МЕТОД УЛУЧШЕНИЯ УПРАВЛЕНИЯ В МОДЕЛИРОВАНИИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ*

Е. А. Трушкова, А. О. Блинов (Переславль-Залесский)

Динамические системы, возникающие при моделировании различных практических задач, как правило, являются довольно сложными объектами, не имеющими в общем случае полного аналитического описания. Предлагается следующая схема исследования оптимального управления такими системами:

1. Аппроксимация многомерных числовых массивов, генерируемых на практических имитационных моделях объекта, аналитическими конструкциями различной сложности и точности;
2. Поиск грубо приближенных глобальных решений на основе качественного анализа упрощенных аналитических описаний;
3. Итерационное уточнение грубых приближений на основе более полных аналитических описаний и исходного программно-числового представления модели.

Рассмотрим этапы исследования, остановившись более подробно на третьем этапе. Предполагается, что модель движения в общем случае представляет собой дискретную управляемую систему, терминальный функционал качества, ограничения на управления типа неравенств, фазовые ограничения типа неравенств (различные внутри и на правом конце заданного фиксированного промежутка времени):

$$x(t+1) = f_0\big(t, x(t), u(t)\big), \quad t \in T = \{t_I, t_I + 1, \ldots, t_F\};$$

$$x(t_I) = x_I;$$

$$u(t) \in D_u = \{u : T \setminus \{t_F\} \to R^p \,|\, u_l \le u(t) \le u_u,\ t \in T \setminus \{t_F\}\},$$

$$x_l \le x(t) \le x_u,\ t \in T \setminus \{t_F\}, \quad x_{lF} \le x(t_F) \le x_{uF},$$

$$I = F_0\big(x(t_F)\big) \to \min; \quad u_l, u_u \in R^p;\ x_I, x_l, x_u, x_{lF}, x_{uF} \in R^n,$$

причем имеется, по крайней мере, программно-алгоритмическое представление (компьютерные программы для расчета) функции $f_0\big(t, x(t), u(t)\big)$ как функции многих переменных (многомерный числовой массив).

Первый этап исследования заключается в аппроксимации многомерных числовых массивов аналитическими конструкциями вида

$$f(t, x, u) = \sum_i \gamma_i b_i(t, x, u),$$

где $\{b_i\}$ – некоторый набор базисных функций (обычно – композиции одномерных полиномов), $\{\gamma_i\}$ – соответствующий набор коэффициентов, определяемых по условному методу наименьших квадратов на сетке узлов в допустимой области переменных. Дополнительными условиями могут быть конкретные значения отдельных коэффициентов либо линейные соотношения между ними. При этом более простые аппроксимации (например, линейная аппроксимация) используются для второго этапа исследований, а более сложные и, как следствие, более точные – для третьего этапа.

На втором этапе исследования производится поиск грубо приближенных глобальных программ управления на основе качественного анализа упрощенных аналитических описаний с применением эффективных специальных методов, учитывающих вырожденность и магистральную природу решений прикладных задач. Указанные ме-

* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проекты 05-01-00260.

тоды, основанные на принципе расширения и теории вырожденных задач, состоят в поиске и исключении пассивных связей, что приводит к задаче меньшего порядка, т. е. к ее упрощению. Их реализация в классе допустимых решений исходной задачи по стандартным схемам приводит к искомым глобально-оптимальным решениям, как правило, приближенным, с оценками точности.

Третий этап включает в себя итерационное улучшение грубых приближений на основе более полных аналитических описаний и исходного программно-числового представления модели объекта. Оно основано на линейно-квадратических аппроксимациях соотношений Беллмана в среднем в окрестности текущего приближения полиномами первого порядка. Предусмотрены регуляторы, настраиваемые так, чтобы каждая итерация была наиболее эффективной. На этом этапе рассматривается полученная аналитическая аппроксимация исходной дискретной управляемой системы:

$$x(t+1) = f\big(t, x(t), u(t)\big), \quad t \in T, \quad x(t_I) = x_I,$$
$$u(t) \in D_u, \quad F_0\big(x(t_F)\big) \to \min,$$
$$x_l \le x(t) \le x_u,\ t \in T \setminus \{t_F\}, \quad x_{lF} \le x(t_F) \le x_{uF}.$$

Выполняется замена этой задачи оштрафованной, т. е. задачей без фазовых ограничений, с помощью введенных функций штрафа типа срезок:

$$x(t+1) = f\big(t, x(t), u(t)\big), \quad t \in T, \quad x(t_I) = x_I,$$
$$z(t+1) = z(t) + t_F^{-1}\delta\big(x(t)\big), \quad z(t_I) = 0,$$
$$F\big(x(t_F), z(t_F)\big) = \beta_0 F_0\big(x(t_F)\big) + \beta_1^T z(t_F) + \beta_2^T \delta_F\big(x(t)\big) \to \min,$$

где

$$\beta_0 \in R, \quad \beta_1, \beta_2 \in R^n, \quad \delta^i(x) = -\min\{0, x^i - x_l^i\} + \max\{0, x^i - x_u^i\},$$
$$\delta_F^i(x) = -\min\{0, x^i - x_{lF}^i\} + \max\{0, x^i - x_{uF}^i\}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Задача улучшения ставится следующим образом: пусть известен допустимый элемент $m^I = \big(u^I(t), x^I(t)\big)$, требуется найти допустимый элемент $m^{II} = \big(u^{II}(t), x^{II}(t)\big)$, такой, что $F\big(x^{II}(t_F), z^{II}(t_F)\big) < F\big(x^I(t_F), z^I(t_F)\big)$.

Общие конструкции локального метода улучшения управления описаны В. И. Гурманом*, где на основе принципа оптимальности Кротова элемент m^{II} ищется путем аппроксимации решения следующей задачи:

$$y(t+1) = g\big(t, y(t), v(t)\big), \quad t \in T, \quad y(t_I) = 0,$$
$$s(t+1) = s(t) + t_F^{-1}\delta\big(y(t) + x^I(t)\big) - t_F^{-1}\delta\big(x^I(t)\big), \quad s(t_I) = 0,$$
$$y^0(t+1) = y^0(t) + \frac{1}{2}v^T(t)v(t), \quad y^0(t_I) = 0,$$
$$G_\alpha\big(y^0(t_F), y(t_F), s(t_F)\big) = \alpha\, y^0(t_F) +$$
$$+ (1-\alpha)F\big(y(t_F) + x^I(t_F), s(t_F) + z^I(t_F)\big) \to \min,$$

где α – некоторое число из отрезка [0,1] (регулятор метода),
$y = x - x^I$, $s = z - z^I$, $v = u - u^I$, $g(t, y, v) = f(t, y + x^I, v + u^I) - f(t, x^I, u^I)$.

Будем искать функцию Кротова в виде

$$\varphi(t, y^0, y, s) = w(t) + \psi^0(t)y^0 + \psi^T(t)y + \gamma^T(t)s,$$

где значения $w(t), \psi^0(t), \psi(t), \gamma(t)$ находятся из следующих приближенных соотношений Кротова–Беллмана:

---

* **Гурман В. И.** Принцип расширения в задачах управления. М.: Наука. Физматлит, 1997.

$$\varphi(t_F, y^0, y, s) \approx -G_\alpha(y^0, y, s),$$

$$\varphi(t, y^0, y, s) \approx \max_v \varphi\left(t+1, y^0 + \frac{1}{2}v^T v, g(t,y,v), s + t_F^{-1}\delta(y + x^I) - t_F^{-1}\delta(x^I)\right),$$

$$t = t_F - 1, \ldots, t_I.$$

При этом управление (в форме синтеза), на котором достигается максимум, обозначим через $v(t, y)$.

Опишем одну итерацию алгоритма метода улучшения. По данному начальному приближению $m^I = \left(u^I(t), x^I(t)\right)$ выбираем весовые коэффициенты функционала $F\left(x(t_F), z(t_F)\right)$ из следующих условий:

$$\beta_0 = 1, \quad \beta = \left(\beta_1^1, \ldots, \beta_1^n, \beta_2^1, \ldots, \beta_2^n\right)^T = 0, \quad if \ J_0 = \{1, \ldots, 2n\},$$

$$\beta_0 = 0, \quad \beta^j = 0, \ j \in J_0, \quad \beta^j = \frac{P}{\left(Sh^j\right)}, \ j \in J, \quad if \ J_0 \neq \{1, \ldots, 2n\},$$

где $h = \left(z^T(t_F), \delta_F^T(t_F)\right)^T$, $J_0 = \left\{j \in \{1, \ldots, 2n\} \middle| h^j \le 0.001\right\}$, $J = \{1, \ldots, 2n\} \setminus J_0$, $P = \prod_{j \in J} h^j$,

$S = \sum_{j \in J} \frac{P}{h^j}$.

Фиксируем набор параметров метода. Разложив правые части соотношений Кротова–Беллмана при фиксированном $t \in T$ в ряд до членов первого порядка в окрестности нуля и заменив производные их разностными аналогами (шаги разностных схем – дополнительные параметры метода), получим управление

$$u^{II}(t, x) = v(t, x - x^I(t)) + u^I(t), \ t \in T \setminus \{t_F\}$$

и соответствующий элемент

$$m^{II} = \left(u^{II}(t) = u^{II}\left(t, x^{II}(t)\right), x^{II}(t)\right).$$

Если улучшение произошло, проводим следующую итерацию, выбрав в качестве начального элемента m^{II}. В противном случае берем другой набор параметров метода или останавливаем итерации.

Построенный таким образом алгоритм естественным образом ориентирован на параллельные вычисления.

Описанная схема исследования дискретных динамических систем была успешно применена к исследованию имитационной модели маневров безопасной нештатной посадки вертолета с определением границы безопасной зоны. Результаты для наиболее жесткого из рассмотренных сценариев нештатной ситуации уже после трех итераций позволили сделать вывод о повышении границы опасной зоны на 15% против начального приближения при сохранении качественного характера динамики управлений и состояния.

Заключение

Представленный подход позволяет исследовать практические имитационные модели, имеющие, по крайней мере, программно-алгоритмическое представление, теоретическими методами, развитыми в другой программно-алгоритмической среде, в то время как непосредственное их применение невозможно. Он также позволяет реализовать универсальный интерфейс взаимодействия всех трех этапов исследования между собой и с исходной имитационной моделью, а также обеспечивает возможность эффективного распараллеливания используемых алгоритмов.