

**ОБ ОЦЕНКЕ МЕТОДИЧЕСКИХ ПОГРЕШНОСТЕЙ КОМПОЗИТНЫХ
СИСТЕМО-ДИНАМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ****В. В. Быстров (Апатиты)**

Для моделирования сложных природно-технических и социально-технических систем широко используется метод системной динамики. Популярность названного направления моделирования объясняется наличием доступной и достаточно удобной в использовании инструментальной среды Powersim. В последнее время было создано большое количество работ, посвященных моделированию различных аспектов жизнедеятельности человека, реализованных в указанной среде. Однако до сих пор остается открытой проблема систематической верификации такого рода моделей, что существенно сужает область их применения.

Следует особо подчеркнуть, что наряду с собственно разработкой математической модели для преследуемых разработчиком целей компьютерного моделирования одной из основополагающих задач остается объективная оценка ее точности, которая, по существу, и определяет тривиальную пригодность разработанной модели в тех или иных условиях. Точнее, разработка любой компьютерной модели подразумевает обязательное проведение специальных исследований, направленных на выявление основных источников погрешностей и тщательный учет различного рода присущих ей ошибок, включая как инструментальные, так и методические. Тем не менее подавляющее большинство известных нам описаний математических моделей системной динамики сопровождается лишь предположениями об их адекватности объекту моделирования, которая обычно доказывается качественным сравнением некоторых выходных (расчетных) данных модели с отдельными имеющимися в распоряжении разработчика представлениями о поведении моделируемого объекта.

В настоящем докладе представлены результаты исследований оценки погрешностей потокового класса системно-динамических моделей, позволившие разработать методику для оценки методических погрешностей рекуррентных моделей. Предлагаемая методика основывается на возможности использовать рекуррентные соотношения в качестве точных математических моделей указанного выше класса моделируемых объектов, что хорошо согласуется с возможностями инструментальной среды Powersim (точнее, с ее вычислительной схемой).

Ошибки компьютерного моделирования, которые будут рассмотрены далее, по своей природе являются ошибками аппроксимации и, естественно, на этапе создания соответствующих моделей их разумно отнести к методическим ошибкам. В качестве основного подхода к их количественной оценке будем использовать метод эталонной модели в следующей модификации, непосредственно ориентированной на имитационное моделирование в среде Powersim.

Далее предполагаем, что:

а) исследуемая динамическая модель M представляет собой точно известную и однозначно определенную композицию относительно самостоятельных подмоделей

$$M = c K \{ M_i \mid i \in I \};$$

б) для каждой названной в пункте а) подмодели M_i известна эталонная линейная рекуррентная модель $\langle M_i ; \Delta T_i \rangle, i \in I$;

в) единственными источниками ошибок исследуемой композиционной модели являются:

1) отклонение общесистемного времени ΔT от элементарных циклов ΔT_i подмоделей;

2) отклонение от используемого метода интегрирования.

Дополнительным существенным предположением для развитого ниже подхода является предположение о **гладкости номинальной характеристической функции ошибок** в пределах реальной полосы погрешностей каждой из используемых подмоделей $M_i, i \in I$. На практике названное предположение (постулат) позволяет реальные кривые ошибок подмоделей в пределах зоны (полосы) погрешностей заменить сглаженной (другими словами, должным образом отфильтрованной) кривой.

Отдельно также следует отметить, что оговоренные в пункте с) причины погрешностей оказываются аддитивными. Указанное обстоятельство позволяет вместо совокупности эталонных моделей $\langle M_i ; \Delta T_i \rangle, i \in I$ для каждого метода интегрирования просто рассматривать соответствующие совокупные номинальные функции ошибок (СНФО).

В рассматриваемой методике оценки методической погрешности рекуррентных системно-динамических моделей для построения СНФО использовались линейная, параболическая и кубическая аппроксимация функций. Для каждого вида аппроксимации доказаны оптимизационные теоремы, на основе которых строится анализ методических ошибок, что позволило осуществить и обосновать правильность выбора оптимального шага интегрирования для отдельных композитных системно-динамических моделей. Формулировки основных теорем приведены ниже. При доказательстве теорем были использованы отдельные результаты и методы теории решения экстремальных задач.

Системное время считается действительной величиной из интервала $(0,1]$, что достигается простой нормировкой величин элементарных циклов подмоделей, т. е.

масштабированием с коэффициентом $\frac{1}{\max_{i \in I} \Delta T_i}$ множества $\{ \Delta T_i \mid i \in I \}$ характеристиче-

ских циклов подмоделей. Более того, для простоты изложения далее также считается $i = \overline{1,2}$, что позволит нам избежать необходимости скрупулезного учета точек “инверсии” для кривых ошибок подмоделей на множестве значений приведенных циклов. Та-

ким образом, для определенности считаем $\frac{1}{\max_{i \in I} \Delta T_i} * \min_{i \in I} \Delta T_i = a \leq b = 1$ – нормирован-

ные циклы подмоделей с соответствующими функциями ошибок $f_1(t)$ и $f_2(t)$.

Теорема 1. Если СНФО $f_i(t), i = \overline{1,2}$ элементов декомпозиции $\{M_1; M_2\}$ динамической модели M в среде Powersim линейны относительно t , то оптимальное значение ΔT^* системного времени, минимизирующее ошибку аппроксимации M , совпадает с одной из границ интервала $[a,b]$.

Теорема 2. Парная композиция рекуррентных динамических моделей в среде Powersim, обладающих однотипными СНФО вида

$$\begin{cases} f_1(t) = k_1(t-a)^2; \\ f_2(t) = k_2(t-b)^2, \end{cases}$$

достигает наименьшей ошибки аппроксимации при $\Delta T = \frac{k_1 a + k_2 b}{k_1 + k_2}$.

Теорема 3. Множество оптимальных значений системного времени парной композиции рекуррентных динамических моделей в среде Powersim, обладающих однотипными СНФО вида

$$\begin{cases} f_1(t) = k_1(t-a)^3; \\ f_2(t) = k_2(b-t)^3, \end{cases}$$

непусто и содержит по крайней мере одну точку множества

$$\left\{ \frac{k_1 a - k_2 b + (b-a)\sqrt{k_1 k_2}}{k_1 - k_2}; \frac{(k_1 a - k_2 b) - (b-a)\sqrt{k_1 k_2}}{k_1 - k_2} \right\}.$$

Теоремы 2 и 3 позволяют сравнительно легко распространить полученные результаты на множественные композиции рекуррентных подмоделей, обладающих линейными СНФО. В основу формирования композитной функции ошибок может быть положен прозрачный для понимания метод дифференциации ветвей СНФО промежуточных моделей.

Основанная на приведенных выше теоремах методика оценки методической погрешности системно-динамических моделей была проверена на динамической модели формирования отраслевого банка статей Кольской энциклопедии. Для применения методики в соответствии с методом эталонной модели в данной модели были выделены две относительно не зависящие друг от друга рекуррентные подмодели формирования банков крупных и малых статей. Для каждой подмодели были заданы эталонные модели. Делалось это посредством выбора эталонных значений шага и метода интегрирования. Все погрешности рассчитывались для конкретных уровней относительно эталонной модели на различных временных интервалах. На основе экспериментальных и расчетных данных строились реальные и аппроксимированные функции ошибок (СНФО) (рис. 1).

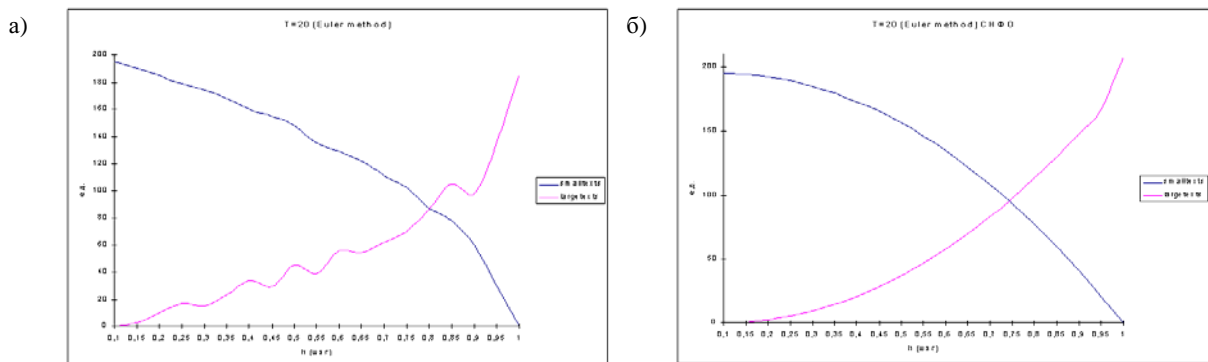


Рис. 1. Графики реальной (а) и квадратично аппроксимированной (б) функции ошибок

Подводя итог, отметим, что в настоящем докладе представлена попытка формализации анализа методических погрешностей потоковых моделей, основанная на математическом аппарате и методах теории решения экстремальных задач. В ходе работы были доказаны три оптимизационные теоремы, на основе которых строится анализ методических ошибок, что позволило осуществить и обосновать правильность выбора оптимального шага интегрирования для композитных динамических моделей. Также была разработана методика оценки методических погрешностей системно-динамических моделей. Данная методика позволяет объективно оценивать точность моделей, реализованных в инструментальной среде Powersim и относящихся к классу композитных рекуррентных моделей, т. е. модели состоят из конечного числа относительно не зависящих друг от друга рекуррентных подмоделей. Более того, на основании доказанных теорем можно осуществлять обоснованный выбор оптимального шага интегрирования для композитной модели в целом, который минимизирует ее методическую ошибку.