ИНСТРУМЕНТАЛЬНО-ОРИЕНТИРОВАННЫЙ АНАЛИЗ ЖЕСТКИХ ДИНАМИЧЕСКИХ, ГИБРИДНЫХ И РАСПРЕДЕЛЕННЫХ СИСТЕМ ЯВНЫМИ МЕТОДАМИ

А. Ж. Абденов, Ю. В. Шорников (Новосибирск)

Новые алгоритмы анализа сложных систем оказываются более эффективными для прикладного специалиста, если они окружены специализированными инструментальными средствами моделирования. При этом индустрия создания таких средств моделирования становится сама по себе фундаментальной задачей исследования [1].

Особенно актуальны вопросы анализа слабо изученных гибридных систем (ГС) в окружении специализированных инструментально ориентированных средств, так как поведение таких систем в общем случае невозможно анализировать традиционными аналитическими или численными методами. Основные элементы инструментальных оболочек – решатели, оснащенные различными методами численного интегрирования. Наиболее проблемными являются методы численного анализа жестких систем, для которых применение классических схем интегрирования ограничено степенью жесткости. Для систем с повышенной жесткостью использование классических схем неэффективно, а при существенной жесткости такие методы приводят к численной неустойчивости решения. В работе рассмотрены явные численные методы из библиотеки системы моделирования *ИСМА* [2] для анализа жестких поведений ГС.

Гибридные системы характеризуются как непрерывным, так и дискретным поведением. Непрерывное поведение системы на временном интервале $[t_0, t_k]$ характеризуется вектором состояния $x \in \Re^n$ и задаётся отображением $C: \Re^n \to \Re^n$, определяющим вектор – функцию $x(t)$, при начальных условиях $x(t_0) = x_0$.

В *ИСМА* отображение C ограничено классом систем обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) в форме Коши с запаздывающим аргументом в правой части

$$\dot{x} = f(x(t), x(t-\theta), t), \quad t > 0, \quad x(0) = x_0, \tag{1}$$

где $x \in \Re^n$ - вектор состояния; $x(t) = \varphi(t)$ при $t \in [-\theta, 0)$; t – независимая переменная; $\varphi(t)$ – l-мерная вектор-функция запаздывания, $l \le n$; $\theta = (\tau_1, \ldots, \tau_l)^T$ – вектор чистых запаздываний; f – нелинейная вектор-функция, удовлетворяющая условию Липшица; $x_0 = (x_{01}, \ldots, x_{0n})^T$ – вектор начальных условий.

Дискретное поведение гибридной системы характеризуется вектором $z \in W^r \mid W = \Re \cup \Im \cup B$, где $\Im$ – множество целых; $B = \{false, true\}$ – множество булевских величин. Поведение дискретной системы задаётся отображением $D: W^r \to \Re \times W^r$, которое определяет причинно-следственную цепочку событий $E_0 = (t_0, z_0) \to E_1 = (t_1, z_1) \to \ldots \to E_i = (t_i, z_i)$.

В общем случае глобальное поведение C гибридной системы зависит от совокупности локальных поведений $\{c_1, c_2, \ldots, c_{nc}\}$. Качественные изменения поведений непрерывной системы происходят мгновенно в некоторые дискретные моменты времени $t = t_j^*$ для всей совокупности поведений $\{c_j, j = \overline{1, n_c}\}$. Область существования поведений $\{c_j, j = \overline{1, n_c}\}$ в расширенном фазовом пространстве $(x, t) \in \Re^{n+1}$ задаётся некоторым логическим предикатом $pr_j(x, t) \in B$, который принимает значение *false* внутри области существования c_j и значение *true* – вне её.

При анализе гибридных систем целесообразнее использовать явные численные схемы по следующим причинам. В ГС (как и в обычных динамических системах) для поиска x_s неявными методами приходится прибегать к итерационным процедурам, например методу Ньютона–Рафсона с дорогостоящей вычислительной процедурой обращения матрицы Якоби. Для неявных схем необходимо знать предыдущие значения фазовых координат $x_{s-i}, i = 1,2,...$ и их производные $\dot{x}_{s-i}, i = 1,2,...$ Но в момент запуска модели и после точки разрыва при мгновенном переходе в новые локальные состояния эти значения невозможно вычислить или определить ни одним из известных методов при использовании неявных схем [3]. Кроме того, использование явных численных схем не требует дорогостоящих вычислительных процедур поиска и хранения значений обращенной матрицы Якоби. Поэтому в библиотеке системы *ИСМА* для анализа локальных поведений (не нарушая общности, в (1) будем полагать $l = 0$) используются явные численные методы типа Рунге–Кутта разного порядка точности:

$$x_{s+1} = x_s + \sum_{i=1}^{m} p_i k_i; \qquad k_i = hf(t_s + h\sum_{j=1}^{i-1}\beta_{ij}, x_s + \sum_{j=1}^{i-1}\beta_{ij}k_j), \tag{2}$$

где h – шаг интегрирования; $p_{i,}\beta_{ij}, 1 \le i \le m, 1 \le j \le i-1,$ – коэффициенты, определяющие свойства точности и устойчивости численных схем (2); $k_i, 1 \le i \le m$ – стадии метода.

Можно выделить две основные причины, которые приводят к трудностям при применении явных методов к жестким задачам. Первая вызвана противоречием между точностью и устойчивостью численной схемы на участке установления. Следствием этого является раскачивание шага интегрирования, что, как правило, заканчивается аварийной остановкой вычислений. Этого можно избежать контролем устойчивости численной схемы с помощью неравенства

$$v = \max_{1 \le i \le n} |\sum_{j=1}^{m} b'_j k_j^i| / |\sum_{j=1}^{m} b''_j k_j^i| \le d, \tag{3}$$

где постоянная d ограничивает интервал устойчивости (2), а коэффициенты b'_j и $b''_j, 1 \le j \le m,$ выбираются такими, чтобы левая часть неравенства (3) давала оценку максимального собственного числа матрицы Якоби системы (2) степенным методом [4].

Вторая причина ограниченного применения явных методов связана с тем, что области устойчивости известных численных схем слишком малы. В [4] предложен алгоритм расчета коэффициентов многочленов устойчивости методов (2), при которых они имеют расширенную область устойчивости. В систему *ИСМА* включен программный комплекс автоматического построения областей устойчивости с заданным порядком и количеством стадий методов (2) для определения d.

Дополнительное улучшение свойств устойчивости достигается за счет согласования областей устойчивости основной численной формулы (2) и промежуточных (внутренних) численных схем $x_{s,i} = x_s + \sum_{j=1}^{i-1}\beta_{ij}k_j$. Заметим, что использование методов с согласованными областями устойчивости приводит к тому, что ни одна стадия k_i формулы (2) не вычисляется в точке t_{s+1}. Это может приводить к понижению надежности расчетов при быстрых изменениях решения, характерных для переходного участка при решении жестких задач. Поэтому для контроля точности вычислений применяются два неравенства. Предварительная оценка точности осуществляется проверкой неравенства $\| \sum_{j=1}^{m} r'_j k_j \| \le \varepsilon$, а окончательное решение принимается контролем неравенства $\| \sum_{j=1}^{m} r''_j k_j + r''_{m+1} h f(t_{s+1}, x_{s+1}) \| \le \varepsilon$, где $\| \cdot \|$ – некоторая норма в $\Re^n$, ε – требуемая точность интегрирования, а постоянные r'_j и r''_j выбираются таким образом, чтобы левые части данных неравенств давали оценку ошибки схемы (2). Применение двух неравенств для контроля точности вычислений позволяет не только повысить надежность расчетов, но и увеличить быстродействие алгоритма интегрирования вследствие устранения повторных вычислений правой части.

Неравенство вида (3) можно использовать для повышения эффективности известных явных численных методов как за счет контроля устойчивости, так и за счет построения на их основе алгоритмов переменного порядка и шага. В частности, в состав библиотеки численных методов системы *ИСМА* включены известные методы Мерсона [5] и Фельберга [6], соответственно четвертого и пятого порядков точности. Для каждого метода на основе тех же самых стадий достроены численные формулы первого и второго порядков с расширенными областями устойчивости. С применением данных дополнительных численных схем построены алгоритмы интегрирования переменного порядка и шага с выбором наиболее эффективного метода на каждом шаге, исходя из критерия устойчивости. В результате быстродействие методов Мерсона и Фельберга при решении жестких задач увеличилось соответственно в 14 и 20 раз.

Предложенные явные схемы оказываются эффективными и для динамических систем с распределенными параметрами.

Разнообразие предлагаемых методов и алгоритмов идентификации систем с распределенными параметрами в значительной степени определяется типом задаваемых априори видов уравнений в частных производных или частных разностях, которые моделируют идентифицируемый процесс. Некоторая унификация может быть достигнута, если уравнения объектов с распределенными параметрами удается записать в стандартной канонической форме в пространстве состояний [7]:

$$X(t+1) = \varPhi \cdot X(t) + G \cdot u(t) + \varGamma \cdot w(t); \tag{4}$$

$$X(0) = \overline{X}_0; \tag{5}$$

$$Y(t+1) = H \cdot X(t+1) + v(t+1), \tag{6}$$

где $X(t)$ – вектор состояния; $u(t)$ – вектор входных управляющих сигналов; $w(t)$ – вектор белых гауссовских последовательностей шумов динамической системы с нулевым математическим ожиданием и ковариационной матрицей Q; $X(0)$ – вектор начального состояния с математическим ожиданием $\overline{X}_0$ и ковариационной матрицей $P(0)$; $\varPhi, G, \varGamma$ – переходные матрицы состояния, управления, шумов динамической системы соответственно; $v(t)$ – вектор белых гауссовских последовательностей шумов измерительной системы с нулевым математическим ожиданием и ковариационной матрицей R; $y(t)$ – вектор измерений; H – матрица наблюдения; t – временной параметр (или иной другой).

В этом случае применение изученных и хорошо зарекомендовавших себя методов оценки параметров сосредоточенных объектов может оказаться предпочтительным и для систем с распределенными параметрами [8]. Более того, при необходимости можно улучшить качество оценок параметров с помощью повышения информативности выхода измерительной системы. Для этого используют различные рычаги управления экспериментом [8, 9], в частности, путем планирования (синтеза) входного управляющего сигнала [9], планирования матрицы наблюдения [10], планирования моментов измерений и т. д. [10].

Итак, инструментально-ориентированные методы позволяют исследовать сложные динамические и гибридные системы в целом, что в общем случае невозможно выполнить традиционными аналитическими методами. Гибридность обуславливает использование явных численных схем, в которых не требуется применения дорогостоящей вычислительной процедуры обращения матрицы Якоби в отличие от неявных методов. Вместе с тем ограниченная область устойчивости классических явных методов не позволяет использовать их для численного решения жестких поведений ГС. Интегрированные в систему *ИСМА* модифицированные явные методы имеют расширенные области устойчивости. Конструктивно доказано, что использование критерия устойчивости вместе с традиционным критерием точности позволяет значительно повысить эффективность численного анализа непрерывных поведений ГС с повышенной жесткостью.

Объективный выбор шага интегрирования на решении с учетом точности, устойчивости и гибридности также повышает эффективность включенных в систему *ИСМА* оригинальных явных численных методов типа Рунге–Кутта.

Литература

1. **Яненко Н. Н., Карначук В. И., Коновалов А. Н.** Проблемы математической технологии//Численные методы механики сплошных сред. Новосибирск: ВЦ СОАН СССР. 1977. Т. 8, № 3. С. 129–157.
2. **Шорников Ю. В. и др.** Инструментальные средства машинного анализа. Свидетельство официальной регистрации программы для ЭВМ № 2005610126. М.: © Роспатент, 2005.
3. **Lee E. A., Zhenq H.** Operational Semantics of Hybrid Systems//Proc. of Hybrid Systems: Computational and Control (HSCC) LNCS 3414, Zurich, Swenzeland, March 9–11, 2005.
4. **Новиков Е. А.** Явные методы для жестких систем. Новосибирск: Наука. Сиб. предпр. РАН, 1997. 195 с.
5. **Merson R. H.** An operational methodsfor integrationprocesses//Proc. Symp. On Data Proc. Weapons Research Establishment. Salisbury, Australia, 1957.
6. **Fhelberg E.** Klassische Runge-Kutta-Formeln funfter und siebenter Ordnung mit Schrittweitenkontrolle//Computing. 1969. No 4. S. 93–106.
7. **Медич Дж.** Статистически оптимальные оценки и управление. М.: Энергия, 1973.
8. **Эйкхофф П.** Основы идентификации систем управления. М.: Мир, 1975.
9. **Mehra R. R.** Optimal input signals for parameter estimation in dynamic systems –Servey and new Results//IEEE Trans. Autom. Control. 1974. Vol. AC-19. Dec. P. 753–768.
10. **Горский В. Г., Адлер Ю. П., Талалай А. М.** Планирование промышленнных экспериментов. Модели динамики. М.: Металлургия, 1978.