

**ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ДОСТОВЕРНОСТИ  
МЕТОДА ДООПРЕДЕЛЕНИЯ МАТРИЦ ПРЕДПОЧТЕНИЙ****И.С. Киселёв, С. В. Микони (Санкт-Петербург)****Введение**

Согласно [1] «компьютерный эксперимент с моделью состоит в выполнении на компьютере исследуемой программы с разными значениями параметров (исходных данных) и анализе результатов этих выполнений». Одним из назначений компьютерного эксперимента является экспериментальное оценивание моделей и методов обработки данных с целью определения их эффективности или достоверности.

В работе [2] компьютерный эксперимент проводился с целью сопоставления качества методов, применяемых для агрегирования экспертных предпочтений. Эксперимент основывался на моделировании ошибочных предпочтений экспертов путём «зашумления» матриц парных сравнений (МПС). Под «зашумлением» МПС понимается преобразование полностью согласованной (сверхтранзитивной) матрицы в матрицу с ошибочными предпочтениями экспертов. Ошибка предпочтения  $i$ -й сущности над  $j$ -й моделируется масштабным коэффициентом  $\delta > 0$ :  $a_{ij} \cdot \delta / 100\%$ .

Идея определения качества методов расчёта агрегированных оценок (приоритетов сущностей) заключается в следующем. Задаётся произвольный вектор нормированных приоритетов сущностей  $\mathbf{w}_i = (w_1, \dots, w_j, \dots, w_N)$ ,  $\sum_{j=1}^N w_j = 1$ . В дальнейшем значения компонент вектора принимаются за эталонные. По ним строится полностью согласованная матрица кратности предпочтений  $\mathbf{A}$  исходя из соотношения  $a_{ij} = w_i / w_j$ ,  $i, j = \overline{1, N}$ . Далее производится «зашумление» матрицы  $\mathbf{A}$  таким образом, чтобы каждый элемент матрицы  $\mathbf{A}$  изменялся по следующему закону:  $a'_{ij} = a_{ij} \pm a_{ij} \cdot \delta / 100\%$ . Величина  $\delta > 0$  задаёт максимальное относительное отклонение предпочтения эксперта от эталонного значения  $a_{ij}$ . Далее «зашумленная» матрица  $\mathbf{A}'$  подвергается обработке одним из методов агрегирования предпочтений с целью получения вектора приоритетов  $\mathbf{w}_i'$ . Качество метода определяется характером зависимости ошибки определения приоритетов от величины  $\delta$  (ошибки эксперта). Для нахождения максимально возможной ошибки определения приоритетов для каждого значения  $\delta$  используется генетический алгоритм. По результатам моделирования ошибок экспертов для различного содержимого МПС строятся графики отклонений приоритетов. По ним определяется качество сопоставляемых методов.

Воспользуемся изложенным подходом для экспериментального доказательства достоверности результатов, получаемых методом доопределения не полностью заполненных матриц кратности предпочтений [3].

**Постановка задачи**

Метод заполнения пустых клеток матрицы кратности предпочтений, предложенный в работе [3], основан на не ухудшении согласованности предпочтений, присутствующей в заполненной части матрицы. Сущность метода заключается в следующем.

Незаполненные клетки в предъявленной для доопределения матрице кратности предпочтений заполняются единицами. Равенство  $a_{ij} = a_{ji} = 1$  характеризует неопределённость предпочтения между  $i$ -ой и  $j$ -ой сущностями. Полученная таким образом матрица  $\mathbf{A}$  является полностью заполненной и подлежит дальнейшему уточнению на основе оптимизации неопределённых значений  $a_{ij}$ . В качестве целевой в работе принята следующая функция:

$$\eta\lambda(a_{ij})=(n-1+a_{ij})/\lambda_{\max}, \quad (1)$$

где  $\lambda_{\max}$  – максимальное собственное число матрицы  $\mathbf{A}$ .

Величина целевой функции  $\eta\lambda(a_{ij})$  стремится к 0 при увеличении рассогласованности матрицы ( $\lambda_{\max} \rightarrow \infty$ ) и равна 1 при достижении идеальной согласованности ( $\lambda_{\max}=n-1+a_{ii}$ ). Исходя из формулы (1), согласованность матрицы максимальна при  $\lambda_{\max}=n$ . Тождество достигается для полностью согласованной (сверхтранзитивной) матрицы, в которой для каждой тройки элементов  $i, j, k, k=\overline{1, N}$  выполняется равенство  $a_{ij} \cdot a_{jk} = a_{ik}$ .

Значение неизвестного предпочтения  $a_{ij}$  определяется по максимальному значению целевой функции:  $a_{ij}^{opt} = \arg(\max(\eta\lambda(a_{ij})))$ . Значение  $a_{ij}^{opt}$  уточняется путем итеративного пересчета полностью доопределенной матрицы.

Экспериментально доказано, что функция  $\eta\lambda(a_{ij})$  дифференцируема и имеет единственный максимум в диапазоне  $(0, \infty)$ . Поэтому значение  $a_{ij}^{opt}$  определяется по

$$\text{производной } \frac{d\eta\lambda(a_{ij})}{da_{ij}} = 0.$$

Таким образом, учитывая роль максимального собственного числа матрицы в её доопределении, будем использовать его при разработке метода экспериментального доказательства правомерности подхода, предложенного в работе [3].

#### Метод экспериментального доказательства

Аналогично работе [2] в качестве эталонной матрицы берётся сверхтранзитивная матрица  $\mathbf{A}$ . Эталонная матрица строится по произвольному вектору приоритетов сущностей  $\mathbf{w}_i=(w_1, \dots, w_j, \dots, w_N)$ . Для его генерации используется равномерное распределение.

Способ «зашумления» матриц парных сравнений для моделирования ошибок экспертов отличается от принятого в работе [2] следующим. Вместо фиксированной величины ошибки эксперта  $\delta$  для всех элементов матрицы, для изменения её элементов будем использовать случайную величину  $\exp(\sigma \cdot \chi)$ , где  $\chi$  – случайная величина со стандартным нормальным распределением  $M(\chi)=0, D(\chi)=1$ , а  $\sigma^2$  – дисперсия величины  $\sigma \cdot \chi$ . Случайная величина  $\exp(\sigma \cdot \chi)$ , используется в качестве множителя элемента  $a_{ij}$  эталонной матрицы  $\mathbf{A}$  для вычисления элемента  $a_{ij}'$  зашумлённой матрицы  $\mathbf{A}'$ :

$$a_{ij}' = a_{ij} \cdot \exp(\sigma \cdot \chi_{ij}), \quad a_{ji}' = 1/a_{ij}'. \quad (2)$$

Для проведения экспериментов по анализу метода доопределения матриц зашумлённая матрица  $\mathbf{A}'$  преобразуется в частично определенную матрицу  $\mathbf{A}'_{нд}$ . С этой целью часть пар элементов матрицы  $\mathbf{A}'$  принимаются неизвестными. В матрице  $\mathbf{A}'_{нд}$  неизвестные предпочтения  $i$ -й сущности над  $j$ -й принимают значение  $-1$ :  $a_{ij}' = a_{ji}' = -1$ . Исходя из общего числа элементов треугольной матрицы  $s=N(N-1)/2$ , число неизвестных элементов  $k$  в ней может меняться от 1 до  $s-1$ . Задавая различные сочетания единиц в треугольной матрице, можно получить  $2^s - 1$  вариантов частично определённых матриц.

Поскольку число частично определённых матриц связано с размерностью исходной матрицы  $\mathbf{A}$  экспоненциальной зависимостью, для минимизации объёма эксперимента будем рассматривать только матрицы, чьи графы являются связанными. Ввиду того, что их число также быстро увеличивается (с 26703 при  $N=6$  до 1866255 при  $N=7$ ),

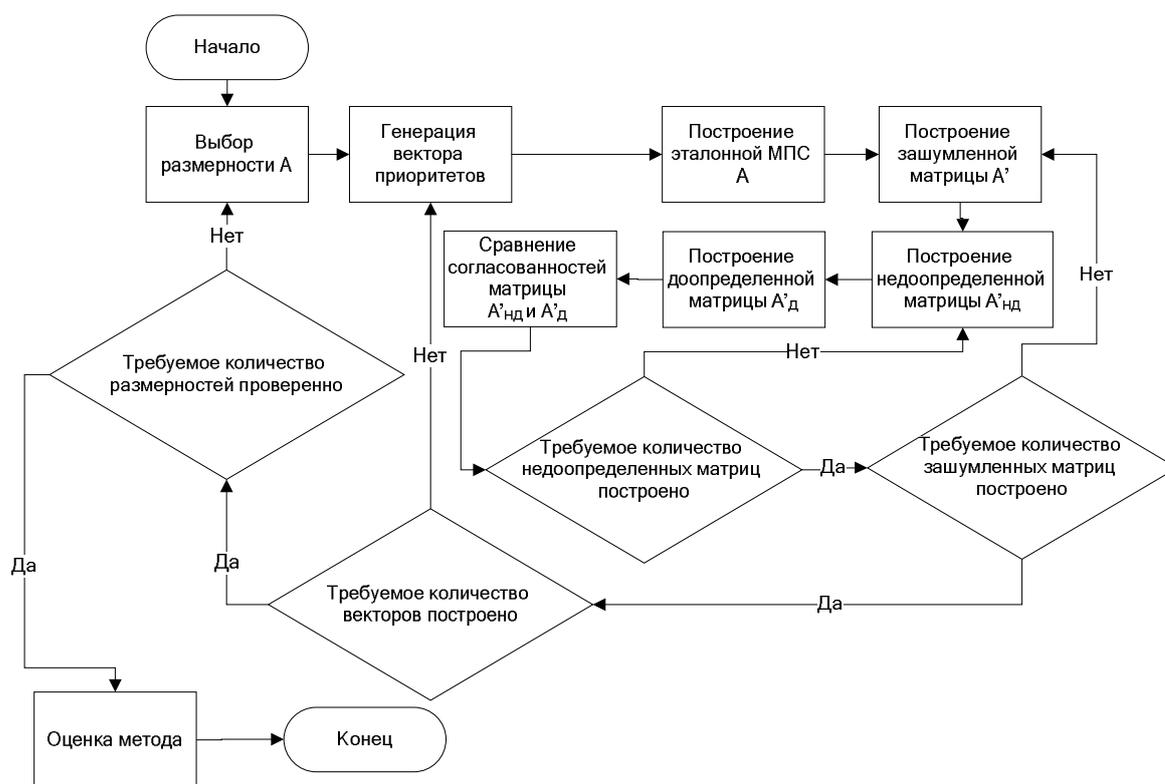
оно ограничивается временными рамками эксперимента. В качестве нижней границы размерности матрицы примем  $N=3$ .

Каждая из частично определённых матриц доопределяется с применением предложенного метода. Очевидно, что согласованность доопределенной матрицы  $A^d$  не может быть хуже, чем согласованность зашумлённой матрицы  $A'$ , из которой она получена. Следовательно, в качестве критерия правильного доопределения матрицы можно принять условие:

$$\lambda_{\max}(A^d) \leq \lambda_{\max}(A'). \quad (3)$$

### Алгоритм экспериментального исследования

Блок-схема алгоритма экспериментального исследования приведена на рисунке.



Блок-схема алгоритма

Согласно алгоритму исследование осуществляется в следующей последовательности.

1. Задаётся начальная размерность эталонной матрицы  $N=3$ .
2. Генерируется вектор приоритетов  $w_i=(w_1, \dots, w_j, \dots, w_N)$  с использованием равномерного распределения.
3. На основе вектора  $w_i$  строится сверхтранзитивная эталонная матрица  $A$ .
4. Для каждого элемента треугольной матрицы генерируется случайная ошибка предпочтения эксперта.
5. Путём включения случайных ошибок эталонная матрица  $A$  преобразуется в зашумлённую матрицу  $A'$ .
6. Назначается совокупность неопределённых элементов матрицы  $A'$ .
7. В клетки неопределённых элементов матрицы  $A'$  ставятся единицы.

8. Частично определённая матрица  $A'_{нд}$  доопределяется до матрицы  $A'_д$  исследуемым методом.

9. Сравнивается согласованность матриц  $A'$  и  $A'_д$ . Если не удовлетворяется критерий (2), то проверяемый алгоритм доопределения не верен.

10. Если реализованы не все варианты неопределённых элементов, переход к 6.

11. Если построены не все варианты зашумлённых матриц, требуемые для проведения эксперимента, изменяется параметр  $\sigma$  и переход к 4.

12. Если сгенерированы не все варианты вектора приоритетов, требуемые для проведения эксперимента, то переход к 2.

13. Если размерность эталонной матрицы  $N < N_{max}$ , то  $N := N + 1$  и переход к 2.

14. Конец.

Алгоритм экспериментального исследования был реализован в среде MATLAB.

### Результаты экспериментального исследования

Ни на одном из моделированных сочетаний пустых клеток в матрицах парных сравнений различной размерности не было нарушено условие (2), что свидетельствует о достоверности результатов доопределения частично определённых матриц с применением метода доопределения матриц кратности предпочтений, предложенного в работе [3]. Вместе с тем, гипотеза о возможности использования определителя матрицы в качестве критерия достоверности результата доопределения матрицы, высказанная в той же работе, оказалась несостоятельной.

### Литература

1. **Карпов Ю. Г.** Имитационное моделирование систем. Введение в моделирование с AnyLogic 5. СПб.: «БХВ-Петербург», 2005. 390 с.
2. **Цыганок В. В.** Определение эффективности методов агрегации экспертных оценок при использовании парных сравнений // Системы поддержки принятия решений. Теория и практика. Киев: СП «Интертехнодрук». С. 210–213.
3. **Микони С. В., Киселёв И. С.** Приближённый метод доопределения матрицы парных сравнений с кратными предпочтениями // Труды конф. IEEE AIS'07 и CAD-2007, Дивноморское, 3-09.09.2007, М.: Наука. Физматлит, 2007. Том 1. С. 330–335.