ОПТИМИЗАЦИЯ ГРАФИКА ПОСТАВОК ПРИ ВЫСОКОМ СПРОСЕ И БОЛЬШИХ СЛУЧАЙНЫХ ЗАДЕРЖКАХ В ПУТИ

Ф. В. Голик (Великий Новгород)

Введение

В логистической практике довольно часто встречаются ситуации, когда среднее время доставки значительно превышает время, в течение которого расходуется сырье (далее материальный ресурс – МР) одного заказа. Увеличение размера заказа до объема, гарантирующего надежную работу производства в течение времени доставки, обычно невозможно из-за ограниченной емкости склада. Поэтому МР поставляется сравнительно малыми партиями, кратными грузоподъемности используемого транспортного средства или грузовой единицы. В результате значительная часть груза находится в пути. Точная дата его поступления на склад неизвестна из-за случайности длительности времени доставки. Это существенно затрудняет планирование заказов на будущий период. Происходит либо переполнение склада, либо возникает угроза остановки производства в связи с отсутствием МР. Вследствие инерционности системы удержать запас на некотором оптимальном уровне, гарантирующем минимальные издержки, достаточно трудно.

Цель настоящей работы состоит в разработке процедуры оптимального планирования графика поставок, обеспечивающего минимальные затраты на хранение МР при заданной надежности запаса, ограниченной емкости склада и неслучайном спросе (расходе) МР.

Задача решена двумя способами: аналитическим и имитационным. Первый базируется на модифицированной «схеме гибели», применяемой при расчете надежности невосстанавливаемых систем. В имитационной модели реализована идея суперпозиции потоков. Численные расчеты выполнены с использованием программы MathCAD 2001.

Постановка задачи

Рассмотрим процедуры, выполняемые менеджером по закупкам. Ежедневно он принимает решение об оформлении заказа на поставку очередной партии МР. При этом учитывает фактический запас МР на складе, даты и объемы заказов, сделанных ранее, и находящихся на стадии обработки, в пути или на таможне[1]. Если время обработки заказа, время в пути и время таможенной обработки известны и неслучайны, то решение о заказе очередной партии МР не вызывает затруднений. Однако на практике эти времена случайны. Точная дата поступления очередной партии МР неизвестна. Поэтому менеджер вынужден подстраховываться, намеренно завышая объем заказов или их частоту. При этом увеличиваются капитальные затраты, затраты на хранение и текущее обслуживание МР. Если МР имеет ограниченный срок хранения, то увеличивается и стоимость риска.

Итак, менеджер по закупкам анализирует события, которые уже произошли (оформленные заказы на МР), текущее состояние (запасы МР на складе) и ожидаемое поступление МР по ранее оформленным заказам. Он работает в пределах скользящего временного окна, состоящего из интервала «прошлого» $I_П$, текущего «настоящего» времени $t_Н$ и интервала «будущего» $I_Б$. Общая длина временного окна I. Время отсчитывается от начала окна с дискретом в один день.

Введем обозначения:

t_n – дата оформление n-го заказа в «прошлом»;

[1] Здесь рассматривается общий случай поставки МР, учитывающий ситуацию импорта.

v_n – объем *n*-го заказа;

$N_П$ – количество заказов в «прошлом»;

I – номер дня во временном окне $i = \overline{1, I}$,

V_i, $V_{ср\,i}$ – суммарное и среднее суммарное количество МР, поступившего на склад к *i*-му дню соответственно;

r_i – плановый расход МР в *i*-й день;

R_i – интегральный расход МР по состоянию на *i*-й день;

Z_H - запас МР в момент t_H принятия решения (начальный запас);

Z_i – запас МР в *i*-й день;

$Z_{ср\,i} = V_{ср\,i} - R_i + Z_H$ – средний запас по состоянию на *i*-й день;

$Z_{кр}$ – критический запас – запас, при котором происходит остановка производства из-за недостаточного количества МР на складе;

$Z_{скл}$ – объем склада;

α – вероятность переполнения склада $\alpha = ver[Z_i > Z_{скл}], i = \overline{t_H, I}$;

v_H - объем заказа, оформленного в день t_H.

c– суммарные затраты на хранение единицы МР в сутки[2];

γ – показатель надежности запаса, равный вероятности того, что текущий запас не ниже критического $Z_{кр}$.

Очевидно, что суммарные затраты на интервале «будущего» равны

$$C = c\sum_{i=t_H}^{I}\left(V_{ср\,i} - R_i\right) + c \cdot Z_H \cdot \left(I - t_H\right) \tag{1}$$

Тогда задачу оптимального планирования графика поставок можно сформулировать так:

найти объем заказа $v_H \geq 0$, минимизирующий суммарные затраты C при условии, что показатель надежности запаса γ не меньше заданного γ_0, а вероятность переполнения склада α меньше допустимой α_0.

Решение о формировании оптимального заказа принимается ежедневно (в текущий день t_H). Это означает, что происходит поэтапное формирование оптимального графика поставок на интервале «будущего».

Исходные данные

Известны:

- даты заказов в «прошлом» t_n и их объемы $v_n, n = \overline{1, N_П}$;
- эмпирическое распределение p_s времени доставки, равного сумме времен обработки заказа, транспортировки и таможенной обработки;
- плановый ежедневный расход МР r_i на интервале «будущего» $i \in I_Б$.

Допущения:

- времена доставки взаимно независимы и законы их распределения не зависят от номера заказа;

[2] Под суммарными затратами будем понимать сумму капитальных затрат, затрат на хранение, обслуживание МР и стоимость риска.

- фактический ежедневный расход МР равен плановому.

Заданы:

- показатель надежности γ_0;
- объем склада $Z_{скл}$;
- критический запас $Z_{кр}$;
- допустимая вероятность переполнения склада α_0.

Аналитическая модель

Модель базируется на «схеме гибели». Рассматривается система, принимающая одно из возможных состояний. Состояние системы задано матрицей состояний $A = \left(a_{r,n}\right)$ размерностью $2^N \times N$, где $N = N_П + 1 -$ $N_П$ заказов в «прошлом» и один в «настоящем». Элементы матрицы $a_{r,n}$, $r = \overline{0, 2^N - 1}$, $n = \overline{1, N}$ принимают значение 1, если n-й заказ поступил на склад и 0 в противном случае. Очевидно, что r-я строка матрицы представляет собой запись числа r в двоичной форме, а матрица A содержит все двоичные числа от 0 до $2^N - 1$. Таким образом, система может находиться в одном из несовместных состояний, общее число которых равно 2^N.

Найдем вероятностные характеристики системы.

Вероятность того, что МР n-го заказа поступит на склад в i-й день, равна

$$p_{i,n} = \sum_s if\left(i = s + t_n, 1, 0\right) \cdot p_s \tag{2}$$

Тогда вероятность того, что n-й заказ будет доставлен не позднее j-го дня, определяется выражением:

$$P_{j,n} = \sum_{i=1}^{j} p_{i,n},\ j \in I_Б \tag{3}$$

Обозначим вероятность противоположного события через $Q_{j,n} = 1 - P_{j,n}$.

Вероятность того, что в j-й день система будет находиться в состоянии r, равна:

$$\mathrm{P}_{r,j} = \prod_{n=1}^{N} P_{j,n}^{a_{r,n}} \cdot Q_{j,n}^{1-a_{r,n}} \tag{4}$$

где $a_{r,n}$ – n-й разряд числа r в двоичном представлении.

Если система находится в состоянии r, то это означает, что на склад поступил МР в количестве, равном $\nu_r = \sum_{n=1}^{N} a_{r,n} \cdot v_n$. Тогда среднее количество МР, поступившего к j-му дню, равно

$$V_{ср\ j} = \sum_{r=0}^{2^N-1} \nu_r \cdot \mathrm{P}_{r,j}, \quad j \in I_Б \tag{5}$$

Подставив выражение (5) в формулу (1), найдем средние затраты, которые следует минимизировать путем подбора оптимального объема заказа v_H. При задании объема заказа руководствуются соображениями минимальных затрат на транспортировку, что обеспечивается кратностью заказа грузоподъемности транспортного средства или грузовой единицы. Кроме того, необходимо контролировать выполнение ограничений по надежности запаса (γ_0) и переполнению склада (α_0).

Показатель надежности запаса можно рассчитать следующим образом. Допустим, что система в *j*-й день находится в состоянии *r*. Это означает, что на склад поступил МР в объеме ν_r. К *j*-му дню израсходовано $R_j = \sum_{i=t_H}^{j} r_i$ единиц МР. Тогда, при условии, что система находится в состоянии *r*, на складе будет храниться запас МР в объеме $Z_{j,r} = \nu_r - R_j$. Из всех возможных состояний выделим те, для которых $Z_{j,r} < Z_{кр}$. Совокупность этих состояний образует множество $E_j^- = \left\{ r \in \overline{0, 2^N - 1} \,\middle|\, Z_{j,r} < Z_{кр} \right\}$. Тогда показатель надежности γ_j равен вероятности того, что состояние системы в момент *j* не принадлежит множеству E_j^-:

$$\gamma_j = 1 - ver\left[r \in E_j^- \right] = 1 - \sum_{r \in E_j^-} \mathrm{P}_{r,j} \tag{6}$$

Критерием выполнения ограничения по надежности запаса является неравенство $\gamma_j \geq \gamma_0$, $j = \overline{t_H, I}$, то есть для любого дня на интервале «будущего» показатель надежности не меньше допустимого или, иначе, вероятность того, что текущий запас в любой из дней «будущего» не меньше критического, больше или равна γ_0.

Аналогично для оценки возможности переполнения склада сформируем множество $E_j^+ = \left\{ r \in \overline{0, 2^N - 1} \,\middle|\, Z_{j,r} > Z_{скл} \right\}$. Тогда вероятность переполнения склада в *j*-й день равна

$$\alpha_j = \sum_{r \in E_j^+} \mathrm{P}_{r,j} \tag{7}$$

Очевидно, должно выполняться условие $\alpha_j \leq \alpha_0$, $j = \overline{t_H, I}$.

Все расчетные соотношения достаточно просто реализуются в среде Matcad. Основной недостаток модели – сравнительно большое время счета. Так, на компьютере Pentium III с частотой процессора 633 МГц при $N_П$=10 вычисления занимают около двух минут. Учитывая, что расчеты нужно проводить несколько раз для различных объемов v_H заказываемой партии, такие временные затраты могут показаться пользователю неприемлемыми.

Имитационная модель

Модель базируется на представлении процессов поступления заказов на склад в виде временных потоков. Текущее значение *n*-го потока равно 0, если МР *n*-го заказа не поступил на склад, и v_n в противном случае. Отличие от аналитической модели состоит в том, что исследуются не все возможные состояния системы, число которых равно 2^N, а только их часть. Это позволяет существенно сократить время счета. Другая особенность заключается в том, что в формулировке задачи вместо ограничений по вероятностям γ_0 и α_0 задаются ограничения по критическому запасу $Z_j \geq Z_{кр}$ и переполнению склада $Z_j \leq Z_{скл}$. Это связано с тем, что при имитационном моделировании оценка вероятностей выполнения этих неравенств затруднительна.

Рассмотрим основные элементы модели.

При заданном объеме реализаций M по известному закону распределения времени доставки p_s формируются векторы времени доставки заказов МР, выполненных в моменты $t_n, n=\overline{1,N}$ на интервале «прошлого» и один заказ в «настоящем» t_H. Затем формируются парциальные потоки $\varphi_{n,j}$ заказов. Суммарный поток МР, поступивший на склад, равен сумме парциальных потоков: $\Phi_j = \sum_{n=1}^{N+1} \varphi_{n,j}$. Усреднение суммарного потока по всем реализациям дает среднее суммарное количество МР, поступившего на склад к j-му дню: $V_{cp\ j} = \overline{\Phi_j}$. Тогда средние затраты на хранение вычисляются по формуле (1). Изменяя объем текущего заказа v_H, следует добиться минимума средних затрат C.

Проверку справедливости ограничений по минимальному и максимальному текущим запасам можно выполнить, если найти ***min*** и ***max*** элементов j-го столбца матрицы $B = \left(\Phi_{r,j}\right)$, где $r = \overline{1,M}$ – номер реализации, а $j = \overline{1,I}$ – номер дня.

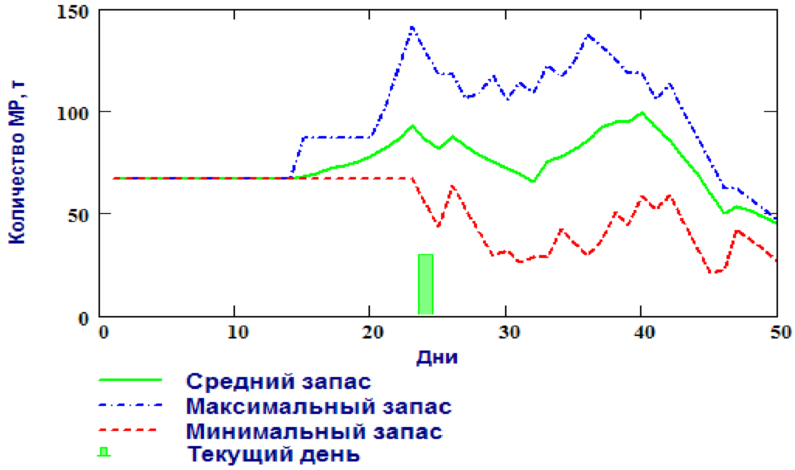

Рис. 1

Расчеты, выполненные для конкретных ситуаций одной из фирм, показали, что при числе реализаций М=500 результаты имитационного моделирования незначимо отличаются от результатов аналитического расчета.

На рис. 1 приведен график динамики запасов, рассчитанных для реальной ситуации одной из фирм, получающей импортный МР. Число заказов в «прошлом» N_{Π}= 10. Эмпирическое распределение времени доставки найдено по 128 предыдущим заказам. Среднее время доставки 18,887 дней, среднее квадратическое отклонение 2,677 дней. Интервал допустимого объема заказа 14…20 т. с дискретом 2 т. МР потребляется в соответствии с графиком, учитывающим фактический расход в рабочие и выходные дни.

Заключение

Предложенные модели позволяют с высокой степенью достоверности прогнозировать поступление материального ресурса на склад при больших и случайных временах доставки. На основании прогноза запаса формируется оптимальный график заказов. Критерий оптимальности – минимум суммарных затрат на хранение запаса МР. Ограничения – критические значение запаса (по минимуму и максимуму).

Модель позволяет оптимизировать график поставок и по другим критериям.