

МЕСТО МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ В СТРУКТУРЕ ЭКСПЛУАТАЦИОННОГО ПРОЦЕССНОГО ЦИФРОВОГО ДВОЙНИКА ЦИРКУЛЯЦИИ МОРСКОГО СУДНА

В.А. Бондарев, С.В. Ермаков, Н.Ж. Малинин
(Калининград)

Введение

Цифровизация, т.е. внедрение цифровых технологий в различные сферы деятельности человека, является в настоящее время одним из основных и ведущих технологических трендов. При этом в соответствии с классификацией трендов на микро-, макро- и мегауровни [1] цифровизацию, способную фундаментально изменить технологический базис, источники роста, системы расширенного воспроизводства материальных факторов жизнеобеспечения, идеологические принципы, основы миропонимания и человеческого существования [2–4], безапелляционно можно отнести к мегатрендам. При этом цифровая трансформация входит в число национальных целей развития Российской Федерации на период до 2030 г. и на перспективу до 2036 г. [5].

В число технологий, на которых основан процесс цифровизации, входит технология цифровых двойников (Digital Twin Technology – DTT). По определению М. Гривза, который считается основоположником концепции, цифровой двойник – это набор виртуальных информационных конструкций, которые полностью описывают потенциальный или фактический физический произведенный продукт от микроатомного уровня до макрогеометрического уровня (в оригинале: «*Digital Twin (DT) is a set of virtual information constructs that fully describes a potential or actual physical manufactured product from the micro atomic level to the macro geometrical level*» [6]). В идеале всю информацию, которую можно получить непосредственно от физического объекта, можно получить и от его цифрового двойника.

В стандарте [7] цифровой двойник изделия определяется как система, состоящая из цифровой модели изделия и двусторонних информационных связей с изделием (при наличии изделия) и (или) его составными частями. В свою очередь, цифровая модель – это система математических и компьютерных моделей, а также электронных документов изделия, описывающая структуру, функциональность и поведение вновь разрабатываемого или эксплуатируемого изделия на различных стадиях жизненного цикла, для которой на основании результатов цифровых и (или) иных испытаний выполнена оценка соответствия предъявляемым к изделию требованиям.

Вместе с тем, в отличие, например, от аэрокосмической отрасли и машиностроения, в судоходстве (и, в частности, в судовождении), считающемся отраслью консервативной, DTT ещё не нашла широкого применения. Однако потенциал этой технологии для морского сегмента очевиден. Цифровой двойник, меняя свою структуру, может быть использован на всех стадиях жизненного цикла судна, в том числе и во время его эксплуатации. С точки зрения практического судовождения – как классического, так и перспективного автономного, – наибольший интерес представляют именно эксплуатационные двойники судна.

Здесь следует заметить, что сущностным признаком любого цифрового двойника является наличие постоянного информационного взаимодействия между

физическим объектом и его цифровым двойником: судно наполняет свой ДТ данными для его актуализации; в свою очередь с целью принятия решений цифровой двойник предоставляет на судно информацию (рис. 1), являющуюся результатом обработки полученных ретроспективных данных и основой для принятия решений, в частности, вахтенным помощником капитана (ВПК) в различных навигационных ситуациях. Так, например, при расхождении со встречным судном цифровой двойник единожды генерирует оптимальные курс и скорость на расхождение, а в случае следования судна на мелководье – максимальную скорость судна, при котором будет обеспечена безопасная глубина под килем (один раз и заблаговременно), и текущие скоростную просадку и глубину (постоянно). Информация на судно может передаваться как автоматически, так и по запросу, а частота передачи информации определяется задачами, для решения которых цифровой двойник используется в конкретный момент эксплуатации судна.



Рис. 1. Визуализация концепции цифрового двойника

Отсюда можно сделать вывод о двойной роли судна как физического объекта по отношению к своему цифровому двойнику. С одной стороны, судно позиционируется источником (поставщиком) данных, с другой – судно есть потребитель информации, производимой цифровым двойником.

Целью настоящего исследования является обеспечение эффективными математическими моделями цифровой двойник процесса циркуляции морского судна.

Для достижения этой цели были решены следующие задачи:

- приведено обоснование общей структуры процессного эксплуатационного цифрового двойника циркуляции судна;
- сформулированы (обоснованы) требования к математической модели судна для её использования в цифровом двойнике циркуляции судна;
- проанализированы существующие математические модели судна на предмет соответствия сформулированным требованиям и возможности их использования в цифровом двойнике циркуляции морского судна;
- осуществлён выбор математических моделей для их использования в структуре цифрового двойника морского судна.

Общая структура процессного эксплуатационного цифрового двойника циркуляции судна

В работе [8] представлена концепция эксплуатационного цифрового двойника судна, которая схематически изображена на рис. 2.

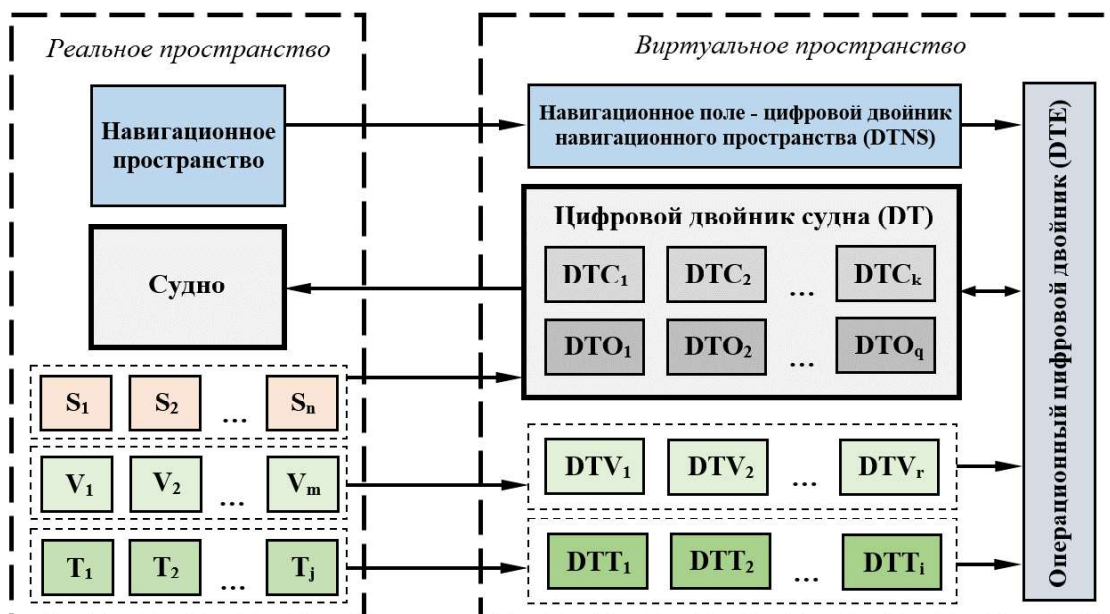


Рис. 2. Концепция эксплуатационного цифрового двойника судна

Структура этого DT восходит к авторской концепции М. Гривза, которая среди прочего содержит следующую типологизацию:

цифровой двойник прототипа (Digital Twin Prototype – DTP) – некоторый набор информации, необходимый и достаточный для создания физического объекта (судна) – используется, в первую очередь, на стадии проектирования и строительства;

цифровой двойник образца (Digital Twin Instance – DTI), описывающий конкретный объект (конкретное судно);

агрегированный цифровой двойник (Digital Twin Aggregate – DTA), который объединяет DTI нескольких образцов (экземпляров) одного и того же объекта и является не цифровым двойником как таковым, а некоторой вычислительной конструкцией, которая взаимодействует со «своими» DTI при необходимости или постоянно;

операционный цифровой двойник (Digital Twin Environment – DTE) – операционная среда – некоторое мультидоменное прикладное пространство, обеспечивающее выполнение разнообразных операций с цифровыми двойниками для решения различных прикладных задач.

Эксплуатационный цифровой двойник судна (см. рис. 2), т.е. цифровой двойник, предназначенный для использования на стадии эксплуатации судна, включает в себя цифровые двойники судовых компонентов DTC и судовых эксплуатационных процессов DTP, цифровые двойники DTV однотипных судов V, цифровые двойники DTT судов-целей T, которые на конкретной акватории плавания могут представлять опасность и являться пассивным или активным инициатором маневрирования «нашего» судна, навигационное поле как цифровой двойник DTNS навигационного пространства. Источником данных для эксплуатационного цифрового двойника судна является система датчиков (сенсоров) S.

С точки зрения построения систем поддержки принятия решения вахтенным помощником капитана большее значение имеют цифровые двойники процессов судовождения. Под процессом здесь следует понимать последовательную и необратимую смену состояний объекта (системы) во времени [9].

Количественно любая система описывается двумя классами величин, именуемыми параметрами и характеристиками. Параметры являются величинами, описывающими первичные свойства системы и условия её функционирования и одновременно исходными данными задачи анализа системы. В свою очередь, характеристики, являясь функцией параметров и результатом решения задачи анализа, описывают уже вторичные свойства системы. Исходя из этого, состояние системы определяется совокупностью значений её характеристик, зависящих от значений параметров и описывающих это состояние. Изменение хотя бы одной характеристики системы инициирует переход системы из одного состояния в другое, т.е. инициирует процесс (его начало или продолжение) [9]. Таким образом, вход процесса определяется параметрами, а его выход – характеристиками, также как вход и выход его цифрового двойника (процессного цифрового двойника, рис. 3).

Входные для процессного двойника параметры первоначально «проходят» DTE, содержащего существующие математические модели процессов, ретроспективные данные, процессные цифровые двойники судов-прототипов (рисунок 3). Кроме того, операционный цифровой двойник включает в себя различные инструменты обработки данных, например, основанные на нейросетевых технологиях.



Рис. 3. Процессный эксплуатационный цифровой двойник судна

Одним из ключевых процессов, безопасность течения и результативность которого обеспечивает вахтенный помощник капитана, является процесс циркуляции судна.

Под циркуляцией в общем случае понимается процесс изменения кинематических параметров двигавшегося изначально прямолинейно и равномерно судна в ответ на ступенчатую перекладку руля, начиная с момента ее задания для отработки. Одновременно циркуляция – это не только процесс, но и его результат – криволинейная траектория, которую описывает центр тяжести судна при его движении с отклонённым на постоянный угол рулём [10, 11].

В контексте настоящего исследования циркуляция – это эксплуатационный процесс судна, являющийся частным случаем его маневрирования, при котором входные параметры этого процесса, одним из которых очевидно является угол перекладки руля, определяют его характеристики, описывающие криволинейную траекторию движения судна.

По сути, второе определение не противоречит, а несколько дополняет первую общепринятую дефиницию циркуляции.

К числу параметров процесса циркуляции кроме угла перекладки руля относятся текущее водоизмещение, осадки, крен, дифферент, скорость, курс, угловая скорость поворота (измеренная), координаты, обороты двигателя, глубина под килем, направление (курсовой угол) и скорость истинного ветра, направление (курсовой угол) и сила волнения, направление (курсовой угол) и скорость течения.

Характеристиками процесса и выходом его цифрового двойника являются, в первую очередь, координаты точек траектории циркуляции. Основные же задачи эксплуатационного процессного цифрового двойника циркуляции судна – прогнозирование траектории циркуляции и информационная поддержка лица, принимающего решения, в отношении величины управляющих воздействий, посредством которых будет реализована желаемая траектория.

Применение математических моделей для функционирования цифрового двойника циркуляции судна

По замыслу, определяющему ход настоящего исследования, основой для формирования цифрового двойника, являются эмпирические данные, тем более, что источники этих данных – датчики и сенсоры – как правило, входят в перечень штатного оборудования судна или являются внешними, но доступными. В свою очередь, математические модели судна (точнее, циркуляции судна) имеют здесь вторичный вспомогательный характер и предназначены для восполнения информационных пробелов цифрового двойника и, возможно, для контроля генерируемых им характеристик процесса. Однако каждая реализация процесса циркуляции настолько уникальна, что нет никаких причин и оснований ожидать частого повторения одинаковых (или к близким к таковым) реализаций. По этой причине продекларированная факультативность роли математических моделей в структуре цифрового двойника циркуляции является больше формальной и умозрительной, чем реальной. Математические модели являются здесь неотъемлемой частью ДТ, во многом определяющем его работоспособность (по сути, жизнеспособность).

Математические модели судна для их использования в цифровом двойнике циркуляции судна можно подобрать из числа уже существующих, для чего первично необходимо обосновать требования к этим моделям (критерии выбора), которые позволят сделать их не частью интерьера цифрового двойника, а частью его архитектуры, т.е. функциональным эффективным инструментом.

Оставаясь при уверенности, что фундаментом любого исследования является его терминологическая база, определим, что необходимо понимать под математической моделью, обратившись при этом к стандартам [7, 12] и, несмотря на множественность определений, представленных в иных источниках, ограничившись ими.

В общем случае под математической моделью необходимо понимать модель, в которой сведения об объекте моделирования представлены в виде математических символов и выражений. Модель, в свою очередь, это приближённое представление объекта реального мира, которое сохраняет его существенные черты и описывает основные свойства, параметры, внутренние и внешние связи с заданной разработчиком точностью. Служит для изучения свойств объекта реального мира путем исследования модели.

Объект моделирования может быть как простым (например, изделие без учета воздействия среды), так и сложным (например, взаимодействие изделия с изделием, изделия со средой и т.п.).

Аспектом исследования (моделирования) могут являться отдельные свойства или взаимосвязанные свойства, определяющие закономерность изменения характеристик изделия, важные для решения конкретной задачи.

Возвращаясь к обоснованию выбора математической модели (математических моделей) из числа существующих для использования их в цифровом двойнике циркуляции судна (в частности, в операционном цифровом двойнике) и исходя из общих принципов построения цифрового двойника циркуляции судна, следующим образом сформулируем требования к указанным моделям.

Точный учёт в математической модели всех сил, влияющих на движение судна и действующих как стороны самого судна, описывающего циркуляцию с переложённым рулём, так и со стороны окружающей среды, – задача сложная. Одновременно, попытка принять во внимание все гидродинамические воздействия приводит к расширению системы датчиков и росту подлежащих учёту эмпирических параметров модели и вычислительных (временных) затрат, связанных с численным решением систем уравнений. В итоге такую «идеальную» модель будет проблематично использовать в реальном времени.

Таким образом, математическая модель движения судна для цифрового двойника должна удовлетворять двум требованиям – простотой и одновременно оптимальным учётом всех сил, действующих на судно при его движении на циркуляции. На первый взгляд эти требования являются взаимоисключающими, однако балансировка и рациональное их соотношение вполне возможны.

Очевидным является требование к математической модели в отношении того, что перечень её входных параметров должен совпадать с перечнем параметров процесса, для которого создаётся цифровой двойник (т.е. процесса циркуляции). Здесь следует допустить, что перечень входных параметров математической модели может быть избыточным, но подобная избыточность должна определяться исключительно теми параметрами, которые известны и постоянны и для получения которых нет необходимости в оборудовании судна дополнительными датчиками.

Практически таким же образом формулируются требования и к выходным параметрам математической модели.

В контексте требований к модели в отношении её входных и выходных параметров следует заметить, что они формально могут и отличаться от параметров и характеристик процесса, как они определены выше, но могут быть связаны с ними некоторыми функциональными зависимостями.

Математическая модель циркуляции с целью её использования в цифровом двойнике в обязательном порядке должна подлежать калибровке, позволяющей по расхождению характеристик процесса и выходных параметров модели изменять эмпирические коэффициенты для минимизации погрешности и тем самым повышения адекватности.

В настоящее время разработано множество математических моделей судна, которые представляют собой совокупность математических выражений, в основном дифференциальных, – от простых линейных и одномерных до чрезвычайно сложных многомерных и нелинейных математических моделей динамики судна [13].

Так, в работе [14] рассмотрены восемь частично линеаризованных и нелинейных моделей, проанализированы достоинства, недостатки и ограничения этих моделей, а также проведена оценка их применимости в навигационных тренажёрах и в системах прогнозирования движения судов. В качестве резюме этого исследования можно процитировать следующий вывод авторов: «...ни одна модель не является идеальной, ни одна не обеспечивает приемлемую точность сразу по всем стандартным маневрам ни для одного судна» [14, с. 205].

В свою очередь, исследование [15] в своей преамбуле содержит также анализ математических моделей. В частности, в ней проведена оценка модели Абковица [16], в которой её недостатком является необходимость идентификации большого количество гидродинамических параметров.

В работе [17] рассмотрена возможность решения задачи моделирования и идентификации параметров математических моделей надводных судов в применении к модифицированной модели Номото [18] второго порядка. Модель судна при этом идентифицируется путем анализа угла поворота руля, скорости наклона, качания и рыскания, полученных в результате экспериментальных испытаний, что не всегда возможно [15].

В статье [18] приводится довольно подробный анализ кинематики судна при маневрировании, за которым следует обсуждение различных форм динамических уравнений и параметрического представления гидродинамических сил. Особое внимание уделяется сравнению методов оценки параметров моделей маневрирования.

В исследовании [19] на отдельных примерах (разгон-торможение судна, рыскание с дрейфом, рыскание с дрейфом и креном, бортовая, вертикальная и килевая качки) рассмотрены различные упрощенные частные математические модели движения.

В работе [20] предложен метод построения формализованных моделей процесса маневрирования морского судна без линеаризации и упрощений и обеспечения идентификации ее параметров для конкретного судна. Однако для адекватной работы таких моделей требуется непростая идентификация параметров, а получающиеся уравнения могут не подходить для моделирования в реальном времени [15].

Достаточно много работ посвящено решению отдельных конкретных задач [15]. Например, в работе [21] предлагается математическая модель неустановившегося криволинейного движения судна на повороте реки, а в [22] сделан упор на описание движения судна на циркуляции.

Ряд исследований посвящён математическим моделям, основанным на кинематических уравнениях. Так, в статье [23] предложена простая кинематическая модель динамики судна, позволяющая прогнозировать траекторию движения как собственного судна, так и судов-целей в акватории, а также представлен алгоритм моделирования движения судна.

Однако следует отметить, что в условиях реальной эксплуатации судам приходится совершать маневры, имеющие в той или иной мере неустановившийся характер, подверженный многим воздействиям физического характера [15]. Поэтому для описания движения судна в различных ситуациях требуются математические модели, основанные на физических уравнениях движения, так как качественная имитация поведения в реальных условиях невозможна без достаточно точного учета всех внешних факторов. Этого практически невозможно добиться в чисто кинематических моделях. Если, например, сосредоточиться только на описании движения судна на циркуляции, то дополнительный учет ветра или волнения моря может сильно исказить полученные уравнения.

Представленные краткие описание и анализ математических моделей являются даже не вершиной айсберга, а лишь малой, но показательной его толикой. Далее ограничимся лишь констатацией результатов эвристического экскурса по множеству математических моделей судна.

Итак, при решении задачи формирования эксплуатационного процессного цифрового двойника циркуляции судна на первом этапе предлагается использовать модели Сотникова, Зубкова-Третьякова-Несмелова и один из вариантов модели Номото.

Обобщенная математическая модель движения судна [24] построена И.И. Сотниковым на основе нескольких существующих моделей (в частности, коэффициенты аппроксимационных зависимостей для расчета разных сил и моментов берутся из разных моделей).

Входными данными этой модели являются технические параметры судна, внешние условия плавания, угол перекладки руля, частота вращения и шаговое отношение гребного винта, положение регулятора подруливающего устройства. В свою очередь, выходные данные модели представляют собой зависимости кинематических параметров – координат, углов курса и дрейфа, линейной и угловой скорости – от времени.

Задача моделирования здесь сводится к задаче Коши для системы из шести нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, где в качестве начальных условий принимаются и считаются известными кинематические параметры в начальный момент времени.

Преимущество этой модели заключается среди прочего и в том, что она не только подлежит калибровке, но и сопровождается готовой методикой этой процедуры, заключающейся в модификации формул, входящих в математическую модель. В эти формулы добавляются некоторые калибровочные параметры (вектор калибровочных параметров), которые подбираются таким образом, чтобы уменьшить расхождение между результатами моделирования и фактическими значениями выходных характеристик (минимизировать относительное среднеквадратическое отклонение). Непосредственно калибровка выполняется градиентным методом, на каждом шаге которого осуществляется уточнение вектора калибровочных параметров.

Калибровка модели И.И. Сотникова может быть выполнена по следующим параметрам: по коэффициенту лобового сопротивления, по поправочному коэффициенту для упора винта, коэффициенту влияния гребного винта на работу руля, максимальному времени перекладки руля с одного борта на другой и по двум коэффициентам демпфирующего момента [24].

Без таковой методики, но с очевидной способностью к калибровке, представляется модель Зубкова-Третьякова-Несмелова [15], основанная на физических уравнениях движения и описывающая движение судна на различных участках маневрирования, в том числе и на циркуляции, и учитывающая волнение моря во всем диапазоне шкалы Бофорта.

В основе этой модели лежат уравнения поступательного и вращательного движения твердого тела. Динамика судна определяется действием сил тяжести, силы Архимеда, тягой движителя (упором винта), гидродинамических сил на корпусе судна, сил от волн и от подруливающего устройства, а также сил, порождаемых поворотом пера руля [15].

Модель также позволяет учесть основные детали движения судна на всех трех периодах циркуляционного движения: на маневренном, эволюционном (переходном) и установившемся. Параметризацией и калибровкой можно добиться схождения модели по традиционным элементам циркуляции. На основе входных данных на каждом временном шаге решения уравнений движения производится расчет всех сил.

Поведение модели движения на каждом шаге интегрирования определяется вектором входных параметров (управление, внешняя среда) и текущим состоянием. Результатом работы является новый вектор состояния системы. Входные параметры включают управляющие воздействия и внешнюю среду (обороты движителей, угол перекладки руля, геометрия волнового поля, балльность волн по шкале Бофорта) и состояние системы (координаты центра масс судна, курс, дифферент, крен, линейные скорости относительно грунта, угловые скорости).

Результатом интегрирования уравнений движения на очередном шаге является изменение состояния, чего для цифрового двойника циркуляции судна вполне достаточно.

Упомянутый выше и достаточно известный вариант модели Номото, который можно использовать в цифровом двойнике циркуляции, имеет вид [25]:

$$T_c \ddot{k} + \dot{k} = K_p \beta,$$

где k – курс судна;

T_c – постоянная времени судна;

K_p – коэффициент эффективности руля;

β – угол перекладки руля.

Однако для этой модели при её использовании в цифровом двойнике предусмотрена более узкоспециализированная задача, чем по входным параметрам определять вектор характеристик процесса циркуляции. Её планируется использовать исключительно для определения по входным параметрам постоянной времени, а через последнюю – длительность эволюционного периода и периода установившийся циркуляции.

Заключение

Таким образом, математические модели циркуляции следует считать неотъемлемой частью операционной среды цифрового двойника этого процесса судовождения. Более того, есть обоснованный повод принять их за сущностный признак цифрового двойника. Близкое к бесконечному множество математических модели судна исключает прямую необходимость в разработке специальной (под цифровой двойник) модели. Однако традиционная проблема выбора присутствует и здесь, а описанные выше применимые математические модели не являются единственными, удовлетворяющими сформулированным требованиям. Кроме того, в обязательном порядке необходимо установить правила взаимоотношений используемых в ДТ моделей и результатов их работы (через обоснованные весовые коэффициенты либо через дифференциацию на основную и вспомогательные, либо через правило приоритетов, либо иным образом).

Выводы:

– в качестве математических моделей циркуляции судна для их интеграции в структуру цифрового двойника циркуляции судна допустимы существующие математические модели судна при условии удовлетворения ими сформулированных выше минимальных требований;

– из числа существующих математических моделей судна в цифровом двойнике циркуляции судна предлагается использовать обобщённую математическую модель И.И. Сотникова, математическую модель, разработанную В.В. Зубковым, А.Д. Третьяковым и А.В. Несмеловым, а также модифицированную математическую модель К. Номото.

Литература

1. Словарь бизнес-терминов для предпринимателей – образовательная платформа Альфа-Курс. Тренд. URL: <https://kurs.alfabank.ru/vocabulary/trend/> (дата обращения 15.05.2026).
2. **Екимова Н.А.** Глобальные мегатренды и новые технологии: вызовы и угрозы постиндустриальной экономике // Экономические и социальные перемены: факты, тенденции, прогноз. 2021. Т. 14. № 5. С. 116-134. DOI 10.15838/esc.2021.5.77.7.
3. **Лобашева А.С.** Влияние мегатрендов на трансформацию бизнес-среды и общества // Телескоп: журнал социологических и маркетинговых исследований. 2026. № 1(21). С. 116-134. DOI: 10.24412/1994-3776-2026-1-146-154.
4. **Сакович В.А., Моисеенко Е.Г.** Мегатренды, меняющие мир: современность, перспектива, вызовы и опасности // Сацьяльна-економічні і правові дослідження. 2022. № 4(70). С. 66-77.

5. Указ Президента Российской Федерации от 07.05.2024 г. № 309 «О национальных целях развития Российской Федерации на период до 2030 года и на перспективу до 2036 года». URL: <http://www.kremlin.ru/acts/bank/50542> (дата обращения 15.05.2026).
6. **Grieves M., Vickers J.** Digital Twin: Mitigating Unpredictable, Undesirable Emergent Behavior in Complex Systems // *Transdisciplinary Perspectives on Complex Systems*. Springer, Cham, 2017. P. 85–113. DOI: 10.1007/978-3-319-38756-7_4.
7. ГОСТ Р 57700.37-2021. Компьютерные модели и моделирование. Цифровые двойники изделий. Общие положения. Введ. 01.01.2022. М.: Российский институт стандартизации, 2021. 11 с.
8. **Ермаков С.В., Мулина Е.В., Малинин Н.Ж.** Цифровой двойник судна в период эксплуатации и оценка возможности его использования в целях построения и реализации траектории морских автономных надводных судов // *Вестн. Астрахан. гос. техн. ун-та. Сер.: Морская техника и технология*. 2025. № 2. С. 48–58. DOI 10.24143/2073-1574-2025-2-48-58.
9. **Алиев Т.И.** Основы моделирования дискретных систем. СПб.: СПбГУ ИТМО, 2009. 363 с.
10. **Антонов В.А., Письменный М.Н.** Теоретические вопросы управления судном. Владивосток: МГУ им. адм. Г.И. Невельского, 2007. 78 с.
11. **Шарлай Г.Н.** Маневрирование и управление морским судном. М.: Моркнига, 2015. 518 с.
12. ГОСТ Р 57412-2017. Компьютерные модели в процессах разработки, производства и эксплуатации изделий. Общие положения. Введ. 01.07.2017. М.: Стандартинформ, 2018. 11 с.
13. **Чинчукова Е.П.** Системы адаптивного управления движением судна по курсу: дисс. ... канд. техн. наук: 05.22.19. Владивосток, 2020. 131 с.
14. **Юдин Ю.И., Сотников И.И.** Математические модели плоскопараллельного движения судна. Классификация и критический анализ // *Вестник МГТУ. Труды Мурманского государственного технического университета*. 2006. Т. 9, № 2. С. 200–208.
15. **Зубков В.В., Третьяков А.Д., Несмелов А.В.** Моделирование движения надводных кораблей в навигационных тренажерах // *Программные продукты и системы*. 2026. Т. 39. № 1. С. 031–038. DOI 10.15827/0236-235X.153.031-038.
16. **Abkowitz M.A.** Lectures on ship hydrodynamics steering and manoeuvrability. Tech. Rep. Hy-5. Hydro and Aerodynamics Laboratory, Lyngby, Denmark, 1964.
17. **Нгуен Хак Тунг, Власов С.М., Скобелева А.В.** Математическое моделирование и идентификация параметров модели надводного судна // *Науч.-технич. вестн. информационных технологий, механики и оптики*. 2021. Т. 21. № 3. С. 418–425. DOI 10.17586/2226-1494-2021-21-3-418-425.
18. **Sutulo S., Guedes Soares C.** Mathematical models for simulation of manoeuvring performance of ships. *Marine Technology and Engineering*, 2011. P. 661–698.
19. **Амбросовская Е.Б.** Упрощенные математические модели для судовых систем управления движением // *Морские интеллектуальные технологии*. 2024. №. 3. Ч. 1. С. 156–165. DOI 10.37220/MIT.2024.65.3.037.
20. **Ивановский Н.В.** Новый способ построения математической модели маневрирования морского судна // *Вестн. КГМТУ. Сер. Морские технологии*. 2024. № 3. С. 49–57.
21. **Тихонов В.И., Бажанкин Ю.В., Осокин И.М., Лобанов В.А.** Математическое моделирование процесса перевода судна с поворота заданного радиуса на прямолинейную траекторию // *Научные проблемы водного транспорта*. 2025. № 83. С. 224–237. DOI 10.37890/jwt.vi83.597.

22. **Abdel-latif S., Abdel-geliel M., Zakzouk E.E.** Simulation of ship maneuvering behavior based on the modular mathematical model // Proc. 21st MED Conf., 2013, pp. 94-99. DOI 10.1109/MED.2013.6608704.
23. **Смоленцев С.С., Исаков Д.В.** Моделирование движения судна на основе упрощенной кинематической модели // Вестн. Государственного университета морского и речного флота имени адмирала С.О. Макарова. 2018. Т. 10. № 6. С. 1111-1121. DOI 10.21821/2309-5180-2018-10-6-1111-1121.
24. **Сотников И.И.** Математические модели, вычислительные схемы анализа и компьютерное моделирование движения судна: дисс. ... канд. техн. наук: 05.13.18. Мурманск, 2007. 200 с.
25. **Van Amerongen J.** Adaptive steering of ships: A model-reference approach to improved manoeuvring and economical course keeping. Doctoral Thesis. Technische Hogeschool Delft, Netherlands. 1982. 193 p.