ВЕРОЯТНОСТНО-АЛГЕБРАИЧЕСКИЙ МЕТОД МОДЕЛИРОВАНИЯ СЛОЖНЫХ СИСТЕМ

Е. И. Сукач, Д. В. Ратобыльская, В. Н. Кулага (Гомель, Беларусь)

Введение

Сложная система (СС) представляет собой составной объект, включающий компоненты, которые связаны между собой некоторыми отношениями. Компоненты СС функционируют не изолированно друг от друга, а во взаимодействии, которое, как правило, носит вероятностный характер. При этом состояния одного компонента в общем случае зависят от условий, определяемых поведением других компонентов, а состояния всей СС определяются не только состояниями компонентов, но и характером взаимодействия между ними.

Исследование характеристик таких систем возможно с использованием метода имитационного моделирования, предполагающего проведение серий имитационных экспериментов (ИЭ) и последующее усреднение полученных результатов [1]. Процедура Монте-Карло, применяемая в ходе ИЭ, позволяет учесть вероятностный характер составляющих её компонентов и реализовать возможные траектории функционирования СС. При этом для получения аналитических зависимостей, описывающих изменение откликов системы в зависимости от изменения входных параметров, требуется проведение многочисленных ИЭ и использование методов регрессионного анализа. Полученные зависимости являются приближёнными.

В докладе описывается метод вероятностно-алгебраического моделирования (ВАЛМ) сложных систем, поведение которых определяется наличием функциональных связей между их компонентами, вероятностно изменяющими своё состояние во времени. ВАЛМ позволяет определить вероятностные характеристики исследуемой системы по векторам вероятностей её элементарных компонентов. К особенностям метода можно отнести: однотипное вероятностное описание компонентов системы и всей системы; рассмотрение различных операторов, определяющих отношения между компонентами системы; учёт эволюционной зависимости вероятностного изменения компонентов системы; возможность решения как прямых, так и обратных задач.

Приведённый пример демонстрирует применение метода ВАЛМ для оценки в символьном виде вероятностных характеристик сложной системы по параметрически заданным векторам вероятностей состояний её элементарных компонентов.

Формальное описание вероятностно-алгебраического метода моделирования

При ВАЛМ сложная система представляется в виде множества устройств $Y = \{Y_i\}, i = \overline{1,m}$, соответствующих ее элементарным компонентам. Устройства Y_i считаются независимыми и описываются однотипным образом – n-мерным вектором, определяющим их возможные состояния, которые задаются множеством $S = \{S_j\}, j = \overline{1,n}$. Вероятности нахождения устройств Y_i в каждом из состояний определяются векторами $P^i = (p_1^i, p_2^i, ..., p_n^i), \sum_{j=1}^{n} p_j^i = 1$.

Взаимосвязи между устройствами модели задаются операциями, определяющими композиции устройств Y_i. Будем говорить, что устройство Y_3 является композицией устройств Y_1 и Y_2, $Y_3 = Y_1 * Y_2$, если задано отображение F, однозначно определяющее состояние S_k устройства Y_3 по состояниям S_i и S_j исходных устройств Y_1 и Y_2, где $k = F(i, j)$. При этом отображение F однозначно определяет вероятности состояний результирующего устройства по вероятностям состояний исходных устройств:

$$P_k^3 = \sum_{k=F(i,j)} P_i^1 \cdot P_j^2 . \tag{1}$$

Операция (*), определённая на множестве векторов $P = \{P^i\}$, порождает алгебру A*, то есть для любых P^1 и P^2 выполняется $P^3 = P^1 * P^2$ и для операции * справедливы свойства дистрибутивности.

Алгебра задаётся структурными коэффициентами a_{ijk} такими, что

$$\forall i, j, k \quad a_{ijk} \geq 0 \text{ и } \sum_{k=1}^{n} a_{ijk} = 1 . \tag{2}$$

Будем называть такую алгебру стохастической, поскольку её представления описываются стохастическими матрицами.

При этом элементы вектора P^3 вычисляются по формуле

$$p_k^3 = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} a_{ijk}\, p_i^1 p_j^2 \text{, где } i, j, k = \overline{1, n} . \tag{3}$$

Если операция, порождающая алгебру, является детерминированной и задаётся функцией $F(i, j)$, то структурные коэффициенты алгебры определяются следующим образом:

$$\begin{cases} a_{ijk} = 1, & \textit{если} \quad k = F(i, j); \\ a_{ijk} = 0, & \textit{если} \quad k \neq F(i, j). \end{cases} \tag{4}$$

Для недетерминированной операции структурные коэффициенты алгебры являются произвольными положительными величинами, удовлетворяющими (2).

Таким образом, при вероятностно-алгебраическом моделировании исследуемая СС представляется композицией устройств Y_i; её состояние однозначно определяется состоянием устройств, участвующих в композиции, а вероятность нахождения в каждом из состояний вычисляется с учётом введённых операций.

Состав операций, задающих композицию устройств исследуемой системы, определяется с учётом особенностей решаемой задачи [2]. Метод допускает использование детерминированных и недетерминированных операций, а также бинарных и *n*-арных операций.

Детерминированные операции задаются функциями F, примерами которых могут быть следующие: $F(i, j) = \max(i, j)$ (для операции $\wedge$); $F(i, j) = \min(i, j)$ (для операции $\vee$); $F(i, j) = \min(i + j - 1, n)$ (для операции $\oplus$); $F(i, j) = |i - j|$ (для операции Θ).

При этом операции конъюнкции ($\wedge$) и дизъюнкции ($\vee$) имеют естественную интерпретацию при решении задач надёжности СС. Операция $\wedge$ описывает связь между последовательно соединёнными компонентами, а операция $\vee$ – связь между параллельно соединёнными компонентами.

Функция $F(i, j) = \max(i, j)$ задаёт операцию $\wedge$ и позволяет определить структурные коэффициенты алгебры $A\wedge$. Отказ результирующего устройства, представленного композицией устройств $Y_1 \wedge Y_2$, определяется отказом одного из них, и его состояние определяется состоянием наименее надёжного устройства. Вектор $\sigma^n = (0,0,...,1)$ (устройство находится в состоянии *n*, то есть произошёл отказ) является нулём алгебры *A*∧, так как $\sigma^n \wedge P^j = \sigma^n$ для любого P^i. Вектор $\sigma^1 = (1,0,...,0)$ (устройство находится в состоянии 1, то есть полностью исправно) является единицей алгебры *A*∧, поскольку $\sigma^1 \wedge P^j = P^j$ для любого P^i.

Функция $F(i, j) = \min(i, j)$ задаёт операцию ∨ и позволяет определить структурные коэффициенты алгебры *A*∨. В этом случае отказ результирующего устройства, представленного композицией устройств $Y_1 \vee Y_2$, происходит в результате отказа двух устройств, и его состояние определяется состоянием наиболее надёжного устройства. Для этой алгебры единицей является вектор $\sigma^n = (0,0,...,1)$, а нулём $\sigma^1 = (1,0,...,0)$.

При решении практических задач часто встречаются ситуации, когда уместно использование композиции *n* устройств, порождающей соответствующую *n*-арную алгебру. Например, в случае необходимости учёта вероятностных характеристик трех устройств формируются структурные коэффициенты алгебры a_{ijm}^k, а элементы результирующего вектора вероятностей вычисляются по формуле:

$$p_k^4 = \sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\sum_{m=1}^{n} a_{ijm}^k p_i^1 p_j^2 p_m^3 \qquad \forall i, j, l, m, k. \tag{5}$$

При этом для формирования структурных коэффициентов алгебры, в частном случае, может быть использована следующая функция: $F_{2/3}(i, j, l) = [(i + j + l - \min(i, j, l))/2]$. В этом случае результирующее устройство находится в рабочем состоянии, если работают как минимум два устройства из трёх, и его состояние определяется средним значением двух устройств с максимальными состояниями.

Процесс ВАЛМ реализуется итерационно путём проведения компьютерных аналитических расчётов на каждом шаге моделировании. Метод позволяет проводить расчёты с целью оптимизации и поиска экстремальных (критических) значений состояний системы, а также решать прямые и обратные задачи. Прямая задача заключается в получении динамически изменяющихся векторов вероятностей возможных состояний системы по векторам вероятностей состояний ее компонентов. В том случае, если исследуются условия, приводящие к возникновению определённых (критических) состояний системы, решается обратная задача.

Пример определения вероятностных характеристик сложной системы в символьном виде

Метод ВАЛМ позволяет сделать оценку вероятностных характеристик исследуемой системы в символьном виде по параметрически заданным векторам составляющих её компонентов.

В качестве примера рассмотрим систему, схема которой представлена на рис. 1. Связи между компонентами этой системы описываются тремя операциями: операцией ∨, операцией ∧ и тернарной операцией ⊗, использующей функцию $F_{2/3}$. Соответственно введённым операциям вероятностно-алгебраическая модель такой системы будет иметь вид: $\vee(\otimes(Y_1, Y_2, Y_3), \wedge(Y_4, Y_5))$.

Предположим, что устройства Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, Y_5 описываются однотипным образом и характеризуются множеством состояний $\{S_1, S_2, ..., S_{20}\}$, вероятности которых определяются соответственно векторами P^1, P^2, P^3, P^4, P^5. Значения векторов вероятностей состояний изменяются во времени и задаются в символьном виде выражением

$(1-t)\cdot P^{'}+t\cdot P^{''}$,где $P^{'},P^{''}\in R^{n}$ и $\sum_{j=1}^{20} p_j^{'}=1,\sum_{j=1}^{20} p_j^{''}=1, t\in[0,1]$. В качестве исходных векторов выражения выбираются следующие: $P'=(1,0,\ldots,0)$ и $P''=(\frac{1}{20},\frac{1}{20},\ldots,\frac{1}{20})$.

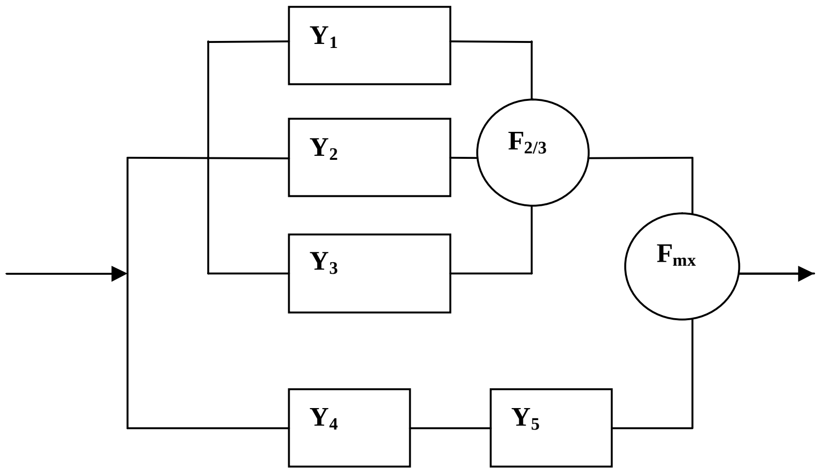

Рис. 1. Схема вероятностно-алгебраической модели сложной системы

В процессе вероятностно-алгебраического моделирования формируется параметрический вектор вероятностей состояний системы P_{sist}^{t}, характеризующий изменение состояний системы во времени.

Его математическое ожидание в полиномиальной форме имеет следующий вид:

$$M(t) = -0.1166e-5\cdot t^5 + 0.2371e-3\cdot t^4 - 0.1449e-1\cdot t^3 + 0.2205\cdot t^2 + 1.$$

На рис. 2 показаны изменения во времени среднего значения и среднего квадратичного отклонения состояния исследуемой системы. Минимальное значение среднего квадратичного отклонения -0.6755, а максимальное -4.6075.

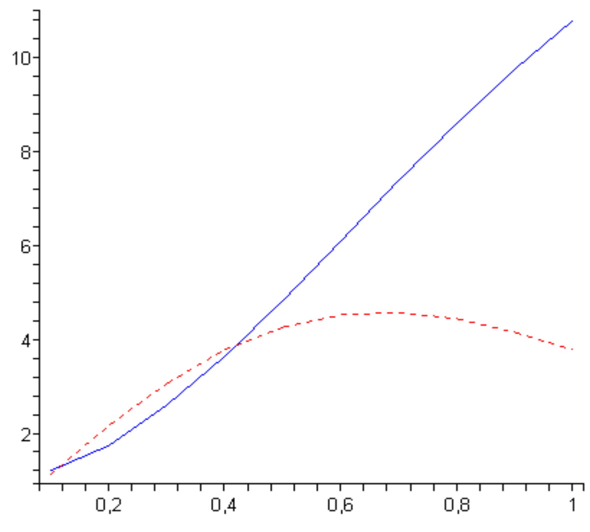

Рис. 2. Изменение во времени среднего значения *m* и среднего квадратичного отклонения σ состояния исследуемой системы

Выводы

Предложенный вероятностно-алгебраический метод моделирования оперирует вероятностными состояниями компонентов. Для композиции компонентов используются произвольные функции: детерминированные/вероятностные, бинарные/n-арные, позволяющие отразить семантику исследуемых систем. Метод имеет алгебраическую основу, позволяющую единым образом описать связи между компонентами. Практическое применение метода в различных проблемных областях позволяет оценивать изменение вероятностных характеристик системы во времени с учётом управляющих воздействий на каждом шаге моделирования.

Литература

1. **Максимей И. В.** Имитационное моделирование на ЭВМ. М.: Радио и связь, 1983. 232 с.
2. **Сукач Е. И.** Использование логического моделирования для исследования сложных систем.// Известия Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины. 2004. № 4(25). С. 60–64.