

ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТЕЙ АНАЛИТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ РАСЧЕТА И
ИССЛЕДОВАНИЕ СМО ТИПА G/G/1

Нгуен Дык Тай (Санкт-Петербург)

Имитационное моделирование играет важную роль для оценки погрешностей результатов, полученных приближенными аналитическими методами. При исследовании вычислительных систем и сетей разных классов в качестве моделей функционирования широко применяются системы (СМО) и сети массового обслуживания (СеМО). В общем случае расчет СеМО выполняется на основе декомпозиции сети и сводится к расчету взаимосвязанных СМО типа G/G/1 (в символике Кендалла [1]), характеризующихся произвольным распределением промежутков времени между моментами поступления заявок и произвольным распределением времени обслуживания. Для таких СМО отсутствуют точные аналитические методы расчета характеристик обслуживания заявок, что не позволяет детально изучить свойства и закономерности, присущие протекающим в них процессам, а следовательно, построить приемлемые для инженерных целей методы расчета СеМО. Как показывают исследования, среди приближенных методов расчета СМО типа G/G/1 наиболее эффективны приближенные формулы для оценки среднего времени ожидания заявок и коэффициента вариации исходящего потока заявок, предложенные соответственно в работах [2] и [3]. В связи с этим представляет интерес задача исследования характеристик обслуживания заявок и коэффициента вариации исходящего потока в СМО типа G/G/1 при различных законах распределений интервалов между поступающими в систему заявками и времени обслуживания в системе, а также оценка погрешностей, возникающих при использовании упомянутых приближенных формул. Для решения поставленной задачи проведено множество экспериментов на разработанных имитационных моделях в среде GPSS World [4] для следующих законов распределений между поступающими в систему заявками и времени обслуживания:

- а) детерминированное;
- б) эрланговское разного порядка и, соответственно, с разными коэффициентами вариации;
- в) равномерное;
- г) экспоненциальное с ненулевыми смещениями (с коэффициентами вариации меньше 1);
- д) гиперэкспоненциальное (с коэффициентами вариации больше 1).

Аналитический метод расчета СМО G/G/1

Пусть на вход системы поступают заявки с интенсивностью λ и коэффициентом вариации интервалов между заявками α . Среднее значение и коэффициент вариации длительности обслуживания заявок соответственно b и β . Тогда среднее время ожидания и коэффициент вариации исходящего потока можно найти по формулам, приведенным в [2] и [3] соответственно:

$$\tilde{w} \approx \frac{Rb}{2(1-R)} (\alpha^2 + \beta^2) f(R, \alpha, \beta), \quad (1)$$

$$\gamma^2 \approx \alpha^2 + 2R\beta^2 - R^2(\alpha^2 + \beta^2) f(R, \alpha, \beta), \quad (2)$$

где $R = \lambda b$ – загрузка системы; $f(R, \alpha, \beta)$ – корректирующая функция от α :

$$f(R, \alpha, \beta) = \begin{cases} \exp\left\{-\frac{2(1-R)}{3R} * \frac{(1-\alpha^2)^2}{\alpha^2 + \beta^2}\right\}, & \alpha < 1; \\ \exp\left\{-(1-R) * \frac{\alpha^2 - 1}{\alpha^2 + 4\beta^2}\right\}, & \alpha \geq 1. \end{cases}$$

Выражения (1) и (2) позволяют приближенно оценить соответственно среднее время ожидания и коэффициент вариации исходящего потока с учетом двух моментов распределения интервалов между поступающими в систему заявками.

Для оценки погрешностей расчета среднего времени ожидания и коэффициента вариации исходящего потока системы СМО по формулам (1) и (2) было выполнено имитационное моделирование системы G/G/1 в среде GPSS World при различных законах распределений интервалов между заявками входного потока. Результаты многочисленных экспериментов позволили выполнить детальный анализ свойств системы G/G/1 и оценить погрешность расчета времени ожидания и коэффициента вариации исходящего потока.

Исследование характеристик системы G/G/1 с помощью имитационного моделирования

В среде GPSS World были разработаны имитационные модели и выполнены исследования следующих систем: D/G/1 (с коэффициентом вариации интервалов между поступающими заявками $\alpha=0$), $E_{25}/G/1$ ($\alpha=0,2$), $U/G/1$ ($\alpha=0,577$), $E_2/G/1$ ($\alpha=0,7$), $H_2/G/1$ ($\alpha=2$), $H_3/G/1$ ($\alpha=3$), G/D/1 (с коэффициентом вариации времени обслуживания $\beta=0$), $G/E_{25}/1$ ($\beta=0,2$), $G/M_{\beta}/1$ ($\beta=0,5$), $G/M_{\beta}/1$ ($\beta=0,8$), $G/M/1$ ($\beta=1$), $G/H_2/1$ ($\beta=2$), $G/H_3/1$ ($\beta=3$).

При проведении экспериментов нагрузка системы варьировалась путем изменения среднего интервала $a=1/\lambda$ между поступающими в систему заявками и среднего времени обслуживания b . Результаты экспериментов представлены ниже в виде графиков.

На рис. 1 показано различие между результатами (характеристиками СМО) аналитического и имитационного моделирования в относительных единицах для систем G/M/1 с различными коэффициентами вариации входного потока, рассчитанное по формуле

$$\sigma_{\omega} = \frac{|\Delta\omega|}{\omega} = \frac{|\omega_{ан} - \omega_{им}|}{\omega_{им}} \cdot 100\% ,$$

где $\omega_{ан}$ – время ожидания в системе G/M/1, рассчитанное по формуле (1); $\omega_{им}$ – время ожидания, полученное в процессе имитационного моделирования.

Длительность имитационных экспериментов выбиралась таким образом, чтобы методическая погрешность имитационного моделирования не превышала 3%. С учетом этого, представленное в процентах различие между результатами аналитического и имитационного моделирования в дальнейшем рассматривалось как погрешность приближенных формул (1) и (2).

Как видно из рис. 1, чем меньше нагрузка системы, тем большую погрешность дает формула (1). При коэффициенте вариации входного потока меньше единицы эта погрешность тем меньше, чем ближе значение коэффициента вариации к единице. В некоторых случаях относительная погрешность при малой нагрузке составляла сотни и тысячи процентов. С увеличением нагрузки системы погрешность расчета по формуле (1) уменьшается и при нагрузке более 0,8 находится в пределах 20%. Однако, когда нагрузка стремится к единице, относительная погрешность увеличивается. Это увеличение обусловлено погрешностью имитационного моделирования, поскольку в области больших нагрузок наблюдается неустойчивый характер результатов имитационного моделирования, связанный с резким изменением времени ожидания заявок даже при незначительном колебании нагрузки.

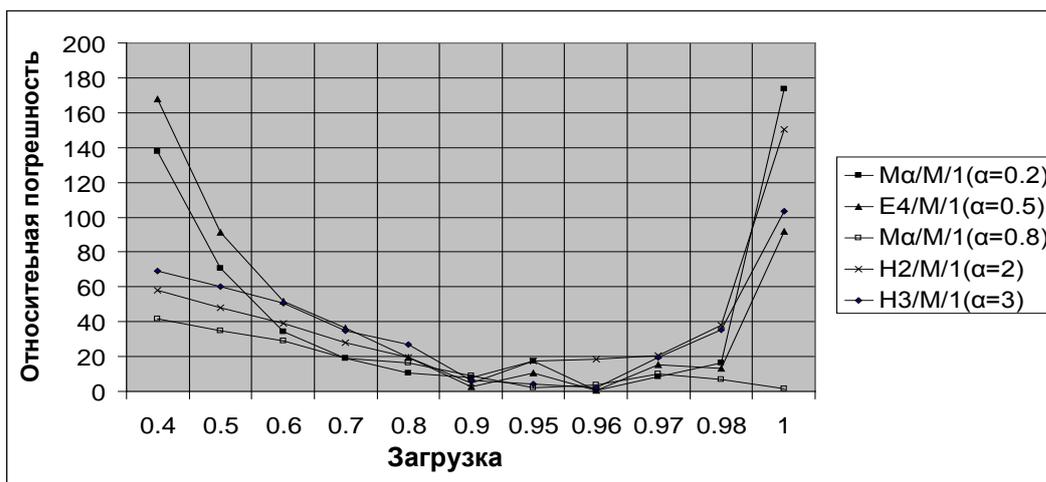


Рис. 1

Выполненные исследования позволяют сделать следующие выводы.

1. Чем меньше загрузка исследуемой системы, тем большую погрешность дает формула (1).

2. Зависимость времени ожидания от загрузки системы, полученная по формуле (1), почти всегда находится выше всех зависимостей времени ожидания, полученных на основе имитационного моделирования, т. е. можно утверждать, что формула (1) дает верхнюю границу для времени ожидания заявок в системе $G/G/1$.

3. При изменении загрузки системы за счет варьирования среднего времени обслуживания (при фиксированном среднем времени поступления) и среднего времени поступления (при фиксированном среднем времени обслуживания) эксперименты дают одинаковый результат, т. е. результаты расчета характеристик не зависят от того, за счет какого параметра изменяется загрузка.

4. Чем ближе к единице коэффициент вариации времени обслуживания, тем меньшую погрешность дает формула (1).

5. При одном и том же законе распределения промежутков времени между моментами поступления заявок увеличение коэффициента вариации времени обслуживания приводит к увеличению времени ожидания системы и к уменьшению погрешности формулы (1).

6. Для системы $U/G/1$ с равномерно распределенными интервалами между поступающими заявками изменение коэффициента вариации времени обслуживания не приводит к значительному изменению относительной погрешности формулы (1).

7. Для входного потока с коэффициентом вариации интервалов между заявками больше единицы (гиперэкспоненциальное распределение) погрешность формулы (1) тем больше, чем больше значение коэффициента вариации.

Исследование коэффициента вариации исходящего потока системы $G/G/1$

Для оценки коэффициента вариации исходящего потока системы $G/G/1$ были разработаны имитационные модели в среде GPSS World и выполнены исследования следующих систем: $D/G/1$ (с коэффициентом вариации интервалов между поступающими заявками $\alpha=0$), $E_{25}/G/1(\alpha=0,2)$, $U/G/1(\alpha=0,577)$, $E_2/G/1(\alpha=0,7)$, $H_2/G/1(\alpha=2)$, $H_3/G/1(\alpha=3)$ $G/D/1$ (с коэффициентом вариации времени обслуживания $\beta=0$), $G/E_{25}/1(\beta=0,2)$, $G/M_\beta/1(\beta=0,5)$, $G/M_\beta/1(\beta=0,8)$, $G/M/1(\beta=1)$, $G/H_2/1(\beta=2)$, $G/H_3/1(\beta=3)$.

На рис. 2 показано различие между результатами (коэффициентами вариации исходящего потока СМО) аналитического и имитационного моделирования в относи-

тельных единиц для систем G/M/1 с различными коэффициентами вариации входного потока, рассчитанное по формуле

$$\sigma_{\gamma} = \frac{|\Delta\gamma|}{\gamma} = \frac{|\gamma_{\text{ан}} - \gamma_{\text{им}}|}{\gamma_{\text{им}}} \cdot 100\% ,$$

где $\gamma_{\text{ан}}$ – коэффициент вариации исходящего потока системы G/M/1, рассчитанный по формуле (2), $\gamma_{\text{им}}$ – коэффициент вариации исходящего потока системы G/M/1, полученный в процессе имитационного моделирования.

Как видно из рис. 2, формула (2) дает максимальную погрешность (примерно 32%) при загрузке, находящейся в диапазоне (0,3...0,5) при входном потоке с коэффициентом вариации меньше 1 ($\alpha < 1$). Для систем D/M/1, E25/M/1 и M(0,2)/M/1 формула (2) дает отрицательные значения при загрузке системы в диапазоне (0...0,2). Это объясняется тем, что формула (2) «не работает» для систем, у которых значение коэффициента вариации входного потока или коэффициента вариации времени обслуживания невелико при условии малой загрузки. Для случая $\alpha < 1$ и при загрузке более 0,9 относительная погрешность находится в пределах 5%. Для случая $\alpha > 1$ формула (2) дает максимальную погрешность при загрузке в диапазоне (0,6...0,9). При этом чем больше коэффициент вариации входного потока, тем больше погрешность.

На рис. 3 показана зависимость коэффициента вариации исходящего потока от загрузки для разных систем G/M/1 с использованием имитационного моделирования.

Как видно из рис. 3, коэффициент вариации исходящего потока прямо пропорционален коэффициенту вариации входного потока и стремится к коэффициенту вариации времени обслуживания при большой загрузке системы.

Исследования позволяют сделать следующие выводы.

1. Формула (2) «не работает» при небольших значениях коэффициента вариации входного потока или коэффициента вариации времени обслуживания в случае малой загрузки системы ($< 0,2$).
2. Наибольшая относительная погрешность наблюдается при средней загрузке системы и находится в приемлемых пределах при малой и большой загрузке.
3. Формула (2) в подавляющем большинстве случаев для системы G/G/1 дает верхнюю границу для коэффициента вариации выходного потока.

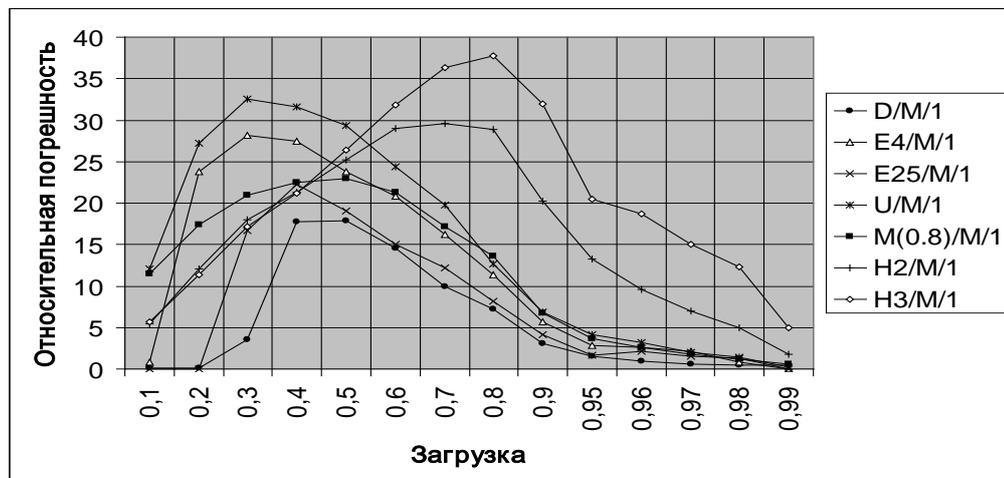


Рис. 2

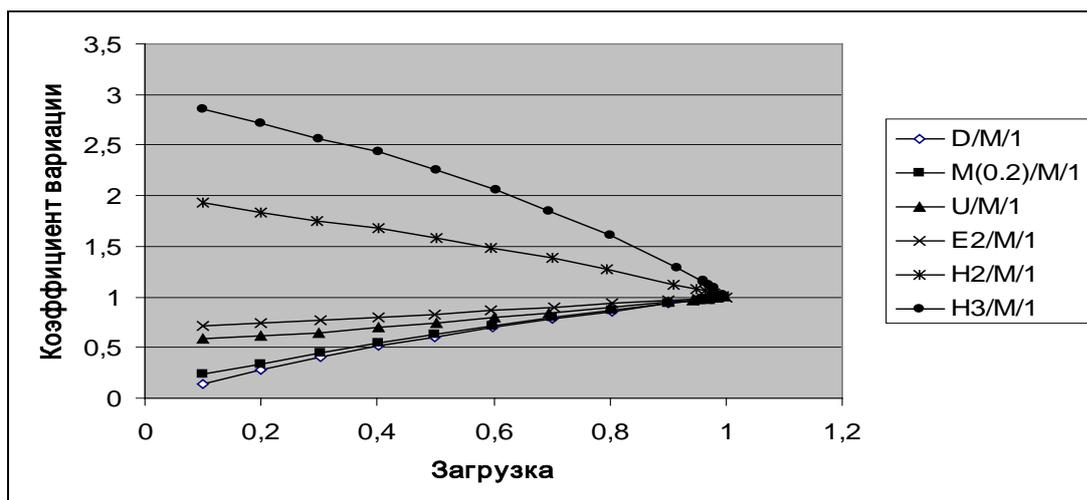


Рис. 3

Заключение

Многочисленные имитационные эксперименты позволяют сделать вывод о том, что приближенная формула (1) дает верхнюю границу среднего времени ожидания заявок в системе $G/G/1$, причем при большой загрузке системы погрешность расчета характеристик обслуживания заявок находится в пределах 20%, приемлемых для инженерных расчетов.

Формула (2) дает в большинстве случаев также верхнюю границу для коэффициента вариации исходящего потока заявок из системы $G/G/1$, причем приемлемая для инженерных расчетов погрешность результатов наблюдается при большой и малой загрузке системы. В то же время при малой загрузке системы и небольших значениях коэффициентов вариации интервалов между поступающими в систему заявками и длительности обслуживания формула (2) становится некорректной.

Литература

1. Клейнрок Л. Вычислительные системы с очередями. М.: Мир, 1979. 598 с.
2. Kramer W., Langenbach-Belz M. Approximate formulae for the delay in the queuing system $GI/G/1$ //Congressbook, 8th Intranet. Teletraffic Congress, Melbourne (1976).
3. Marshall K. T. Some inequalities in queueing//Oper. Res. 1968. Vol. 16. P. 651–655.
4. Боев В. Д. Моделирование систем. Инструментальные средства GPSS World: Учебное пособие. СПб.: БХВ-Петербург, 2004. 368 с.