ИМИТАЦИОННАЯ МОДЕЛЬ БЮДЖЕТА ДОМАШНИХ ХОЗЯЙСТВ НА ПРИМЕРЕ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ВЫБОРКИ Г. КИРОВА

Е. В. Крысова, А. В. Шатров (Киров)

Постановка задачи. Бюджет семей служит очень важной характеристикой общества, без знания которой невозможны какие-либо экономические прогнозы. Математическое моделирование спектра накоплений оказывается эффективным инструментом экономического управления и прогнозирования, позволяя предвидеть возможные последствия управленческих решений на всех уровнях власти. Ранее моделирование бюджета домашних хозяйств рассматривалось в работах Д.С. Чернавского. Мы рассматриваем модификацию модели [1] и применяем ее на реальной выборке официальной статистики Кировской области [2].

Согласно [1] динамическая модель поведения семьи задается уравнением

$$\frac{dx}{dt} = P(x) - R(x), \tag{1}$$

где x – сумма денег в семье; $P(x)$ – доходы семьи; $R(x)$ – расходы семьи.

Следуя [1], раскроем содержание правой части балансового уравнения (1). Структура расходов при этом имеет следующий вид $R(x) = R_1(x) + R_2(x) + R_3(x) + R_5(x)$, где $R_1(x) = C\dfrac{x}{x + x_0}$, – повседневные расходы: C – максимальные повседневные затраты, при которых все повседневные потребности удовлетворены ([C]=*руб./мес.*); x_0 – величина накоплений, обеспечивающая полублагополучное существование, т.е. $R_1(x_0)=C/2$.

$R_2(x) = B\dfrac{x - x_1}{(x - x_1) + (x_2 - x_1)}\theta(x, x_1),$ – «элитарные» расходы: B – максимальные расходы, при которых все элитарные потребности удовлетворены ([B]=*руб./мес.*); x_1 соответствует цене наиболее дешевого элитарного товара, x_2 - цене "среднего" элитарного товара; $\theta(x, x_1)$ - пороговая функция. В предельном случае она представляет собой ступеньку $\theta(x, x_1) = \begin{cases} 0, & если\ \ x < x_1, \\ 1, & если\ \ x \ge x_1, \end{cases}$ в модели [1] она «размазана» – $\theta(x, x_1) = \dfrac{x^8}{x^8 + x_1^8}$.

$R_3 = A_1 x$ – расходы на вложение средств в рискованные предприятия, где A_1 – коэффициент, отражающий склонность данной семьи к риску.

$R_4 = D\theta(x, x_3),$ – расходы на поддержание производства и расширенное воспроизводство: также имеют пороговый характер, где x_3 – характерные для крупных предпринимателей накопления. Ясно, что пороговые значения удовлетворяют неравенствам: $x_0<x_1<x_2<x_3$.

$R_5 = \Phi(P_1 + P_2 - R_3 - R_4),$ – расходы на уплату налогов, где $\Phi(z)$ – налогообложение со всех доходов за вычетом налогов на поддержание бизнеса и расширенное воспроизводство, а также рисковых расходов. Функция $\Phi(z)$ имеет вид $\Phi(z) = k\overline{z}\theta(\overline{z}, C),$ k – коэффициент предельного налогообложения; $\overline{z}$ – среднее значение случайной величины z.

Доходы домохозяйства также имеют свою структуру $P(x) = P_1(x) + P_2(x)$:

P_1 – твердые, постоянные доходы, т.е. заработная плата. Размерность [P_1]=*руб./мес.*

P_2 – рискованные доходы: представляют собой результат вложений, описанных R_3 и выражены формулой:

$$P_2 = A_2 x(1 + a_1\xi(t)),$$

где $A_2 x$ – среднее значение рискованных доходов ($A_2 x > A_1 x$); $\xi(t)$– случайная функция, принимающая значения от –1 до +1; a_1 – амплитуда шума (внутреннего); $a_1\xi(t)$ отражает рискованный (случайный, вероятностный) характер доходов.

Таким образом, динамическое уравнение типологии семейных накоплений имеет вид:

$$\frac{dx}{dt} = (1 - k\theta(\tilde{P}, C))\tilde{P} - C\frac{x}{x + x_0} - B\frac{x - x_1}{(x - x_1) + (x_2 - x_1)}\theta(x, x_1) + A_2 a_1 x\xi(t) + g\zeta(t),$$
$$\tilde{P} = P_1 + (A_2 - A_1)x - D\theta(x, x_3), \qquad (2)$$

где $\xi(t)$ и $\zeta(t)$ – случайные функции, имитирующие флуктуации. Предполагается, что $\xi(t)$ и $\zeta(t)$ – "белые" шумы; g – амплитуда внешнего шума $\zeta(t)$. После введения масштаба накоплений x_0 уравнение (2) удобно представить в безразмерной форме, где $x^*=x/x_0$. Тогда $x^*=1$ соответствует накоплениям, обеспечивающим полублагополучное существование. Доходы при этом измеряются величиной C, которая соответствует доходам, покрывающим только повседневные нужды. За единицу времени принимается величина $t_0=x_0/C$, и вводится безразмерное время $t^*=t/t_0$: время t_0 характерно для оборота денег в семье. В безразмерной форме, где для упрощения обозначений опущены верхние индексы безразмерности и сохранены за коэффициентами их старые обозначения, (2) имеет вид:

$$\frac{dx}{dt} = (1 - k\theta(\tilde{P}, 1))\tilde{P} - \frac{x}{x+1} - B\frac{x - x_1}{(x - x_1) + (x_2 - x_1)}\theta(x, x_1) + Aax\xi(t) + g\zeta(t),$$

$$\tilde{P} = P + Ax - D\theta(x, x_3). \qquad (3)$$

Уравнение (3) служит примером динамической системы в шумовом поле. Его можно представить также в форме:

$$\frac{dx}{dt} = F(x) + G(x,\xi,\zeta) = -\frac{dU}{dx} + G(x,\xi,\zeta), \qquad (4)$$

$$F(x) = (1 - k\theta(\tilde{P}, 1))\tilde{P} - \frac{x}{x+1} - B\frac{x - x_1}{(x - x_1) + (x_2 - x_1)}\theta(x, x_1);$$

$$G(x,\xi,\zeta) = Aax\xi(t) + g\zeta(t).$$

Функция $F(x)$ содержит динамическую часть уравнения (4) и может быть записана:

$$F(x) = -\frac{dU}{dx},\ U(x) = -\int_0^x F(y)dy. \qquad (5)$$

Величина $U(x)$ называется потенциальной функцией. Уравнение (4) описывает динамическую систему в присутствии шума – аддитивного (член $g\zeta(t)$) и мультипликативного ($Aax\xi(t)$). Это значит, что амплитуда шума в разных областях x различна:

мала при малых *x* и велика при больших *x*. Основную роль величина шума играет в точках минимума потенциала.

В отсутствие шума (при $G(x,\xi,\zeta)=0$) стационарные решения уравнения (4) отвечают точкам *x*, в которых *F(x)*=0, или, что то же, потенциальная функция имеет экстремум. Стационарные состояния, соответствующие минимумам потенциала *U(x)*, устойчивы, а отвечающие его максимумам – неустойчивы.

Уравнение (4) определяет эволюцию денег в семье. Однако интерес представляет и функция их распределения $\rho(x,t)$, которая подчиняется уравнению Фоккера – Планка:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\rho\right)+\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\rho, \tag{6}$$

где $\sigma = Aax + g$, что вытекает из уравнения Ланжевена (4).

Стационарное распределение $\rho(x)$ является решением уравнения (20) при условии $\partial\rho/\partial t=0$. Это решение задается выражением:

$$\rho(x)=N\exp(-2U(x)/\sigma^2), \tag{7}$$

где параметр σ равен амплитуде шума *G*; *N* – нормировочный коэффициент, определяемый из условия: $N\int\rho(x)dx=1.$ [1]

Реализация модели Чернавского с исходными данными о структуре доходов и расходов выборочной совокупности городских домохозяйств Кировской области (450 семей) в период 2001-2003 гг. [2] показала, что стационарные уровни накоплений были получены только для бедных и малообеспеченных домохозяйств. Для обеспеченных и богатых семей даже при минимальной склонности к риску накопления выходили на бесконечность (минимум потенциала отсутствует).

Описание модифицированной модели. В первую очередь, меняется структура расходов.

1) Повседневные расходы, обеспечивающие благополучие семьи: представляют собой затраты на товары, не являющиеся предметами первой необходимости, сюда же относятся расходы на элитарные товары $R_2(x)=Bx\theta(x,x_1)$, где *B* – предельная, максимально допустимая доля R_2 в общем объеме накоплений. Асимптота *Bx*, линейно зависящая от накоплений, отражает тот факт, что готовность к повышению благополучия семьи определяется размером имеющихся у нее накоплений. Если в исходной модели Чернавского максимальный уровень R_2 задавался абсолютной константой, то в нашем случае константа становится относительной; $\theta(x,x_1)$– логистическая кривая, определяющая возможность осуществления R_2:

$$\theta(x,x_1)=\frac{x^S}{x^S+x_1^S},$$

где параметр *s* определяет кривизну графика функции θ. При $s\to\infty$ функция становится пороговой, при *s*=8 (как принято у Чернавского) она близка к таковой; x_1 – примерный уровень накоплений, при котором семья может позволить себе осуществление R_2. При этом $R_2(x_1)=Bx/2$.

2) Рисковые расходы включают в себя расходы на предпринимательскую деятельность, вложения в ценные бумаги и т.д. Другими словами, это все виды расходов,

доход от которых нестабилен: $R_3(x) = Ax\theta(x, x_2)$, где A – склонность к риску, Ax – асимптота; x_2 – минимальный уровень накоплений для возможного осуществления R_3.

В структуре доходов модифицируются рисковые доходы, которые являются непосредственным результатом рисковых вложений: $P_2 = R_3(1+i)(1+a\xi(t))$, где i – средняя доходность вложений (месячная); a – амплитуда внутреннего шума, определяющая меру колеблемости (риска) рисковых доходов; $\xi(t)$ – случайная величина (белый шум), распределенная по нормальному закону. При этом ее среднее значение равно 0, а дисперсия равна 1. Компонента $g\zeta(t)$, определяющая в исходной модели величину внешнего шума, остается без изменений.

Таким образом, основное отличие модифицированной модели от исходной состоит в отказе от идеи насыщаемости потребностей, что позволяет сбалансировать растущие накопления с соответственно растущими расходами и миновать ситуацию "бесконечных" накоплений.

Реализация модифицированной модели. По аналогии с [1] в качестве нормировочных коэффициентов приняты x_0=2021 руб. и t_0=1 мес. При этом C = 2021 руб./мес.

По статистическим данным 2003 г.[2,3] получено следующее распределение домохозяйств: 1) бедные (их доход менее 1 прожиточного минимума (ПМ)): средняя величина заработной платы 0,72, такие семьи составляют 2% от всей выборки; 2) малообеспеченные (доход в пределах 1-2 ПМ): 1,56 и 17% соответственно; 3) обеспеченные (доход в пределах 2-5 ПМ): 3,35 и 58% соответственно; 4) богатые (доход в пределах 5-20 ПМ): 7,24 и 23% соответственно. Именно эти 4 кластера рассмотрены в модели.

Параметр B задается равным 0,1:10% от имеющихся накоплений люди готовы отдать на повышение собственного благополучия. Величина x_1 составляет 10 ПМ, т.е. x_1=10*2021=20210 руб.

Коэффициент A принят равным 0,03: тремя процентами от имеющихся накоплений люди готовы рискнуть. Моделирование показало, что величина A существенно не меняет общую картину распределения денег в обществе, поэтому рассматривать A как распределенный параметр нецелесообразно. Величина x_2=40: при накоплениях порядка 80 тыс. руб. население начинает осуществлять крупные рисковые вложения.

Коэффициент предельного налогообложения k положен равным 0,35. Средняя доходность вложений определена как i=0,03. Амплитуды шумов составляют g=2 и a=0,5.

В целом, стационарные уровни накоплений, полученные при реализации модифицированной модели, более соответствуют действительности. Это позволяет констатировать, что модификация балансовой модели привела к желаемому эффекту – рост доходов и, соответственно, рост накоплений (даже при высоком уровне риска) сбалансирован соответствующим ростом расходов. Это в предельном случае не позволяет накоплениям выйти на бесконечность. В частности, для представителей бедных семей характерен стационарный уровень в 2,4 ПМ. При этом более "богатая" половина представителей группы обладает 72% всей денежной массы в кластере, а на долю более "бедной" половины остается лишь 28%. Таким образом, большая часть денежной массы сосредоточена в руках небольшой части людей, основная же доля семей распределяет между собой довольно небольшую сумму.

Задавая доли каждого кластера в общей выборочной совокупности домохозяйств, получили график функции суммарного стационарного распределения семей по накоплениям, согласно которому, стационарное распределение имеет два максимума: при $x \approx 13$ и $x \approx 37$. *Бимодальность* функции говорит о расслоении общества на две группы: первую составляют бедные, малообеспеченные и обеспеченные люди (опять же, по классификации Госкомстата) со стационарными накоплениями в 13 ПМ. Это 82% от всех представителей выборки, которые распределяют между собой 60% всей денежной массы. Вторую группу, соответственно, составляют богатые люди с накоплениями в 37 ПМ– это 18% от выборки, которые владеют 40% всех денег.

Выводы

Суммарные накопления 10% самых бедных и 10% самых богатых семей отличаются примерно в 12 раз – этот показатель вполне соответствует общероссийским данным, согласно которым децильный коэффициент равен 14. Подобный разрыв является следствием отсутствия среднего класса и свидетельствует о наличии в обществе социальной напряженности. По данным ЮНЕСКО, когда диспропорция в доходах достигает 15, это грозит социальными катаклизмами. Разумеется, отсутствие в обществе среднего класса обостряет социальную напряженность, и в идеале следует стремиться к *унимодальности* распределения, характерной для развитых стран. При этом существующее расслоение нельзя сводить исключительно к несправедливости распределения национального дохода – немаловажно, что наша сегодняшняя экономика по большому счету имеет сырьевую направленность, практически отсутствует поддержка малого предпринимательства со стороны государства. Таким образом, целью государственной политики в конечном счете должны стать качественные структурные изменения экономики в целом – в частности, создание такой системы распределения национального дохода, которая позволила бы снизить общественное расслоение и привести распределение семей по накоплениям к унимодальному состоянию. Сохранение и усиление бимодальности грозит возможными социальными конфликтами, что необходимо учитывать при анализе социальных процессов: последствий изменений в ценообразовании, налоговых ставок, инвестиционной политики банков и т.д. В этом случае особо важна диагностика структурных изменений в обществе и выработка своевременных управленческих решений, способствующих стабилизации в социальной сфере.

Литература

1. **Чернавский Д.С.** Математическая модель типологии семейных накоплений// Экономика и математические методы. – 1994. – Т. 30, – Вып. 2. – С. 98–106.
2. Кировская область: Ежегодный статистический сборник. – Киров: изд. Кировского областного комитета государственной статистики, 2004. – 120 с.
3. Материалы сайта http://www.kks.ru