

ТЕОРИЯ ОЧЕРЕДЕЙ – НОВЫЕ ВОЗМОЖНОСТИ

Ю. И. Рыжиков (Санкт-Петербург)

Введение

Возникновение очередей в самых разнообразных сферах человеческой деятельности является естественной платой за *совместное использование ограниченных ресурсов* и вынуждает искать наивыгоднейший компромисс между стоимостью системы обслуживания и ущербом от ожидания потребителей. Теория массового обслуживания (ТМО) имеет богатую историю – в 2009 г. отмечалось ее столетие, развитый математический аппарат и практически необозримый диапазон применений, в том числе на флоте. В частности, Б.В. Гнеденко с ее помощью раскрыл причины некорректности методов оценки пропускной способности портов еще в 1950-х гг. К сферам ее морских применений относится, в частности, анализ:

- систем ситуационного анализа на боевых информационных постах (например, при моделировании последствий решений, принятых в ходе борьбы за живучесть корабля [1]);
- патрулирования арктических морей;
- проводки ледовых караванов в Арктике и антипиратского сопровождения в южных морях;
- разгрузки и погрузки кораблей;
- проведения ремонтно-восстановительных работ на борту, в пунктах базирования и на судостроительных заводах;
- взлета и посадки самолетов, в том числе, для авианесущих кораблей;
- процессов ликвидации аварийных и иных ситуаций, требующих быстрого реагирования (например, пожарных, медицинских, антипиратских, нарушения границ рыболовных зон).

Учитывая это разнообразие, мы далее будем обсуждать методы обсчета соответствующих *математических моделей*.

Задачи поиска вышеуказанного компромисса приходится решать не только при проектировании вновь создаваемых систем и сетей обслуживания (СМО, СеМО), но и *в процессе эксплуатации имеющихся* – при увеличении нагрузки; изменении трудоемкости обработки заявок; выходе из строя, деградации или модернизации техники; снижении квалификации персонала; пересмотре требований к оперативности обработки заявок и т. п.

Подобные задачи можно решать и методами имитационного моделирования. Однако автоматизирующие эти методы системы типа GPSS или AnyLogic лишь претендуют на универсальность, причем, границы этих претензий пользователю неизвестны. Неизбежной платой за псевдоуниверсальность является переусложнение рабочей программы, что замедляет и без того немалое время счета. Названные недостатки снимаются при программировании модели на языках типа Фортран, но отладка таких моделей ввиду сложной логики и взаимной зависимости ветвей алгоритма очень не проста. Несовершенство датчиков псевдослучайных чисел исключает надежды на неограниченное повышение точности при увеличении числа испытаний, о чем свидетельствует эксперимент автора по определению числа π методом статистических испытаний [2]. Эти и некоторые другие соображения вынуждают прибегать к имитационному моделированию лишь при отсутствии аналитико-численных альтернатив.

Состояние теории очередей и управления запасами

С сожалением приходится констатировать, что *использование* результатов ТМО существенно отстает от уровня развития теории, причем не только в России. Учебная ли-

тература (см., например, [6]) освещает в основном марковские (экспоненциальные) СМО, в этом смысле недалеко ушла от первых работ Эрланга и часто содержит элементарные ошибки. Публикуемые методы расчета немарковских систем [4, 5, 7, 8] редко позволяют довести результаты до числа, а для многоканальных систем разбросаны по журнальным статьям. Работы по расчету *сетей обслуживания* ограничиваются классом задач, подпадающих под условия известной теоремы ВСМР, т. е. практически бесполезны.

Еще хуже обстоит дело с методами смыкающейся с ТМО *теории запасов*, в настоящее время рассматриваемой как составная часть логистики. За последнее десятилетие в России было опубликовано около 100 книг по логистике, математическое содержание которых исчерпывается столетней давности формулой Уилсона для экономического объема заказа – см. их обзор в [9]. Методы расчета восстанавливаемого ЗИПа, публикуемые главным образом в американском журнале «Naval Research Logistics» в рамках серии METRIC-проектов эшелонированных систем снабжения (см. опять же [9]), опираются на самые примитивные модели теории очередей.

В общем, потенциал экономико-математических теорий, имеющих отношение к рассматриваемой проблеме, используется явно недостаточно. Необходимо соединить на современном уровне теории массового обслуживания (теории очередей), боевой эффективности, управления запасами и внедрить их в процесс обучения будущих инженеров флота; программно реализовать основные этапы расчетных методик.

Теоретические основы численных методов теории очередей

Главной особенностью обсуждаемых методов является их ориентация на расчетные схемы, позволяющие «довести результаты до числа». Ключевым элементом является аппроксимация вероятностных распределений *по методу моментов* (замена исходных распределений интервалов между смежными заявками и длительностей обслуживания более удобными для расчетов с сохранением максимально возможного числа моментов этих распределений). При этом в классах фазовых распределений (Эрланга, Кокса и гиперэкспоненциального) допускаются неожиданные даже для многих профессионалов комплекснозначные параметры, что позволяет расширить области применения упомянутых распределений и организовать взаимное тестирование расчетных процедур на пересечении областей их применимости [6]. Для демонстрации необходимости учета высших моментов приведем формулу Полячека-Хинчина для среднего времени ожидания начала обслуживания в системе M/G/1 (одноканальная, простейший поток заявок, произвольное распределение длительности обслуживания):

$$w = \frac{\lambda b_2}{2(1 - \lambda b_1)},$$

где λ – интенсивность входящего потока, а $\{b_i\}$ – моменты распределения длительности обслуживания.

Поскольку $b_2 = b_1^2(1 + v^2)$, где v – коэффициент вариации, при регулярном обслуживании среднее время ожидания будет вдвое меньше, чем при экспоненциальном, а в случае $v = 2$ – в 2,5 раза больше.

Основой всех схем расчета систем обслуживания является применение *законов сохранения*: заявок, стационарной очереди, стационарных вероятностей, объема работы. В частности, второй из этих законов позволяет по сравнительно легко вычисляемым вероятностям состояний найти *временные характеристики* систем обслуживания, а четвертый – элементарно получать средние времена ожидания для одноканальных систем, в том числе формулу Полячека-Хинчина и ее продвинутые версии для дисциплин с приоритетным обслуживанием.

Сложные многоканальные системы с *немарковским* (отличным от показательно распределенного) обслуживанием рассчитываются на основе фазовых аппроксимаций

обслуживания, по которым строятся: множество возможных состояний СМО, матрицы интенсивностей переходов между ярусами диаграммы; записываемые в векторно-матричной форме уравнения баланса для векторов стационарных вероятностей состояний системы. Далее эти вероятности рассчитываются с помощью итерационного метода Такахаси-Таками или методом матрично-геометрической прогрессии (МГП).

Для первого из них в [10] разработаны два варианта улучшения начальных приближений к векторам условных вероятностей микросостояний, исследовано влияние смены направления прогонки.

Использование приемов экономизации в разы уменьшило трудоемкость счета. Установлены предельные (по числу каналов) размерности решаемых задач: порядка 250 для вещественных исходных данных и 40 – для комплексных.

Метод МГП основан на представлении векторов вероятностей микросостояний для $j > n$ в виде $\gamma_j = \gamma_{j-1}R$, где R – знаменатель прогрессии, вычисляемый как решение матричного квадратного уравнения. Сопоставлялись варианты расчета R с помощью простой итерации и свехрелаксации по Люстернику. Были исследованы варианты итераций по Ньютону с разными начальными приближениями и с дополнительным итерационным уточнением поправок внутри ньютонова шага.

Заключительным шагом МГП являлось нахождение вероятностей начальных микросостояний через систему линейных уравнений с 6-м порядком роста трудоемкости. При большом числе каналов в эту систему входили вероятности, разброс которых превышал 10 порядков, и вследствие набегания погрешностей часть вероятностей оказывалась отрицательными. Переход к счету в учетверенной разрядной сетке (Интел-Фортран) приводил к неприемлемым временным затратам, вследствие чего была предложена модификация МГП с итерационным расчетом начальных вероятностей.

Реальные процессы обслуживания происходят, как правило, не в системах, а в *сетях обслуживания*: заявка для получения «полного удовлетворения» должна пройти несколько специализированных узлов (возможно, с повторами). Практически сети приходится обсчитывать с помощью *потокоэквивалентной декомпозиции*. Построены варианты расчетных схем для разомкнутых, замкнутых и смешанных систем, для однородных и неоднородных по трудоемкости и видам обслуживания заявок. Разработаны варианты схем с простейшими потоками и с учетом преобразования потоков в сети в процессе их прореживания, суммирования на входе очередных узлов и трансформации потока в узле.

В качестве выходной характеристики обсчета сети используется ДФР времени пребывания заявки в сети, которая строится с помощью получаемых из преобразования Лапласа-Стилтьеса (ПЛС) моментов упомянутого распределения. Моменты рассчитываются с помощью многократного численного дифференцирования ПЛС.

Программная реализация

Все вышеперечисленные и многие не названные здесь задачи доведены до программной реализации на современном Фортране и сведены в новую версию пакета МОСТ (Массовое Обслуживание – Стационарные задачи).

Пакет МОСТ используется в режиме *сборочного программирования*: главная программа состоит в основном из вызовов процедур пакета. Например, для расчета ДФР распределения времени пребывания заявки в системе $M / E_3 / 4$ необходима цепочка вызовов

HYPER3 – MH2N – MFACT – MTIME – FCWEIB

Здесь HYPER3 дает параметры H_2 -аппроксимации распределения обслуживания по трем моментам, MH2N – стационарное распределение числа заявок в системе, MFACT – факториальные моменты этого распределения, MTIME – рассчитанные по формулам Брюмелля моменты распределения времени пребывания заявки в системе, FCWEIB – построенную по заданному набору точек ДФР.

С. В. Кокориным разработана усеченная версия МОСТа - для непрофессионалов и с современным графическим интерфейсом. В ней вызывающая программа (для решения ограниченного подмножества типичных задач) строится *автоматически* – в процессе диалога с пользователем.

Заключение

Описанный пакет программ разрабатывался под действием главным образом внутренних стимулов, из соображений логической замкнутости учебной дисциплины «Компьютерное моделирование» и с ориентацией на вычислительные применения. Фантастический рост быстродействия современных ЭВМ уменьшил актуальность этих применений. Вхождение в новые области ставит перед специалистами по теории очередей задачи, совершенно новые или решавшиеся ранее при чрезмерно упрощающих предположениях. Например, пожарные службы и организаторы погрузо-разгрузочных работ заинтересованы в анализе систем «со взаимопомощью каналов». Жизнь заставила рассматривать такие специфические задачи, как появление «отрицательных» заявок, вынуждающих прерванные «положительные» повторно проходить обслуживание в узлах сети (задачи защиты информации) или «нетерпение» заявок, покидающих систему при превышении ожиданием некоторого случайного предела (ожидание судов в портах или пациентов – на сложные обследования и госпитализацию). Неисчерпаемым источником сложных задач являются проблемы многоуровневого восстанавливаемого ЗИПа, в особенности реверсивная логистика и ситуации с «каннибализмом».

В связи с изложенным приходится отметить, что в теории очередей «сверху» уже давно ничего не валяется: простые задачи решены, а сложные (в отличие от имитации) требуют серьезных и высококвалифицированных усилий. Однако такие усилия со временем всегда окупаются благодаря скорости получения решений и их высокой точности.

Литература

1. **Ковтун Л. И.** Супервизорная система автоматизированного иерархически структурированными организационно-техническими комплексами морской техники с использованием имитационно-вычислительных симуляторов. – СПб.: Труды ЦНИИ им. А. Н. Крылова, 2010, вып. 54 (338), с. 5–48.
2. **Рыжиков Ю. И.** Имитационное моделирование: Курс лекций. – СПб.: ВКА им. А. Ф. Можайского, 2007. – 125 с.
3. **Рыжиков Ю. И.** Имитационное моделирование. Теория и технологии. – СПб.: КОРОНА принт, 2004. – 380 с.
4. **Бочаров П. П., Печинкин А. В.** Теория массового обслуживания: Учебник. – М.: изд-во РУДН, 1995. – 529 с.
5. **Климов Г. П.** Теория массового обслуживания: Курс лекций. – М.: МГУ, 2011. – 312 с.
6. **Козликин В. И.** Теория массового обслуживания: Учебное пособие. – Курск: Ю.-З. Гос. Ун-т, 2013. – 142 с.
7. **Вишневецкий В. М.** Теоретические основы проектирования компьютерных сетей. – М.: Техносфера, 2003. – 512 с.
8. **Bhat U. N.** An introduction to Queueing Theory. – Springer, 2015. – 339 pp.
9. **Рыжиков Ю. И.** Логистика, очереди и управление запасами: Учебное пособие. – СПб.: ГУАП, Ин-т информатики РАН, 2011. – 477 с.
10. **Рыжиков Ю. И.** Компьютерное моделирование: Курс лекций. – СПб.: ВКА им. А. Ф. Можайского, 2007. – 164 с.