

Моделирование жестких гибридных систем с односторонними событиями в среде ИСМА ♦

Шорников Ю.В.¹, Достовалов Д.Н.²

¹Россия, Конструкторско-технологический институт вычислительной техники СО РАН,
shornikov@inbox.ru

²Россия, Новосибирский государственный технический университет,
dostovalov.dmitr@mail.ru

Abstract: - The description of algorithm for numerical analysis of hybrid systems with stiff modes. The explicit or implicit method, depending on stiffness of problem. In the calculations by explicit method the accuracy and stability of calculations is controlled. A theorem on choice of integration step and algorithm for asymptotic approximation to the boundary mode of hybrid system.

Ключевые слова: – Жесткость, событийная функция, адаптивный алгоритм интегрирования, обнаружение событий.

1 Введение

Существует множество систем, поведение которых удобно описывать в виде последовательной смены непрерывных процессов. Моменты времени, в которых происходит изменение непрерывных режимов, порождают дискретную последовательность состояний системы. Такие комбинированные дискретно-непрерывные системы называют гибридными или системами с переключением [1].

Режимное поведение гибридных систем (ГС) представим в виде системы алгебро-дифференциальных уравнений с ограничениями

$$\begin{aligned}y' &= f(t, x, y), \quad x = \phi(t, x, y), \\pr &: g(y, t) < 0, \\t &\in [t_0, t_k], \quad x(t_0) = x_0, \quad y(t_0) = y_0,\end{aligned}\tag{1}$$

где $x \in R^{N_x}$, $y \in R^N$, $f: R \times R^N \times R^{N_x} \rightarrow R^N$, $\phi: R \times R^N \times R^{N_x} \rightarrow R^{N_x}$, $g: R \times R^N \rightarrow R^S$, $S \leq N$.

Классические динамические системы, записанные в форме задачи Коши, являются частным случаем ГС с одним режимом. Вектор-функция $g(y, t)$ называется событийной функцией или предохранителем, а предикат pr определяет условия существования соответствующего режима ГС. Неравенство $g(y, t) < 0$ означает, что фазовая траектория в текущем режиме не должна пересекать границу $g(y, t) = 0$. События, возникающие при нарушении этого условия и приводящие к переходу в другой режим, не пересекая границу, называются односторонними. Многие практические задачи характеризуются жесткими режимами, а границы поверхности $g(y, t) = 0$ имеют острые углы или решение имеет несколько корней на границе [1].

Компьютерный анализ ГС обычно производится в окружении инструментальных средств моделирования, передовыми из которых являются Charon (США), AnyLogic (Россия), Scicos (Франция), MVS (Россия), Hybrid Toolbox и HyVisual (США), DYMOILA (Швеция) и другие. Ниже рассмотрены особенности моделирования гибридных систем (ГС) в инструментальной среде ИСМА [2].

♦ Работа поддержана грантом РФФИ 11-01-00106-а.

2 Адаптивный алгоритм решения жестких задач

Для решения дифференциальной задачи из (1) будем использовать явные методы типа Рунге-Кутты [3], которые имеют вид:

$$y_{n+1} = y_n + \sum_{i=1}^m p_i k_i, \quad k_i = hf(t_n + \alpha_i h, y_n + \sum_{j=1}^{i-1} \beta_{ij} k_j), \quad \alpha_1 = 0, \quad (2)$$

где $\alpha_i, \beta_{ij}, p_i, 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq i-1$ – числовые коэффициенты, k_i – стадии метода, m – число стадий.

Численные формулы (2) хорошо приспособлены для практических расчетов, поскольку они не требуют вычисления дополнительных начальных значений и позволяют легко изменять шаг интегрирования.

Для анализа задач повышенной жесткости применение явных методов, в том числе и алгоритмов интегрирования переменного порядка и шага, не всегда эффективно или вообще невозможно. Явный вычислительный процесс может потребовать гораздо больших временных затрат по сравнению с применением неявных методов. Это вызвано тем, что методы (2) имеют ограниченные области устойчивости. Разумное комбинирование явных и L -устойчивых методов по критерию устойчивости может улучшить показатели эффективности и надежности вычислительных алгоритмов. Для анализа режимов ГС с односторонними событиями и режимами повышенной жесткости предлагается применять адаптивный алгоритм DISPF1_RADAU с автоматическим контролем жесткости и выбором численной схемы в зависимости от текущего решения.

Алгоритм DISPF1_RADAU основан на оригинальном явном алгоритме DISPF и известном неявном методе RADAU5. Метод переменного порядка DISPF разработан в ИВМ СО РАН [3] и предназначен для решения задач повышенной жесткости, что обеспечивается с помощью контроля как точности, так и устойчивости вычислений. Дополнительно в метод DISPF введены контроль жесткости и некоторыми другие изменения, в результате построен модифицированный алгоритм DISPF1. Для анализа существенно жестких режимов используется метод RADAU5, основанный на неявном методе Рунге-Кутты (трехстадийный метод Радо_ПА), модифицированный в RADAU введением алгоритма по контролю жесткости режима.

Жесткость режимов ГС можно обнаружить с помощью оценки максимального собственного значения матрицы Якоби $\lambda_{n, \max}$ исходной задачи. Для явных методов такая оценка определяется степенным методом через ранее вычисленные стадии. Таким образом, зная значение $\lambda_{n, \max}$, на каждом шаге можно контролировать устойчивость численной схемы с помощью неравенства

$$h |\lambda_{n, \max}| \leq D, \quad (3)$$

где h – шаг интегрирования, а постоянная D ограничивает интервал устойчивости.

Таким образом, обнаружение жесткости сводится к контролю неравенства (3). В практических расчетах подсчитывается количество нарушений данного неравенства. При превышении заданного предела производится переключение с явной схемы на неявный метод RADAU5. Такой подход позволяет сгладить грубость оценки максимального собственного числа в явных методах.

Для L -устойчивых методов оценка $\lambda_{n, \max}$ матрицы Якоби $\partial f(y_n)/\partial y$ на n -м шаге интегрирования вычисляется через ее норму по формуле

$$|\lambda_{n, \max}| = \|\partial f(y_n)/\partial y\| = \max_{1 \leq i \leq N} \sum_{j=1}^N |\partial f_i(y_n)/\partial y_j|.$$

3 Явный метод переменного порядка и шага

Алгоритм DISPF основан на шестистадийной формуле Рунге-Кутта-Фельберга пятого порядка. На основе стадий Фельберга построены схемы первого, второго и четвертого порядков [3].

Оценка ошибки вычислений при использовании метода пятого порядка осуществляется по формуле

$$C'_n = \varepsilon_{n,5} = \frac{17}{24} \left\| \sum_{i=1}^6 (p_{5i} - p_{4i}) k_i \right\|,$$

где $\|\cdot\|$ – некоторая норма в R^N , а коэффициенты p_{4i} и p_{5i} обеспечивают четвертый и пятый порядок точности соответственно. Таким образом, схема четвертого порядка используется только для контроля точности [3], и соответствующее неравенство имеет вид $C'_n \leq \varepsilon$.

Устойчивость контролируется неравенством $V_n \leq D$, где V_n – оценка максимального собственного числа $\lambda_{n, \max}$ матрицы Якоби, которая определяется соотношением

$$V_n = \frac{1}{9} \max_{1 \leq i \leq N} \left| \frac{(32k_3 - 48k_2 + 16k_1)_i}{(k_2 - k_1)_i} \right|.$$

Постоянное число D можно взять равным 3,6, т.е. примерно равным длине интервала устойчивости схемы пятого порядка.

Контроль устойчивости используется как ограничитель на размер шага интегрирования. В результате прогнозируемый шаг h_{n+1}^n вычисляется по формуле

$$h_{n+1}^n = \max \left[h_n, \min \left(h^{ac}, h^{st} \right) \right],$$

где h_n – величина последнего выполненного шага, h^{ac} – шаг, выбранный по критерию точности, h^{st} – шаг, выбранный по критерию устойчивости.

Метод первого порядка имеет более широкую область устойчивости ($D = 72$) и используется на участке установления, где ошибки за счет неточности невелики. Поэтому для контроля точности вычислений можно использовать оценки локальной ошибки $\varepsilon'_{n,1}$ и $\varepsilon''_{n,1}$ [3], которые можно записать следующим образом

$$A'_n = \varepsilon'_{n,1} = |2 - 4c_2| \cdot \|k_2 - k_1\|,$$

$$A''_n = \varepsilon''_{n,1} = |1 - 2c_2| \cdot \|hf(y_{n+1}) - k_1\|,$$

где $c_2 = 840/D^2$. Для контроля точности вычислений и при выборе длины шага интегрирования используются соответственно неравенства

$$A'_n \leq \varepsilon, \quad A''_n \leq \varepsilon. \quad (4)$$

В силу того, что интервал устойчивости схемы первого порядка примерно в 20 раз шире, чем у метода пятого порядка, при понижении порядка точности шаг интегрирования может быть увеличен в 20 раз. Это приводит к нарушению неравенства (4), и шаг может быть уменьшен до такой величины, что осуществляется обратный переход на формулу пятого порядка. Чтобы избежать таких неоправданных переходов, в состав алгоритма включена промежуточная схема второго порядка. Интервал устойчивости ее примерно равен 28,5. Для контроля точности можно применять неравенства $dA'_n \leq \varepsilon$, $dA''_n \leq \varepsilon$, где $d \approx 0,24$.

4 Тестирование адаптивного алгоритма

Рассмотрим работу алгоритма DISPF1_RADAU с режимом гибридной системы, заданного уравнениями Ван-дер-Поля:

$$y'_1 = y_2, \quad y'_2 = \frac{1}{eps} \left[(1 - y_1 y_2) y_2 - y_1 \right],$$

$$y_1(0) = 2, \quad y_2(0) = 0.$$

Степень жесткости в данном режиме задается параметром $eps \in (0,1]$. Для тестирования алгоритма выберем значения $eps_1 = 3 \cdot 10^{-2}$, $eps_2 = 3 \cdot 10^{-3}$, $eps_3 = 3 \cdot 10^{-4}$, $eps_4 = 3 \cdot 10^{-5}$ и $eps_5 = 3 \cdot 10^{-6}$. С уменьшением значения eps увеличивается жесткость системы. Расчеты проводились с точностью $\varepsilon = 10^{-6}$ на интервале $t \in [0, 10]$. Результаты численного эксперимента представлены в табл. 1, где приведены количество шагов isa , вычисления правой части ifu , возвраты ivo вследствие невыполнения точности расчетов и затраченное время t_{sec} .

В первом случае при $eps_1 = 3 \cdot 10^{-2}$ жесткость режима мала, и переключение на неявный метод не происходит. В четвертом случае при $eps_4 = 3 \cdot 10^{-5}$ жесткость велика, и обратного переключения на метод DISPF1 не происходит. Случай $eps_5 = 3 \cdot 10^{-6}$ для явных методов слишком жесткий. Адаптивный алгоритм позволяет отследить подобную ситуацию и передать управление неявному методу RADAU5.

Во втором и третьем случаях RADAU5 работает только на «жестких» участках, что наглядно иллюстрируется на рис. 1, где отмечены моменты переключения.

Таблица 1

Результаты расчета с различной степенью жесткости								
<i>eps</i>	DISPF1				DISPF1_RADAU			
	<i>isa</i>	<i>ifu</i>	<i>ivo</i>	t_{sec}	<i>isa</i>	<i>ifu</i>	<i>ivo</i>	t_{sec}
eps_1	2328	21180	1441	0,09	2328	21180	1441	0,09
eps_2	6450	46262	1511	0,2	6091	45995	1400	0,21
eps_3	22644	149951	2816	0,8	18693	134912	2410	0,67
eps_4	144339	882951	3382	4,8	6633	70956	1	0,7
eps_5	–	–	–	–	7913	84370	1	0,65

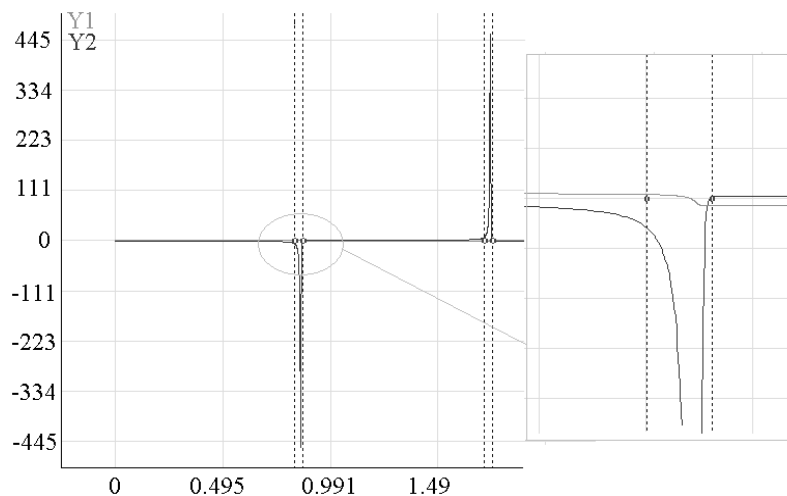


Рис. 1. Результаты моделирования с точками прямого (на RADAU) и обратного (на DISPF1) переключения

Сравнительный анализ эффективности DISPF1_RADAU с оригинальным методом DISPF и известными явными методами STEKS и MERSON для режима ГС в виде уравнения Ван-дер-Поля с параметрами $eps_2 = 3 \cdot 10^{-3}$ приведен в табл. 2. Как видно, наиболее эффективным методом по числу шагов является RADAU, однако на вычисление 3 850 шагов у метода ушло примерно столько же времени, сколько у DISPF ушло на 6 565 шагов и 4 700 возвратов. Отсюда следует, что метод RADAU тратит на вычисление одного шага примерно в 3 раза больше времени, чем метод DISPF. Метод DISPF1_RADAU с обратным переключением улучшает результат метода DISPF, во время моделирования происходят 22 переключения. Несмотря на улучшение результата по количеству шагов незначительно ухудшается показатель времени. Так как основное время работает алгоритм DISPF1, то можно сделать вывод, что переключение между методами не приводит к ощутимым временным потерям.

Таблица 2

Эффективность DISPF1_RADAU						
Характеристика	DISPF	RADAU5	DISPF1_RADAU	STEKS	MERSON	
<i>isa</i>	6565	3850	5704	387	12919	5591
<i>ivo</i>	4685	0	1075	325	136	75
t_{sec}	0,282	0,25	0,296	0,266	0,359	0,297

Приведенный пример наглядно демонстрирует, что применение адаптивного метода снимает сложный для предметного пользователя вопрос о выборе подходящего метода для расчета режимов гибридных систем.

5 Обнаружение событий гибридных систем

Корректность анализа гибридных моделей также определяется точностью обнаружения моментов смены локальных состояний ГС. Поэтому наряду контролем точности, устойчивости и жесткости необходимо учитывать динамику событийной функции, определяющей возникновение событий в ГС. Рассмотрим режим односторонней ГС в виде автономной задачи Коши с ограничениями (1). Любой нелинейный предохранитель $g(y, t)$ можно привести к линейному виду добавлением фазовой переменной $z = g(y, t)$. В результате задачу (1) можно переписать в виде (для простоты изложения опустим алгебраические уравнения)

$$y' = f(y), z' = \frac{\partial g}{\partial y} \cdot f(y) + \frac{\partial g}{\partial t}, z < 0.$$

При решении таких задач явными методами получаем $y_{n+1} = y_n + h_{n+1}\varphi_n$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Тогда событийная динамика описывается соотношением $g_{n+1} = g(y_n + h_{n+1}\varphi_n, t_n + h_{n+1})$. Разлагая g_{n+1} в ряд Тейлора и учитывая линейность $g(y, t)$, получаем зависимость g_{n+1} от прогнозируемого шага h_{n+1} , то есть

$$g_{n+1} = g_n + h_{n+1} \left(\frac{\partial g_n}{\partial y} \cdot \varphi_n + \frac{\partial g_n}{\partial t} \right).$$

Теорема. Выбор шага по формуле

$$h_{n+1} = (\gamma - 1) \frac{g_n}{\frac{\partial g_n}{\partial y} \cdot \varphi_n + \frac{\partial g_n}{\partial t}}, \quad (5)$$

где $\gamma \in (0, 1)$, обеспечивает поведение событийной динамики как устойчивой линейной системы, решение которой приближается к поверхности $g(y, t) = 0$ асимптотически. Доказательство теоремы приведено в [4].

Теперь сформулируем алгоритм интегрирования с учетом прогноза шага через событийную функцию. Пусть решение y_n в точке t_n вычислено с шагом h_n . Тогда приближенное решение в точке t_{n+1} вычисляется по следующему правилу.

Шаг 1. Вычисляется $f_n = f(y_n)$.

Шаг 2. Вычисляются $g_n = g(y_n, t_n)$, $\partial g_n / \partial y = \partial g(y_n, t_n) / \partial y$, $\partial g_n / \partial t = \partial g(y_n, t_n) / \partial t$.

Шаг 3. По формуле (5) вычисляется шаг h_{n+1}^p , причем $\varphi_n = f_n$.

Шаг 4. Вычисляется новый шаг h_{n+1} по формуле $h_{n+1} = \min(h_{n+1}^p, h_{n+1}^n)$, где h_{n+1}^n – шаг, выбранный соответствующим численным методом интегрирования.

Шаг 5. Выполняется следующий шаг интегрирования.

6 Тестирование алгоритма обнаружения событий

Для иллюстрации работы алгоритма рассмотрена типичная гибридная система двух осциллирующих масс на пружинах [4], представленная на рис. 2.

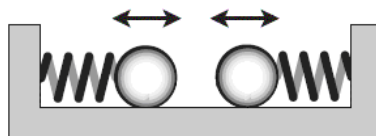


Рис. 2. Система двух осциллирующих масс

Система может находиться в одном из двух локальных состояний, когда грузы двигаются отдельно или вместе. Математическая модель здесь не приводится ввиду близости описания с программной моделью. Компьютерная модель рассматриваемой системы в среде ИСМА имеет вид

```

k1=1; k2=2;
n1=1; n2=2;
m1=1; m2=1;
x1=0;
x2=3;
separate [s < abs(k1*n1-k2*n2-x1*(k1-k2))] is
s~=10;
x1'=v1;
v1'=k1*(n1-x1)/m1;
a1~=(k1*(n1-x1)/m1;
x2'=v2;
v2'=k2*(n2-x2)/m2;
a2~=(k2*(n2-x2)/m2;
from;

```

```

together [ (x1>=x2) and (v1>=v2) ] is
s=10;
v1=(m1*v1+m2*v2)/(m1+m2);
v2=v1;
v1'=(k1*n1+k2*n2-x1*(k1+k2))/(m1+m2)
a1~=(k1*n1+k2*n2-x1*(k1+k2))/(m1+m2)
x1'=v1;
v2'=(k1*n1+k2*n2-x2*(k1+k2))/(m1+m2)
a2~=(k1*n1+k2*n2-x2*(k1+k2))/(m1+m2)
x2'=v2;
s'=-s;
from separate;

```

С включенным алгоритмом обнаружения получены качественные результаты моделирования (рис. 3, слева). Традиционный анализ системы без алгоритма обнаружения не позволяет получить достоверный результат (рис. 3, справа).

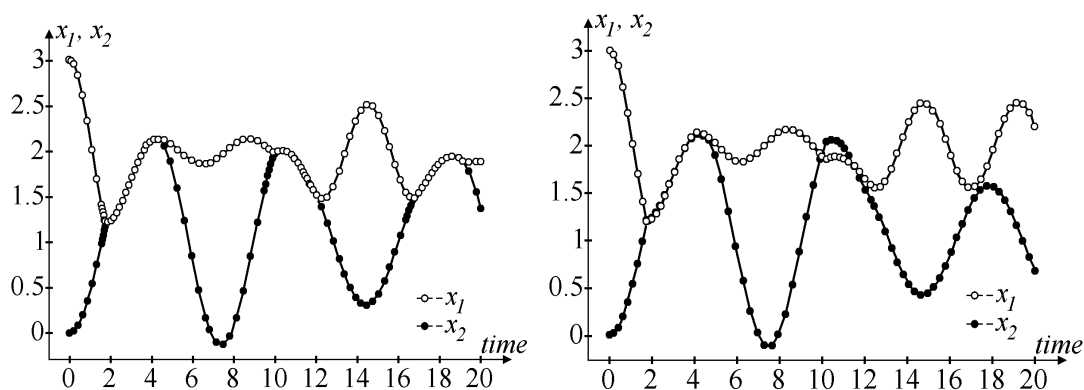


Рис.3. Динамика гибридной системы двух масс

7 Заключение

В работе сформулированы методы численного анализа жестких ГС с односторонними событиями. Адаптивный алгоритм интегрирования сочетает явные и неявную схему. Достоинством решателя является то, что пользователю не требуется выбирать численную схему. Алгоритм выбора шага для асимптотического приближения к границе режима ГС основан на доказанной теореме. Результаты тестирования подтвердили высокую эффективность алгоритмов. Отметим, что не все современные инструменты моделирования ГС позволяют получить качественный результат. Это обусловлено тем, что в них зачастую применяются традиционные методы анализа, не учитывающие перечисленные особенности ГС.

Список использованных источников:

- [1] Esposito J. Accurate event detection for simulating hybrid systems / J. Esposito, V. Kumar, G.J. Pappas // In: Hybrid Systems: Computation and Control (HSCC). Volume LNCS 2034. – Springer-Verlag, 1998.
- [2] Шорников Ю.В. Инструментальные средства машинного анализа / Ю.В. Шорников, В.С. Дружинин, Н.А. Макаров, К.В. Омельченко, И.Н. Томилов // Свидетельство об официальной регистрации программы для ЭВМ № 2005610126. – М.: Роспатент, 2005.
- [3] Новиков Е.А. Явные методы для жестких систем. – Новосибирск: Наука. Сиб. Предпр. РАН, 1997. – 195 с.
- [4] Новиков А.Е. Численное моделирование гибридных систем явным методом третьего порядка в инструментальной среде ИСМА / А.Е. Новиков, Е.А. Новиков, Ю.В. Шорников, Д.Н. Достовалов // Проблемы информатики. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2010, №3(7). - С.73-80.