К ВОПРОСУ ОБ ОГРАНИЧЕННОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ КОМПЬЮТЕРНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ДЛЯ ЗАДАЧ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ

А. Ю. Переварюха (Санкт-Петербург)

Одной из целей имитационного моделирования является получение информации для формирования прогнозов. Однако многие модели основаны на математическом аппарате, а он имеет свои особенности и может жить отдельной жизнью от лежащих в основе модели теоретических представлений. С особенностями динамики даже довольно простых одномерных отображений связаны эффекты, приводящие к теоретической невозможности долгосрочного прогнозирования. В данной работе рассматриваются подобные проблемы, за исключением явлений связанных с образованием хаотических аттракторов, достаточно описанных во многих работах.

Сложная динамика вне хаотического аттрактора

После прохождения каскада бифуркаций удвоения [1], траектория притягивается к аттрактору, отличному от конечного объединения гладких подмногообразий фазового пространства и называемому «странным аттрактором». Однако хаос в дискретных динамических системах не является робастным, ряд нелинейных явлений связан с возможностью появления окон периодичности. Окна периодичности возникают после касательных (tangent) бифуркаций. При данной бифуркации производная n-й итерации в появляющихся новых неподвижных точках $\psi^{n}`(R^{*})=1$. Рассмотрим модель У. Рикера, предложенную в 1954 г. но и в настоящее время часто используемую для моделирования популяционных процессов [2]. Представим динамическую систему в виде итераций $R_{j+1}=aR_j\exp(-bR_j)$.

Цикл периода 3 возникает, когда у третьей итерации $\psi^3(R)$ функции Рикера при a=22,54 появляются шесть новых неподвижных точек пересечений с биссектрисой $R_n=R_{n+1}$, три из которых образуют устойчивый цикл, а три другие – неустойчивый. Три – последнее число в специальном порядке теоремы А.Н. Шарковского [3], появление такого цикла означает наличие в системе циклов других всевозможных периодов.

В отличие от бифуркации удвоения, которая изменяет только аттрактор, касательная бифуркация приводит к жесткой потери устойчивости, так как эта бифуркация изменяет не только тип аттрактора динамической системы. Меняется структура областей притяжения, и это определяет особенности поведения траектории в окне периодичности, диапазоне значений управляющего параметра Δa =ac – at. Поведение траектории при a$\in$[ac, at], вопреки распространённым упрощенным представлениям о динамике изучаемых моделей, не ограничивается устойчивыми циклическими режимами.

В момент перехода к окну периодичности области притяжения странного и регулярного аттрактора пересекаются и траектория динамической системы через промежуток хаотического движения, определяемого как переходный хаос, стремится к подмножеству фазового пространства, состоящему из циклических точек. Необходимо рассмотреть отображение $R_{n+1}=\psi^3(R_n)$ как отдельную динамическую систему. В диапазоне значений Δa существования периодического окна отображение имеет три аттрактора, и границы областей притяжения этих аттракторов становятся фрактальными согласно определению, данному в работе [4]. Подобная структура границ приводит к тому, что подмножество фазового пространства, по которому движется траектория, характеризуется дробной топологической размерностью [5].

Далее, при увеличении параметра a, каждая устойчивая точка ψ3(R) претерпевает каскад бифуркаций удвоения периода с переходом к хаосу. Однако область хаотического режима, возникшего после удвоений цикла периода 3, представляет собой три несвязные полосы в фазовом пространстве. Поведение траектории отличается тем, что траектория попадает в полосы строго периодически. Периодическое окно «закрывается» при значении параметра ас, когда три хаотические полосы объединяются в момент, совпадающий с пересечением нестабильного цикла, возникшего при касательной бифуркации и хаотических подмножеств. Когда неустойчивые неподвижные точки $\psi 3(R)$ оказываются внутри хаотических полос, размеры составного хаотического аттрактора резко увеличиваются. В областях, разделяющих хаотические полосы, сразу появляются непериодические точки траектории, и возникает единый аттрактор, существующий в таком виде до следующей касательной бифуркации, связанной уже с $\psi 4(R)$.

Таким образом, в динамике часто используемых в моделировании функциональных итераций могут наблюдаться сложные нелинейные эффекты, не учитываемые на этапе построения моделей, но критическим образом влияющие на интерпретацию результатов моделирования.

Разработка гибридных моделей

Алгоритмические динамические модели на основе аппарата дискретных отображений часто не могут удовлетворительно описывать характерные смены стадий развития рассматриваемого процесса, так как являются упрощенной и приблизительной формализацией зависимости, не учитывающей возможности возникновения условий для резких метаморфоз разнообразного происхождения.

Разработка более совершенного и детализированного типа моделей обусловлена необходимостью исследования систем с наличием важных скачкообразных изменений в развитии. Такие системы нередко встречаются в задачах моделирования технологических процессов, последствий совместного функционирования непрерывных объектов и дискретных регуляторов. Простой пример: колебательный контур, подверженный влиянию кусочно-постоянного воздействия. Подобная задача возникает при моделировании движения летательного аппарата в атмосфере и вызвана тем, что сопротивление воздуха и скорость звука зависят от высоты, поэтому необходимо предусматривать выделение диапазонов высоты, в которых действуют разные зависимости.

Применительно к природным процессам, как было показано автором ранее [6], влияние метаморфоз в раннем онтогенезе различных видов определяет итоговую форму зависимости численности взрослого поколения от условий воспроизводства.

Для моделирования сложных изменений разработана методика применения разрывных дифференциальных уравнений. При достижении особых состояний в пространстве переменных состояния могут изменяться значения параметров в правых частях, форма правой части или число уравнений. В алгоритмической модели события описываются предикатами, выделяющими из всех состояний системы событие, приводящие к изменению в характере развития процесса. Ключевой особенностью данной методики является представление времени в компьютерной среде моделирования [7].

Гибридное время в моделирующем алгоритме представляет собой пронумерованную и упорядоченную последовательность кадров, что позволяет непрерывной составляющей времени сменяться дискретными отсчетами. Программная реализация гибридного модельного времени представляется множеством последовательно расположенных отрезков, где между концом текущего интервала и началом следующего расположена «временная щель», в которой изменяются переменные состояния:

$$\varphi = \left\{ \left\{ Gap\_pre_1, [0, T_1], Gap\_post_1 \right\}_1, \ldots \left\{ Gap\_pre_n, [T_{n-1}, T_n], Gap\_post_n \right\}_n \right\}. \quad (1)$$

где *Gap_pre* – временная щель для вычисления согласованных начальных условий и проверки предиката на левом конце промежутка очередного длительного поведения; *Gap_post* – аналогичная щель для вычисления новых начальных условий на правом конце текущего промежутка φ_i ; T_i – время срабатывания перехода или точка, в которой становится истинным предикат события, приводящего к смене поведения.

В разработанной автором модели возможность определить условия выполнения изменения в правой части реализована с помощью формализма гибридного автомата в применяемой инструментальной среде AnyLogic. На основе расширения идей, изложенных при обосновании моделей Рикера и Шепарда, представим новую модель, учитывающую важные скачкообразные изменения в развитии системы, состояние которой характеризуется основной величиной N в момент времени T. Новая зависимость запаса и пополнения получим в результате численного решения системы уравнений со структурно изменяющейся правой частью:

$$\begin{cases} \dfrac{dN}{dt} = \begin{cases} -(\alpha w(t)N(t) + \theta(S)\beta\ )N(t), & 0 < t \le \tau \\ -(\alpha_1 N(\tau)/w(\tau) + \beta\ )N(t), & t > \tau, \quad w(t) < w_{k1} \\ -(\alpha_2 w(t)N(t)\ )N(t-\varsigma)\ , & w_{k1} < w(t) < w_k. \end{cases} \\ \dfrac{dw}{dt} = \dfrac{g}{N^k(t) + \zeta}\ , \end{cases} \quad (2)$$

где τ – длительность самого раннего этапа развития процесса, характеризующегося сильным негативным влиянием условий среды; w_k – интерпретируется как уровень развития системы, достижение которого изменяет характер действия некоторых включённых в модель факторов; ς – небольшое по сравнению с интервалом интегрирования $t \in [0, T]$ запаздывание; $N(0)=\lambda S$, $w(0)=w_0$, $R=N(T)$. Использование уравнения с отклоняющимся аргументом для описания динамики системы при переходе к третьей стадии развития моделируемого процесса связано с часто наблюдающимся в природных процессах явлением: состояние системы в данный момент зависит от процессов, происходивших в течение длительного интервала времени, предшествующего настоящему моменту. Например, состояние технических конструкций зависит от предшествующих деформаций, а доступность пищевых ресурсов для существующего поколения от численности предыдущих поколений популяции.

Хаос в гибридной модели

Исследование гибридной модели (2) показало, что наличие структурных изменений приводит к тому, что зависимость между основными величинами N(T)=f(S) перестает описываться унимодальной кривой. Полученная зависимость характеризуется незнакопостоянством дифференциального инварианта Шварца, так как всюду постоянный знак невозможен при наличии более одной точки перегиба, в которой выпуклость кривой сменяется вогнутостью. Возникает сложный, волнообразный вид зависимости, важной характеристикой которой является расположение графика относительно биссектрисы координатного угла. Полученная при численном решении (2) функция имеет четыре точки пересечения с биссектрисой координатного угла – геометрическим местом стационарных точек $R^*=\psi(R^*)$. Анализ устойчивости неподвижных точек динамической системы, реализованной в инструментальной среде моделирования, проводиться с использованием свойства второй итерации f 2(x). Необходимым и достаточным условием устойчивости неподвижной точки x* одномерного отображения является выполнение неравенств: f 2(x)>x при x<x* и f 2(x)<x при x>x*. Преимущества компьютерного исследования позволяют легко получать графики старших итераций f(f(…f(x)…)).

Анализ второй итерации $f^2(R)$ показал, что устойчивые и неустойчивые неподвижные точки не будут чередоваться, как в случае с третьей итерацией $\psi^3(R)$ функции Рикера в момент возникновения цикла периода 3. Три первые нетривиальные стационарные точки являются неустойчивыми, траектории покидают их окрестности.

Аттракторов у динамической системы два: четвертая особая точка R^*_4 и тривиальное равновесие (0, 0) – и соответственно две области притяжения: Ω_1 и Ω_2. Из этого следует, что моделируемая система может находиться в двух устойчивых состояниях, переход в одно из которых означает необратимую деградацию.

Более нетривиальной особенностью исследуемой модели (3) является то, что Ω_1 и Ω_2 не образуют непрерывных подпространств в фазовом пространстве. В ранее разработанной автором модели границей между областями притяжения служит единственная особая точка репеллер, но данный случай видится упрощенным представлением о свойствах моделируемой системы, математической идеализацией.

В области Ω_3, ограниченной неподвижными точками R^*_1 и R^*_3, реализуется хаос, появляются непериодические значения точек траектории, которые никогда точно не повторяются, и все приблизительные повторения имеют конечную продолжительность. Возникает хаотическое подмножество фазового пространства, не обладающее свойствами аттрактора. Число j, при которых точки траектории отображения $R_{j+1}=\psi(R_j)$, при $R_0\in\Omega_3$ находятся в хаотическом подмножестве Ω_3, то есть продолжительность переходного хаотического режима, чувствительно зависит от выбора начальных условий R_0. Тип реализующегося ограниченное время хаотического поведения определяется термином «chaotic transient» – переходный хаос [8].

В случае гладких границ при определении начальных условий траектория определенно соответствовала Ω_1 или Ω_2 и малое изменение начальных условий не приводило к выходу фазовой траектории на альтернативный аттрактор. Но области Ω_1 и Ω_2 изрезаны и имеют сложную структуру. Область притяжения аттрактора R^*_4 прерывается в Ω_3 отрезками, принадлежащими области притяжения R^*_0, и границы областей притяжения являются локально-несвязными [9], «locally disconnected basin boundaries» по существующей классификации сложных границ областей притяжения.

Траектория обязательно покидает Ω_3 по направлению к одному из двух возможных аттракторов. Наличие описанного на примере разработанной модели вида границ областей притяжения приводит к невозможности предсказывать, в непрерывную часть области притяжения какого именно из нескольких существующих аттракторов попадет фазовая траектория при некотором начальном состоянии, соответствующем Ω_3. На результат могут повлиять незначительные изменения и неточности, возникающие при применении численных методов. Следовательно, в данной модели наблюдается другой, чем в моделях с образованием хаотического аттрактора, вид чувствительной зависимости от начальных условий [10]. Описанный эффект будем определять как неопределённость относительно асимптотического состояния. Наличие подобной неопределённости становится причиной теоретической невозможности долгосрочного прогнозирования.

В настоящий момент известно несколько разновидностей непритягивающих хаотических множеств, и работы по изучению их свойств далеко не завершены [11]. Выделяют хаотические сёдла, возникающие на месте странных аттракторов, изрешеченные (riddled basins) и перемешанные (intermingled basins) области притяжения аттракторов. Отдельно выделяются «Вада границы» областей притяжения (Wada basins boundaries) – фрактальные границы, окрестность каждой точки которых содержит непустое пересечение по крайней мере с тремя областями притяжения.

Литература

1. **Feigenbaum M. J.** Universal behavior in nonlinear systems // Physica D. 1983. Vol. 7. № 1. P. 16–39.
2. **Ricker W.** Stock and recruitment // Journal Fisheries research board of Canada, 1954. Vol. 11. № 5. P. 559–623.
3. **Шарковский А. Н.** Сосуществование циклов у непрерывного преобразования прямой в себя // Украинский математический журнал. 1964. Т. 26. № 1. С. 61–71.
4. **Grebogi C., Ott E., Yorke J. A.** Fractal basin boundaries, long-lived chaotic transients and unstable-unstable pair bifurcation // Physical Review Letters. 1983. Vol. 50. № 13. P. 935–938.
5. **Farmer J., Ott E., Yorke J.** The dimension of chaotic attractors // Physica D. 1983. Vol. 7. P. 153–170.
6. **Переварюха А. Ю.** Моделирование эффекта волнообразной кривой воспроизводства популяций рыб // Экологические системы и приборы. 2008. № 8. С. 41–44.
7. **Колесов Ю. Б., Сениченков Ю. Б.** Моделирование систем. Динамические и гибридные системы. СПб.: БХВ, 2006. 224 с.
8. **Blackburn J., Gronbech N., Smith H.** Stochastic noise and chaotic transient // Physical Review Letters. 1995. Vol. 74. № 6. P. 908–911.
9. **MacDonald S., Grebogi C., Ott E., Yorke J.** Fractal basin boundaries // Physica D. 1985. Vol. 17. № 2. P. 125–153.
10. **Lorenz E. N.** Deterministic Nonperiodic Flow // Journal of the Atmospheric Sciences, 1963. Vol. 20, Iss. 2. P. 130–141.
11. **Ott E.** Chaos in dynamical systems. Cambridge: University Press, 1993. 386 p.