СТОХАСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ КАЧЕСТВА ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ. ВОЗМОЖНОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ ПАКЕТОВ MVS И ANYLOGIC

А. В. Зорин (Санкт-Петербург)

В практике использования систем имитационного моделирования выделяется область задач, связанная с определением стохастических характеристик модели. При случайных входных воздействиях поведение модели определяется регрессионными зависимостями. Во время проведения имитационного эксперимента выясняется реакция системы на различные воздействия. При этом на основе серии экспериментов происходит анализ вероятностных свойств системы.

Имитационное моделирование систем производится, как правило, в тех случаях, когда проведение экспериментов на реальной системе сопряжено с дополнительной сложностью или возможной опасностью. В таких ситуациях изучение поведения проводится на основе модельных экспериментов, в ходе которых на вход системы поступает набор произвольных данных. В рассматриваемых дискретных системах это, как правило, случайные данные. Изучение реакции системы как некоторого слчайного процесса основано на последовательной выборке значений из совокупности выходных переменных.

Результатом обработки выходных данных являются оценки математического ожидания, центральных моментов высших порядков и оценки корреляцонных моментов. В общем случае такой анализ данных дискретной системы представляет собой нетривиальную задачу, которая значительно усложняется при увеличении размерности вектора входных воздействий.

Предлагаемое решение использует аппроксимацию исходной системы полиномиальными функциями при формировании модели. Этот прием значительно упрощает обработку данных и позволяет произвести замену сложных операций сравнительно легкими процедурами интегрирования дифференциальных матричных уравнений. Так, вычисление оценок математических ожиданий вектора выходных случайных переменных элементарно производится при решении соответствующей задачи Коши. Рассмотрим получение оценки дисперсии, которое более важно, так как позволяет сделать вывод о важнейших характеристиках дискретной нестационарной системы. К ним относятся такие свойства, как точность, время сходимости решения, поведение выходной переменной и другие. Модель такой нестационарной системы записывается в виде:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Fx} + \mathbf{Gw},\ \mathbf{z} = \mathbf{Hx} + \mathbf{v},\ \mathbf{y} = \mathbf{H}_0\mathbf{x}, \qquad (1)$$

где $\mathbf{x}$ – n-мерный вектор состояния; $\mathbf{w}$ – r-мерный вектор входных белых шумов, имеющий матрицу интенсивности $\mathbf{Q}$; $\mathbf{y}$ – m-мерный вектор погрешностей выходных параметров системы обработки; $\mathbf{F}$,$\mathbf{G}$,$\mathbf{H}$ – матрицы размерностей $(n \times n)$, $(r \times r)$, $(m \times m)$, v – m-мерный вектор шумов измерения с интенсивностью $\mathbf{R}$; $\mathbf{z}$ – m-мерный вектор измерений на входе ФКТ ; $\mathbf{K}$ – матрица коэффициентов усиления произвольной структуры (размерности $(n \times m)$). Матрицы $\mathbf{Q}$ и $\mathbf{R}$ описываются следующими соотношениями:

$$M[\mathbf{w}(t)\mathbf{w}^T(\tau)] = \mathbf{Q}\,\delta(t-\tau);\ M[\mathbf{v}(t)\mathbf{v}^T(\tau)] = \mathbf{R}\,\delta(t-\tau), \qquad (2)$$

где δ – дельта-функция Дирака, M – символ математического ожидания.

Для определения всех необходимых условий при построении модели необходимо задать математические ожидания входных воздействий и возмущений и ковариационную матрицу P(0) начального состояния системы. Положим, что вектор u – определен, а математические ожидания шумов w и v – нулевые. Ковариационная матрица для вторых центральных моментов вектора x по определению равна:

$$\mathbf{P}(t) = M[\mathbf{x}_c(t)\,\mathbf{x}_c^T(t)] = \mathrm{cov}[\mathbf{x}(t)];\quad \mathbf{x}_c(t) = \mathbf{x}(t) - \mathbf{m}_x(t), \tag{3}$$

где $\mathbf{m}_x(t)$ – математическое ожидание вектора $\mathbf{x}(t)$.

В матричной форме дифференциальное уравнение для отдельных составляющих вектора состояния имеет вид:

$$\dot{x} = \mathbf{Fx} + \mathbf{Gw}, \tag{4}$$

с начальным условием $\mathbf{x}_c(0) = \mathbf{x}(0) - \mathbf{m}_x(0)$. Решением его будет:

$$\mathbf{P}(t) = \Phi(t)\mathbf{P}(0)\Phi^{\mathrm{T}}(t) + \int_0^t \Phi(t-\tau)\,\mathbf{GQG}^T\,\Phi^T(t-\tau)d\tau, \tag{5}$$

где $\Phi(t)$ – фундаментальная матрица.

Дифференцируя полученное решение, имеем матричное дифференциальное уравнение для ковариационной матрицы:

$$\dot{\mathbf{P}}(t) = \mathbf{FP}(t) + \mathbf{P}(t)\,\mathbf{F}^T + \mathbf{GQG}^T;\ \ \mathbf{P}(0) = \mathrm{cov}[\mathbf{x}(0)];\ \mathbf{P}_y(t) = \mathbf{H_1P}(t)\mathbf{H_1}^T. \tag{6}$$

Таким матричным ковариационным уравнением (уравнение Ляпунова) описывается динамика изменений дисперсий и корреляционных моментов. Перечисленные уравнения (1) – (5) позволяют проводить анализ изменения средних значений и дисперсий для вектора состояний системы (1). Рассматривая начальный вектор состояний системы (1), имеющий размерность n ясно, что матрица $\mathbf{P}(t)$ содержит n^2 элементов. В то же время из-за симметричности ковариационной матрицы соответствующая системе (5) форма Коши имеет только $n(n + 1)/2$ уравнений. На рис. 1 приведен характерный вид изменения дисперсии выходной переменной.

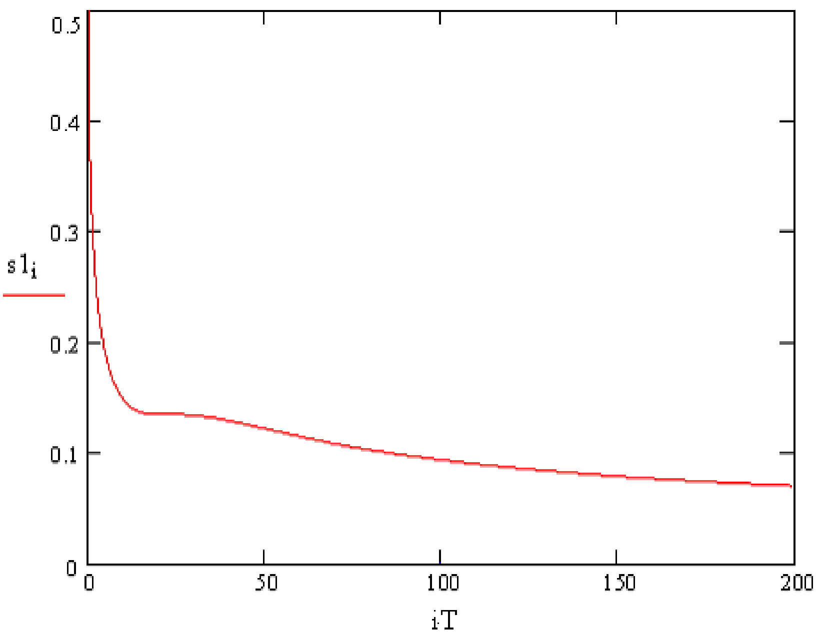

Рис. 1. Изменения дисперсии выходной переменной

Реализации такого ковариационного анализа в средствах имитационного моделирования с использованием фильтров калмановского типа (ФКТ) могут применяться для получения качественных характеристик дискретных систем.

Для этого рассмотрим более общую нестационарную модель, удовлетворяющую соотношениям:

$$\dot{\hat{x}}(t) = \mathbf{F}(t)\,\hat{x}(t) + \mathbf{K}(t)\,(\mathbf{z}(t) - \mathbf{H}(t)\,\hat{x}(t)), \qquad (7)$$

где $\mathbf{x}$ – n-мерный вектор состояния; $\mathbf{w}$ – r-мерный вектор входных белых шумов, имеющий матрицу интенсивности $\mathbf{Q}$; $\mathbf{y}$ – m-мерный вектор погрешностей выходных параметров системы обработки; $\mathbf{F}$,$\mathbf{G}$,$\mathbf{H}$ – матрицы размерностей ($n \times n$), ($r \times r$), ($m \times m$), v – m-мерный вектор шумов измерения с интенсивностью $\mathbf{R}$; $\mathbf{z}$ – m-мерный вектор измерений на входе ФКТ; $\mathbf{K}$ – матрица коэффициентов усиления произвольной структуры (размерности ($n \times m$)).

Вектор ошибок оценки и произвольная ковариационная матрица фильтра $\mathbf{K}(t)$ удовлетворяют дифференциальным уравнениям вида:

$$\dot{e}(t) = (\mathbf{F}(t) - \mathbf{K}(t)\mathbf{H}(t))\mathbf{e}(t) + \mathbf{G}(t)\mathbf{w}(t) - \mathbf{K}(t)\mathbf{v}(t),\ \mathbf{P}(0) = \mathbf{P}_0; \qquad (8)$$

$$\dot{\mathrm{P}}(t) = \mathbf{I}(t)\mathbf{P}(t) + \mathbf{P}(t)\mathbf{I}(t)^{\mathrm{T}} + \mathbf{G}(t)\mathbf{Q}\mathbf{G}^{\mathrm{T}}(t) + \mathbf{K}(t)\mathbf{R}(t)\mathbf{K}(t)^{\mathrm{T}},\ \mathbf{I}(t) = \mathbf{F}(t) - \mathbf{K}(t)\mathbf{H}(t).$$

Подставляя в (8) оптимальные значения $\mathbf{K}(t) = \mathbf{P}(t)\mathbf{H}^{T}(t)[\mathbf{R}(t)]^{-1}$, получаем следующее уравнение Риккати:

$$\dot{\mathrm{P}}(t) = \mathbf{I}(t)\mathbf{P}(t) + \mathbf{P}(t)\mathbf{I}(t)^{\mathrm{T}} + \mathbf{G}(t)\mathbf{Q}\mathbf{G}^{\mathrm{T}}(t) + \mathbf{P}(t)\mathbf{H}^{T}(t)\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{H}(t)\mathbf{P}(t). \qquad (9)$$

Полученная модель описывает оптимальную схему фильтрации, которая применяется в тех случаях, когда заранее имеется информация о некоторых вероятностных свойствах реальной системы и условия имитационного моделирования достаточно близки к натурному эксперименту.

Указанные соотношения позволяют осуществить анализ точности оптимальных (9) стохастических систем в динамике как в расчетных, так и в действительных условиях функционирования. Анализ субоптимальных, а именно, стационарных, аппроксимированных, упрощенных, редуцированных и других видов фильтров происходит на основе модификаций обобщенного уравнения (8).

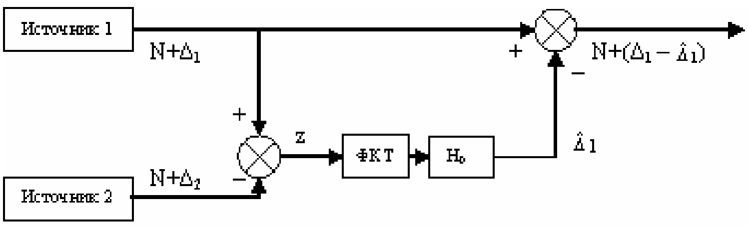

Рис.2. Схема фильтрации с использованием фильтра калмановского типа

Реализация следующей (рис. 2) схемы фильтрации с использованием различных видов ФКТ в программных средах MVS и AnyLogic позволила получить зависимости для дисперсии оптимального фильтра (рис.1) и для субоптимальных разновидностей (редуцированного и упрощенного) фильтров Калмана:

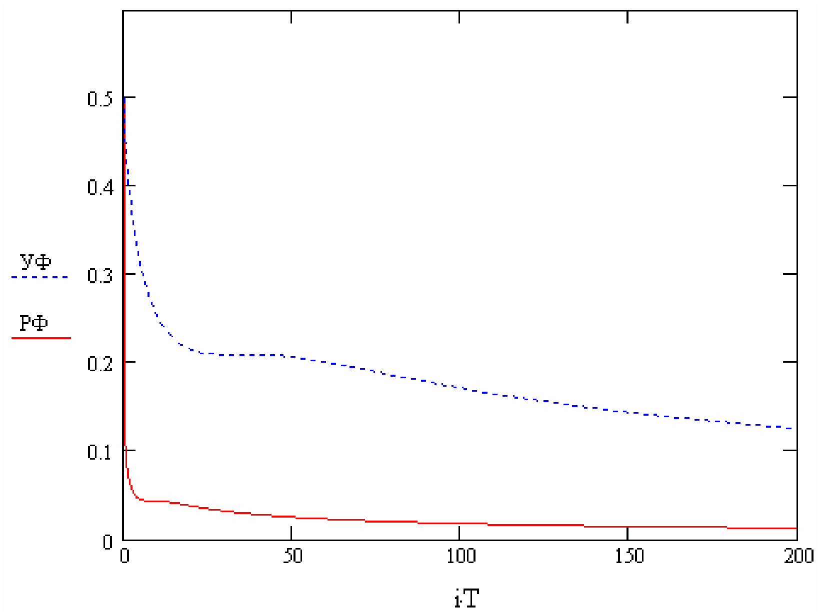

Рис. 3. Изменения дисперсии выходной переменной (УФ – упрощенный ФКТ, РФ – редуцированный ФКТ)

Из рисунка видно, что субоптимальная схема с применением редуцированного фильтра Калмана позволяет получить более точный результат при прочих равных по сравнению со схемой упрощенного фильтра.

Приведенные соотношения для оптимальных и субоптимальных характеристик дискретных систем могут быть использованы для анализа и контроля точности при работе пакетов имитационного моделирования, для оценки чувствительности моделируемой системы, а также для изучения других важных характеристик. Они позволяют рассматривать широкий класс исследуемых систем, включающий системы мониторинга, системы физического моделирования, распределенные компьютерные системы, встраиваемые автоматические и другие интеллектуальные системы.

Литература

1. **Gore A. P., Deshpande J.V., Shanubhogue A.** Statistical Analysis of Non-Normal Data. –New York: John Wiley & Sons, 1990.
2. **Kelly F. P.** Probability Statistics and Optimization: A Tribute to Peter Whittle. –Chichester, Wiley, 1994.
3. **Hoyland A., Rausand M.** System Reliability Theory: Models and Statistical Methods. –New York, John Wiley & Sons, Inc., 1994.
4. **Chen T., Francis B. A.** Optimal Sampled-Data Control Systems. –Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag, 1995.
5. **В. А. Пепеляев, Ю. М. Чёрный**. О современных подходах к оценке достоверности имитационных моделей//Материалы конференции ИММОД-2003. –2003.
6. Имитационное моделирование сложных динамических систем//**Ю. Б. Колесов, Ю. Б. Сениченков**, электронная версия журнала Exponenta Pro, http://www.exponenta.ru/soft/Others/mvs/ds_sim.asp
7. **Зорин А. В.** Программный модуль обработки данных экологических наблюдений// XXXIII Неделя науки СПбГПУ, Материалы студенческой научной конференции. СПб., 2004.

8. **Зорин А. В.** Программный модуль обработки данных статистических наблюдений//Технологии Microsoft в теории и практике программирования, Материалы межвузовского конкурса-конференции. –СПб., 2005.
9. **Зорин А. В., Ивановский Р. И.** Программный модуль обработки данных экологических наблюдений//Материалы VIII международной конференции по мягким вычислениям и измерениям SCM`2005. –СПб., 2005.
10. **Barnett V., Turkman K. F.** Statistics for the Environment: Water Related Issues. –New York: Wiley, 1994.
11. AnyLogic. http://www.anylogic.com