНИИ РАЗДЕЛЕНИЯ КАНАЛОВ РАЗЛИЧНОЙ ПРОИЗВОДИТЕЛЬНОСТИ НА ПОКАЗАТЕЛИ ЭФФЕКТИВНОСТИ СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

Самерханов И.З. (Казань)

Введение

Вопросы и модели теории массового обслуживания рассматривались многими отечественными и зарубежными авторами: системам обслуживания (далее – системы массового обслуживания, СМО) посвящено немало исследований как сугубо прикладного, так и теоретического характера. Интерес научного сообщества к данной области теории вероятностей и случайных процессов во многом объясняется ее значением и универсальностью для решения широкого круга научно-прикладных задач.

Подавляющее большинство реально существующих систем, которые возможно представить в виде математических моделей массового обслуживания, обладают каналами различной интенсивности обслуживания. Кроме того, в современных условиях большинство систем и процессов отличаются довольно высокой степенью сложности, а моделирование их характеристик может представлять прикладной интерес только при расчетах в режиме реального времени. В данных условиях по техническим причинам аналитические методы слабо применимы, в то же время возможности средств имитационного моделирования позволяют решать подобные задачи вполне эффективно.

Несмотря на то, что первые работы по системам массового обслуживания с каналами различной производительности были опубликованы в 60-х годах прошедшего столетия (к примеру, [1-3]), в настоящее время ряд вопросов в части данных СМО остался без должного внимания.

В рамках настоящей работы на примере 2-х-канальной СМО с отказами исследуется изменение показателей эффективности при разделении системы с каналами различной производительности на независимые одноканальные системы. В качестве политики управления в исследовании используется схема направления поступающих заявок на свободный канал наибольшей производительности (FSF – Fastest Server First) (в [4] с помощью средств имитационного моделирования показано, что для систем с отказами данная схема администрирования является наиболее эффективной). Разделение каналов для классических систем с приборами одинаковой производительности рассмотрено в [5-6].

Материалы и методы решения.

Рассмотрим систему массового обслуживания с каналами различной производительности без функции накопления очереди, на вход которой поступает пуассоновский поток заявок интенсивности λ , $\lambda > 0$. Система состоит из n , $n > 0$ каналов различной производительности, причем $0 < \mu_1 < \mu_2 \dots < \mu_n$. Суммарная интенсивность обслуживающих устройств равна $M = \sum_{i=1}^n \mu_i$, а величина нагрузки на систему $\gamma = \frac{\lambda}{\sum_{i=1}^n \mu_i} = \lambda M^{-1}$.

Представим, что данную систему разделили на n независимых одноканальных систем, на вход каждой из которых поступает пуассоновский поток интенсивностью $\frac{\lambda}{n}$. Суммарная интенсивность обслуживающих устройств n одноканальных систем также

равна M , а величины нагрузки на системы равны соответственно $\gamma_1 = \frac{\lambda}{n\mu_1}, \dots, \gamma_n = \frac{\lambda}{n\mu_n}$. Проанализируем влияние разделения каналов на показатели эффективности системы.

Как показано в [7], количество возможных состояний в системах с каналами различной производительности (соответственно и размерность системы уравнений Колмогорова для расчета вероятностей состояний СМО) быстро растет при увеличении количества приборов, что делает слабо применимой их аналитическое исследование. Как было отмечено ранее, одним из подходов для решения подобных задач является применение средств имитационного моделирования. На тему имитационного моделирования применительно к системам массового обслуживания опубликовано большое количество работ и учебных материалов, к примеру [8-10] (стоит отметить, что большая часть работ посвящена классическим системам, обладающим каналами одинаковой интенсивности).

Для проведения имитационных экспериментов в рамках настоящей работы использован программный комплекс AnyLogic. Данное программное обеспечение обладает широким функционалом, в том числе в части моделирования систем массового обслуживания, а также предоставляет возможность использования языка программирования Java. В работе [11] при помощи сравнения результатов аналитических и имитационных расчетов показано, что программный комплекс AnyLogic хорошо подходит для моделирования систем с каналами различной производительности.

Имитационная модель 2-х канальной системы массового обслуживания с отказами представлена на Рис. 1.

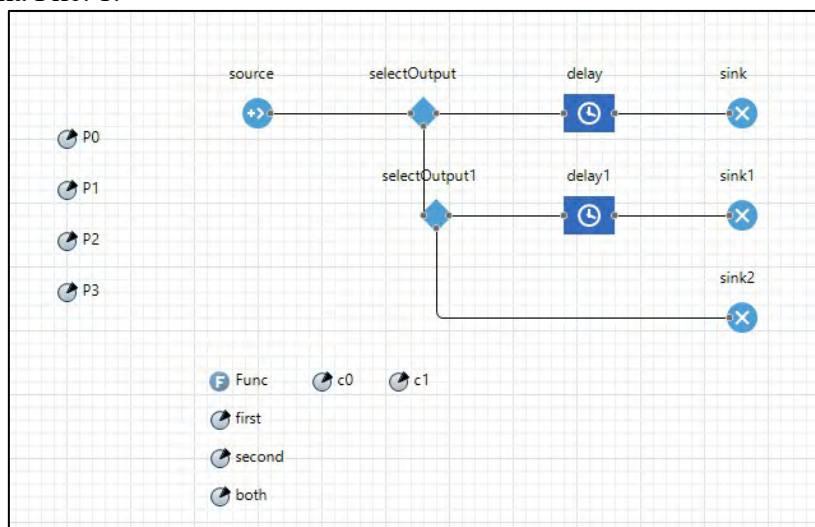


Рис. 1. Имитационная модель 2-х канальной СМО с отказами на базе программного комплекса AnyLogic

Данная модель состоит из следующих блоков:

- source – для создания потока заявок с заданной интенсивностью;
- selectOutput, selectOutput1 – для распределения и направления заявок в следующие блоки;
- delay, delay1 – для задержки заявок (каналы обслуживания);
- sink, sink1, sink2 – для уничтожения заявок.

Помимо блоков, в модели определены переменные для подсчета вероятностей стационарных состояний системы:

- P0 – система свободна;
- P1 – в системе 1 заявка и ее обслуживанием занят блок delay;
- P2 – в системе 1 заявка и ее обслуживанием занят блок delay1;

- P3 – в системе 2 заявки на обслуживании (в блоках delay и delay1).

Также в модели определены переменные для подсчета количества случаев каждого возможного состояния системы:

- first – в системе 1 заявка и ее обслуживанием занят блок delay1;
- second – в системе 1 заявка и ее обслуживанием занят блок delay;
- both – в системе 2 заявки на обслуживании (в блоках delay и delay1).

Кроме того, в модели определены переменные булевского типа:

- c0 – переменная, определяющая возможность поступления заявки в канал delay или delay1;
- c1 – переменная, определяющая возможность поступления заявки в канал delay1 или выхода без обслуживания.

Также имитационная модель включает в себя функцию $Func()$ для подсчета параметров и определения правила по выбору поступления заявки в блок delay или delay1.

Кроме имитационной модели, рассмотрим математическую модель 2-х канальной системы. На Рис. 2 представлен граф состояний указанной системы при схеме управления потоком заявок с приоритетом канала наибольшей производительности. Система имеет 4 возможных состояния – P0...P3, где P0 – вероятность состояния, при котором система свободна, P3 – вероятность состояния, при котором оба канала системы заняты (очевидно, что в данном случае это также вероятность отказа в обслуживании). Числа в нижней части квадратов имеют смысл номеров каналов обслуживания, задействованных при конкретном состоянии системы. Интенсивность обслуживания первого и второго каналов равны соответственно μ_1 и μ_2 , $0 < \mu_1 < \mu_2$, интенсивность входного потока – λ . На Рис. 3 представлены графы состояний двух независимых одноканальных систем. Производительность прибора в первой системе – μ_1 , во второй системе – μ_2 , интенсивность входного потока в обеих СМО равна $\frac{\lambda}{2}$.

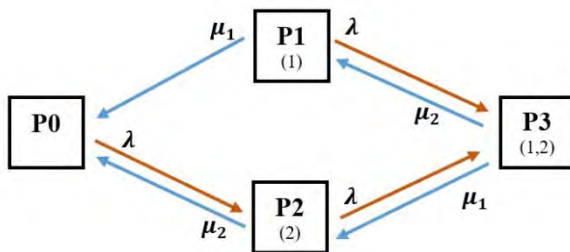


Рис. 2. Граф состояний
2-х канальной СМО

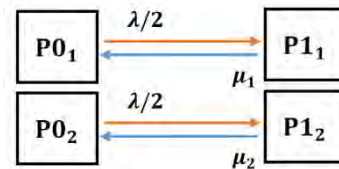


Рис. 3. Графы состояний
2-х одноканальных СМО

Система дифференциальных уравнений Колмогорова, описывающая распределение вероятностей состояний 2-х канальной СМО при схеме администрирования с приоритетом наиболее «быстрого прибора», представленной на Рис. 2, имеет вид (1):

$$\begin{cases} \frac{dP0(t)}{dt} = \mu_1 P1 + \mu_2 P2 - \lambda P0 \\ \frac{dP1(t)}{dt} = \mu_2 P3 - (\mu_1 + \lambda) P1 \\ \frac{dP2(t)}{dt} = \mu_1 P3 + \lambda P0 - (\mu_2 + \lambda) P2 \\ \frac{dP3(t)}{dt} = \lambda P1 + \lambda P2 - (\mu_1 + \mu_2) P3 \\ P0(t) + P1(t) + P2(t) + P3(t) = 1 \end{cases} \quad (1)$$

В рамках настоящей работы наибольший интерес представляют вероятности состояний в стационарном режиме. Предельные вероятности состояний для независимых одноканальных систем, представленных на Рис. 3, вычисляются по формулам (2):

$$P0_1 = \frac{2\mu_1}{2\mu_1 + \lambda}, P1_1 = \frac{\lambda}{2\mu_1 + \lambda}; P0_2 = \frac{2\mu_2}{2\mu_2 + \lambda}, P1_2 = \frac{\lambda}{2\mu_2 + \lambda} \quad (2)$$

Для одноканальных СМО с отказами относительная пропускная способность Q равна величине $P0_1$ и $P0_2$ соответственно для первого и второго канала, а абсолютная пропускная способность A равна $P0_1 \frac{\lambda}{2}$ и $P0_2 \frac{\lambda}{2}$.

Результаты исследования и их обсуждение.

Рассчитаем показатели эффективности для каждой из систем. Рассмотрим результаты для различных соотношений между интенсивностями каналов $\frac{\mu_2}{\mu_1}$ и при различных вариантах нагрузки на систему: при $\gamma < 1$; $\gamma = 1$; $\gamma > 1$.

Результаты представлены в Таблице 1. В ячейках блока «2 одноканальные СМО» верхнее значение относится к первой одноканальной системе с интенсивностью μ_1 , нижнее значение – ко второй одноканальной системе с интенсивностью μ_2 .

Таблица 1. Результаты экспериментов с 2-х канальной и 2 одноканальными СМО

λ	μ_1	μ_2	2-х канальная СМО				2 одноканальные СМО			
			P_0	$P_{отк}$	Q	A	P_0	$P_{отк}$	Q	A
$\gamma < 1$ (система «недогружена»)										
10	8	12	0,416	0,195	0,805	8,05	0,615 0,706	0,385 0,294	0,615 0,706	3,075 3,530
10	6	14	0,412	0,196	0,804	8,04	0,545 0,737	0,455 0,263	0,545 0,737	2,725 3,685
10	4	16	0,379	0,207	0,793	7,93	0,444 0,762	0,556 0,238	0,444 0,762	2,220 3,810
$\gamma = 1$ (система «загружена равномерно»)										
10	4	6	0,204	0,398	0,602	6,02	0,444 0,545	0,556 0,455	0,444 0,545	2,220 2,725
10	3	7	0,195	0,402	0,598	5,98	0,375 0,583	0,625 0,417	0,375 0,583	1,875 2,915
10	2	8	0,167	0,417	0,583	5,83	0,286 0,615	0,714 0,385	0,286 0,615	1,43 3,075
$\gamma > 1$ (система «перегружена»)										
10	2,5	3,5	0,102	0,561	0,439	4,39	0,333 0,412	0,667 0,588	0,333 0,412	1,665 2,06
10	2	4	0,098	0,564	0,436	4,36	0,286 0,444	0,714 0,556	0,286 0,444	1,43 2,22
10	1,5	4,5	0,087	0,571	0,429	4,29	0,231 0,474	0,769 0,526	0,231 0,474	1,155 2,37

Результаты численных и имитационных экспериментов, представленные в Таблице 1, демонстрируют, что для 2-х-канальной СМО разделение каналов различной производительности на несколько независимых одноканальных систем значительно ухудшает показатели эффективности.

Рассмотрим показатели эффективности системы при $\gamma < 1$, $\lambda = 10$, $\mu_1 = 8$, $\mu_2 = 12$ (первая строка Таблицы 1). Величина абсолютной пропускной способности в случае системы из двух каналов ($A = 8,05$) превышает суммарную величину абсолютной пропускной способности двух одноканальных систем ($A_1 + A_2 = 6,605$). Таким образом, при разделении каналов по показателю абсолютной пропускной способности система теряет 17,95 %. Увеличение диспропорции между интенсивностями каналов приводит к усилению такого эффекта. К примеру, если при разделении каналов в системе с $\mu_1 = 8$, $\mu_2 = 12$ по показателю абсолютной пропускной способности система теряет 17,95%, то при каналах $\mu_1 = 4$, $\mu_2 = 16$ (третья строка Таблицы 1) система теряет 23,96%.

Для «равномерно загруженной» системы при $\gamma = 1$ наблюдается та же картина. Так, при $\mu_1 = 4$, $\mu_2 = 6$ абсолютная пропускная способность 2-х-канальной СМО ($A = 6,02$) при разделении на одноканальные системы теряет 17,86%, а при $\mu_1 = 2$, $\mu_2 = 8$ разделение приводит к потере 22,73%.

Снижение эффективности функционирования системы при разделении каналов наблюдается и при нагрузке на систему $\gamma > 1$.

Выводы

В рамках работы представлены результаты численных и имитационных экспериментов, демонстрирующих «системный» характер эффективности системы массового обслуживания с каналами различной производительности. На примере 2-х-канальной системы продемонстрировано, что разделение СМО на несколько независимых одноканальных систем приводит к ухудшению показателей ее эффективности. Одновременно с этим, данный эффект усиливается при увеличении диспропорции между приборами.

Литература

1. **Gumbel Н.** Waiting lines with heterogeneous servers // *Operations Research*. – 1960. – Vol. 8, Iss. 4. – P. 504–511.
2. **Шахбазов А. А.** Обслуживание приборами разной производительности // *Ученые записки Азербайджанского Государственного университета, сер. физ.-мат. и хим. наук.* – 1962. – N 3.
3. **Krishnamoorthy В.** On Poisson queue with two heterogeneous servers // *Oper. Res.* – 1963. – V. 11. – P. 321-330.
4. **Печеный Е. А.** Модель управления системой массового обслуживания с неэквивалентными каналами / Е. А. Печеный, И. З. Самерханов, Н. К. Нуриев // *Современные наукоемкие технологии.* – 2022. – № 4. – С. 83-88.
5. **Фадеев С. Н.** О разделении каналов в системе массового обслуживания с неограниченной очередью каналов в системе массового обслуживания с неограниченной очередью / С. Н. Фадеев // *Ученые записки Санкт-Петербургского имени В.Б. Бобкова филиала Российской таможенной академии.* – 2019. – № 3(71). – С. 37-40.
6. **Фадеев С. Н.** Оценка эффективности разделения каналов в системе массового обслуживания с неограниченной очередью / С. Н. Фадеев, Н. А. Брейдер // *Известия высших учебных заведений. Приборостроение.* – 2021. – Т. 64, № 5. – С. 351-356.
7. **Нуриев Н. К.** Математическое моделирование системы массового обслуживания с каналами разной производительности / Н. К. Нуриев, Е. А. Печеный, С. Д. Старыгина // *Современные наукоемкие технологии.* – 2021. – № 1. – С. 31-36.

8. **Боев Б.В.** Компьютерное моделирование в среде AnyLogic: учеб. пособие для вузов / В.Д. Боев. – М.: Издательство Юрайт, 2019. – 198 с.
9. **Карпов Ю.Г.** Имитационное моделирование систем. Введение в моделирование с AnyLogic. – СПб: БХВ-Петербург, 2006. – 400 с.
10. **Якимов И. М.** Моделирование сложных систем в имитационной среде ANYLOGIC / И. М. Якимов, А. П. Кирпичников, В. В. Мокшин // Вестник Казанского технологического университета. – 2014. – Т. 17, № 13. – С. 352-357.
11. **Самерханов И. З.** О применимости имитационного моделирования для расчета показателей систем массового обслуживания с неэквивалентными каналами / И. З. Самерханов // Вестник Технологического университета. – 2022. – Т. 25, № 6. – С. 101-104.