УСКОРЕННАЯ ИМИТАЦИЯ ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ СЕТЕЙ

Т. М. Татарникова, О. И. Кутузов (Санкт-Петербург)

Концепция алгоритмического анализа стохастических сетевых моделей. Для количественной оценки вероятностно-временных характеристик (ВВХ) сложных систем типа информационные вычислительные сети (ИВС) нередко единственным методом решения остается статистическое моделирование на ЭВМ – метод Монте-Карло. Однако этот универсальный метод обладает существенным недостатком – медленной сходимостью. Использование расслоенной выборки и равновзвешенного метода позволяют ускорить процесс статистического моделирования сети.

При построении полной (топологически подобной) имитационной модели сети с целью оценки ее ВВХ возникает задача снижения размерности модели.

Формально уменьшение размерности может быть сведено к выделению на структуре сети некоторого множества классов объектов, с последующей их заменой соответствующими моделями. В качестве таких представителей различных кластеров целесообразно выбрать путь транспортировки транзактов между узлом-источником и узлом-отправителем (ПТТ) и декомпозировать сеть на подмножества ПТТ. В каждое подмножество включить пути, близкие по условиям транспортировки транзактов. Моделью ПТТ и объектом имитации может служить виртуальный канал (ВК), представляющий собой некоторый маршрут в сети от узла-источника до узла-адресата, состоящий из последовательности узлов коммутации-обработки транзактов и каналов связи-передачи транзактов между соседними узлами. Одна и та же модель ВК для представления разных кластеров будет отличаться только параметрами.

Для учета влияния потоков, циркулирующих по сети и являющихся фоновыми в выделенном ВК, строится вероятностный эквивалент нерассматриваемой части сети в виде генератора фоновых потоков.

При таком подходе имитируемый объект оказывается существенно меньшей размерности. Как теоретическую основу данного подхода можно рассматривать метод расслоенной выборки, предлагая в качестве совокупности факторных признаков все множество ПТТ сети.

При многократных повторах численного эксперимента с имитационной моделью сети весьма существенная доля машинного времени тратится на формирование реализаций случайного вектора, задающего состояния элементов системы, компоненты которого характеризуются в общем случае различными и подчас трудно реализуемыми на ЭВМ законами распределения. Применение равновзвешенного моделирования позволяет решить эту проблему.

Эффективность равновзвешенного расслоенного моделирования. Во многих приложениях представление показателя качества моделируемой системы используется в виде среднего риска: $Q(\overline{\alpha}) = M\left\{f(\overline{\alpha},\overline{\beta})\right\}$, где $\overline{\alpha} = (\alpha_1,...,\alpha_n)$ – случайный вектор, описывающий случайные процессы в моделируемой системе; $\overline{\beta} = (\beta_1,...,\beta_2)$ – вектор, задающий параметры модели; $f(.)$ – функция, значение которой при различных реализациях $\overline{x}_i$ (i=1,2,...,N) вектора α определяется в ходе вероятностного моделирования.

В частности, если $f(.)=\xi=1$ при выполнении моделируемой системой заданных требований и $f(.)=\xi=0$ в противном случае, то $Q(\overline{\beta})$ есть вероятность выполнения заданных требований. Таким образом, решение задач, связанных с оценкой редких событий, может быть сведено к оцениванию математического ожидания $M\xi$ двоичной случайной величины (СВ) ξ, заданной в виде функции $\xi=f(\alpha)$, причем СВ $\alpha=(a_1, a_2,..., a_n)$ имеет закон распределения p ($\alpha \sim p$), который известен.

Задача расчета оценки для $M\xi$ может решаться с помощью различных аналитико-статистических алгоритмов. Их эффективность будем характеризовать дисперсией оценки при фиксированном числе N опытов. Чем меньше дисперсия оценки, тем точнее алгоритм и тем он эффективнее, если, конечно, сложность расчетов в сравниваемых алгоритмах различается незначительно.

Наряду с непосредственным моделированием и с методом расслоения нас интересует также следующий конкретный вариант метода взвешенного моделирования. Вместо СВ α разыгрывается равномерно распределенная СВ $\beta \sim p_0(x)$, $x \in X$, $p_0(x_j)=1/n$, $j=1,...,n$ и показатель $M\xi$ оценивается как математическое ожидание СВ $\zeta=nf(\beta)p(\beta)$ на том основании, что $M\xi=M\zeta$: $M\varsigma = \sum_{x \in X} nf(x)p(x)p_0(x) = \sum_{x \in X} f(x)p(x) = M\xi$

Этот конкретный прием в [4] назван равномерным взвешенным моделированием (РВМ). Для N реализаций $\varsigma^1,..., \varsigma^N$ СВ ζ дисперсия оценки $\tilde{m}_В = \left(\varsigma^1,..., \varsigma^N\right)/N$, получаемой РВМ, составляет $D\tilde{m}_В = D\zeta/N$. Если

$$D\zeta \le D\xi\,, \qquad (1)$$

то РВМ не проигрывает в числе испытаний $N_{рвм}$ числу испытаний $N_Н$ при непосредственном моделировании методом Монте-Карло. В [4] показано, что для практических приложений при разыгрывании редких событий:

$$t=\frac{N_{рвм}}{N_Н}=1+\rho_У^2 \qquad (2)$$

где $\rho_У^2$ – коэффициент вариации по $Y=\{p_j \in \omega : p_j = p(x_j),\ f(x_j)=1\}$, т. е. по множеству вероятностей для единичных значений функции $f(\alpha)$.

Применение расслоения уменьшает значение t.

В общем случае при непосредственном моделировании полное количество испытаний $N_Н$, необходимых для получения оценки с заданной точностью, условно представим в виде двух подмножеств $N'_Н$ и $N''_Н$ таких, что

$$N_Н = N'_Н + N''_Н\,, \qquad (3)$$

где $N'_Н$ – число испытаний, реализации которых могут содержать положительный исход, т. е. в каждой из этих реализаций возникает состояние, для которого с вероятностью $0 < p^{(+)} < 1$ возможно значение $\xi = f(X_i) = 1$, $i \in N'_Н$. Назовем такие реализации содержательными; $N''_Н$ – число испытаний, реализации которых не могут содержать положительного исхода, т. е. в каждой из этих реализаций возникает состояние, для которого с вероятностью 1 значение $\xi=f(X_i)=0$, $i \in N''_Н$. Назовем такие реализации пустыми. Тогда, чтобы при непосредственном моделировании получить $N'_Н$ содержательных реализаций, необходимо провести в среднем

$$N_Н = N_Н / P^{(+)} \qquad (4)$$

испытаний. При этом получаем оценку, точность которой характеризуется дисперсией $D\tilde{\xi}_i$.

При совместном применении расслоения и РВМ проводим только содержательные испытания, число которых пусть будет равно

$$N_{\text{РВМ}} = N'_{\text{Н}}(1+\rho_Y^2), \qquad (5)$$

получаем оценку с дисперсией $D\tilde{\zeta}=D\tilde{\xi}$. Соответственно, соотношение числа испытаний при условии $D\tilde{\zeta}=D\tilde{\xi}$ равно

$$t_1 = \frac{N_{\text{Н}}}{N_{\text{РТМ}}} = \frac{1}{P^{(+)}(1+\rho_Y^2)} \qquad (6)$$

Таким образом, выигрыш в числе испытаний при переходе от непосредственного моделирования к совместному применению расслоения и РВМ имеет место при условии, что

$$p^{(+)}(1+\rho_Y^2) < 1 \qquad (7)$$

Оценим этот возможный выигрыш при моделировании маловероятных событий на примере расчета надежности системы, структурная схема которой изображена в виде случайного графа на рис. 1.

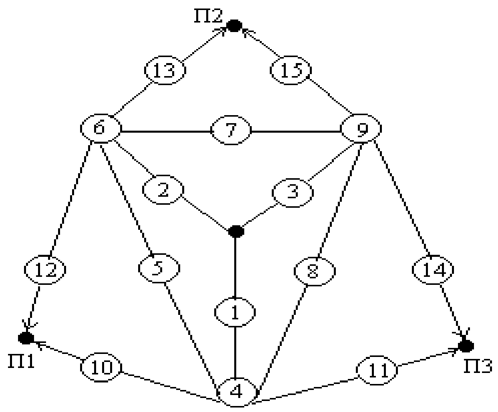

Рис. 1. Структурная схема рассматриваемой системы

Вершины (элементы системы) 1,...,15 имеются в графе с вероятностями $q_1,...,q_{15}$ соответственно, дуги абсолютно надежны. Система работоспособна, если из полюса Г есть пути во все полюса п1, п2, п3 (движение против ориентированных дуг запрещено). Требуется найти вероятность отказа системы при $q_1 = q_2 = q_3 = 10^{-5}$, $q_4 = q_6 = q_9 = 2 \bullet 10^{-5}$, $q_5 = q_7 = q_8 = 3 \bullet 10^{-5}$, $q_{10} = ... = q_{15} = 5 \bullet 10^{-5}$.

Система, изображенная на рис.1, имеет связность γ=2. Анализ [3] показывает, что при расслоенном моделировании для данных значений отказов элементов достаточно рассмотреть слои с кратностью отказов i при $2 \le i \le 3$.

Для рассматриваемого примера $\rho^{(+)}=2.7 \bullet 10^{-4}$ и $\rho_Y^2=0.303$. Согласно (6) выигрыш в числе испытаний при расслоении и РВМ по сравнению с непосредственным моделированием по методу Монте-Карло составит $k_1 = 2.84 \cdot 10^3$ раз.

Выигрыш в числе испытаний за счет только РВМ не столь значителен. Эффективность РВМ, оцениваемая сравнением числа обращений к ДСЧ при моделировании слоя с признаком $|\alpha|=i$, для данного примера дает следующий результат: при i=2 $\bar{\ell}(i=2)=8.66$; $\rho_Y^2(i=2)=0.374$; $(1+\rho_Y^2)$ i=2.748, что дает $k_{i=2}^{(p)}=$ 3.15; при i=3 $\bar{\ell}(i=3)=7.11$; $\rho_Y^2(i=3)=0.706$; $(1+\rho_Y^2)$ i=3.819, что дает $k_{i=3}^{(p)}=1.39$.

Однако применение метода РВМ позволяет не только упрощать процедуру розыгрыша состояний вектора α, но сокращать и число испытаний при сохранении требуемой точности оценки.

Таким образом, сочетание расслоенной выборки с РВМ позволяет существенно ускорить алгоритмический анализ стохастических сетевых моделей методом имитации. Расслоение сокращает число экспериментов с имитационной моделью при сохранении требуемой точности оценок, а РВМ обеспечивает простоту и скорость получения реализаций при моделировании редких событий. При этом имитационная модель ВК выступает в качестве базового элемента, реализующего единообразие модельного обеспечения решаемой задачи.

Литература

1. **Башарин Г. П.** Модели информационно-вычислительных систем. М.: Наука, 1993.
2. **Гриншпан Л. А.** Методы анализа стохастических сетевых моделей вычислительных систем/Под ред. В. С. Танаева. Минск: Наука и техника, 1988.
3. **Яшков С. Ф.** Анализ очередей в ЭВМ. -М.: Радио и связь, 1989.
4. **Кутузов О.И., Задорожный В.Н.** Аналитико-статистический метод для расчета высоконадежных систем связи//Техника средств связи. Техника проводной связи. – 1990. – Вып. 1: С. 121–130.