

ИМИТАЦИОННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ RQ-СИСТЕМЫ M|M|1 С ИСКАЖЕНИЕМ ЗАЯВОК И ИХ ВОССТАНОВЛЕНИЕМ

Я. Е. Измайлова, З. Канылбай

*Национальный исследовательский Томский государственный университет,
г. Томск, Россия*

В данной работе рассматривается RQ-система с искажениями заявок, орбитой восстановления и простейшим потоком входящих заявок. Под «искажением» подразумевается, что заявка может прерваться во время обслуживания, а орбита восстановления предназначена для искаженных заявок. Реализована имитационная модель функционирования системы и получено двумерное распределение вероятностей числа заявок на орбитах ожидания и восстановления. **Ключевые слова:** *система массового обслуживания, повторные вызовы, RQ-система, искажение заявок, дискретно-событийное моделирование*

Введение

RQ-системы массового обслуживания или системы с повторными вызовами представляют собой модели, в которых требования, не получившие обслуживания, уходят на так называемую «орбиту» – виртуальное пространство, из которого они предпринимают повторные попытки получить обслуживание через случайные промежутки времени. Такие системы широко применяются для анализа телекоммуникационных сетей, управления трафиком и передачей данных, где повторные обращения — обычное явление. Обзор подходов к изучению RQ-систем представлен в [1].

RQ-системы с отрицательными заявками расширяют базовую модель, добавляя заявки, которые не требуют обслуживания, но воздействуют на систему, например, прерывая или удаляя положительные заявки. Концепция отрицательных заявок была предложена Геленбе [2] и развита в работах X. Chao и др. [4], а также Gelenbe E. и др. [3]. Исследования Artalejo J. R. и Gomez-Corral A. [5] и [6] демонстрируют применение отрицательных заявок в RQ-системах.

1. Описание модели

В рассматриваемой RQ-системе предполагается, что в систему поступают два независимых простейших потока заявок: «положитель-

ных» с интенсивностью λ и «отрицательных» с интенсивностью γ (рис. 1). Обслуживание производится одним прибором. Время обслуживания одной заявки имеет экспоненциальное распределение с параметром μ . При поступлении положительной заявки, если прибор свободен, она приступает к обслуживанию. В противном случае заявка уходит на орбиту ожидания.

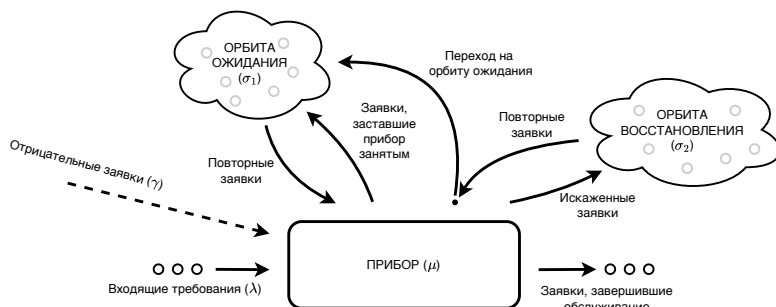


Рис. 1. RQ-система с искажениями заявок

Поступившая отрицательная заявка, если прибор занят, искажает обслуживание текущей положительной заявки, текущая заявка прерывается и уходит на орбиту восстановления, а отрицательная заявка покидает систему. В случае, когда прибор свободен, отрицательная заявка не обслуживается и также покидает систему.

Заявки, находящиеся на орбитах ожидания и восстановления, совершают независимые попытки захватить прибор через экспоненциально распределённые интервалы времени с параметром σ_1 и σ_2 соответственно. Если при попытке захвата прибор свободен, заявка занимает его и начинает обслуживание. Заявки из орбиты восстановления после первой попытки занять прибор переходят на орбиту ожидания. Также заявки, находящиеся на орбите ожидания и заставшие прибор занятым, остаются на той же орбите и осуществляют следующую экспоненциально распределённую задержку с параметром σ_1 .

Цель исследования данной RQ-системы с искажениями заявок и орбитой восстановления – нахождение совместного распределения вероятностей числа заявок на орбитах восстановления и ожидания в стационарном режиме функционирования ($t \rightarrow \infty$).

Построенную математическую модель можно формализовать с помощью марковских цепей, которая описывает динамику работы систе-

мы. Построим граф вероятностей переходов, где номера, указанные на вершинах графа Рис. 2, соответствуют состоянию прибора: 0 – прибор свободен, 1 – прибор занят. Столбцы графа отражают количество заявок на орбите ожидания, а строки — число заявок на орбите восстановления.

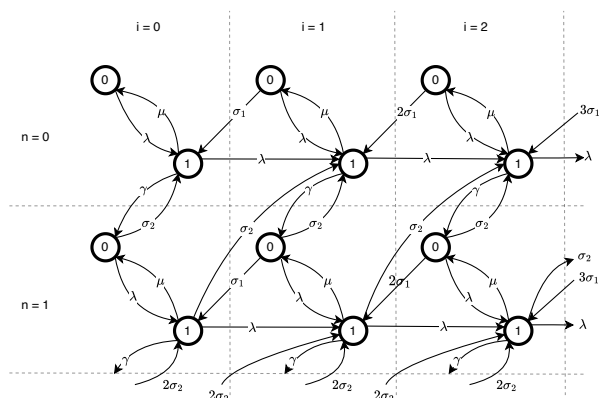


Рис. 2. Граф вероятностей перехода

В дальнейшем состояние системы будем обозначать в виде (i, n, k) , где i – количество заявок на орбите ожидания, n – количество заявок на орбите восстановления, k – состояние прибора.

2. Имитационное моделирование

Для анализа применяется стохастическое дискретно-событийное моделирование (DES). DES представляет систему как последовательность мгновенных событий. Время в DES продвигается скачкообразно, переходя от одного события к следующему.

Реализованный алгоритм 1 основан на продвижении времени к моменту наступления ближайшего события. Для исследуемой системы основными событиями являются:

- Прибытие положительной заявки.
- Искажение обслуживаемой заявки.
- Завершение обслуживания.
- Захват прибора заявкой с орбиты ожидания/восстановления.
- Переход заявки из орбиты восстановления на орбиту ожидания.

Время обслуживания, интервалы времени между поступлением положительных и отрицательных заявок, а также интервалы между попытками захвата прибора заявками из орбит имеют экспоненциальное распределение. Случайное время T_i до наступления события вычисляется по формуле:

$$T_i = \frac{\ln(R)}{\beta_i},$$

где R – равномерно распределенная случайная величина на интервале $(0, 1)$, β_i – параметр соответствующего события. При этом, если переход по соответствующему типу события из текущего состояния невозможен, полагается $T_i = +\infty$

Алгоритм 1. Дискретно-событийное моделирование СМО

Вход: Максимальное время моделирования $T_{\max}$ и параметры $\lambda, \gamma, \mu, \sigma_1, \sigma_2$

Выход: Матрица распределения $\hat{P}(i, n, k)$, массивы времени и состояний системы

Время моделирования: $t \leftarrow 0$

Текущее состояние $S \leftarrow (0, 0, 0)$

пока $t < T_{\max}$

 Найти наиболее ранее событие $S_{\min}$ с временем:

$$T_{\min} \leftarrow \min \left\{ \frac{\ln(R)}{\lambda}, \frac{\ln(R)}{\gamma}, \frac{\ln(R)}{\mu}, \frac{\ln(R)}{\sigma_1}, \frac{\ln(R)}{\sigma_2} \right\}$$

 Обновить время, проведенное в данном состоянии:

$$\hat{P}[S] \leftarrow \hat{P}[S] + T_{\min}$$

 Обновить время моделирования: $t \leftarrow t + T_{\min}$

 Выполнить переход до ближайшего выбранного события:

$$S \leftarrow S_{\min}$$

Сохранить статистику о состоянии S и времени t
 $\hat{P} \leftarrow \hat{P}/t$

Как можно заметить, вероятность $\hat{P}(i, n, k)$ вычисляется как отношение времени, проведенного системой в данном состояний (i, n, k) , к общему времени моделирования. А одномерные распределения числа заявок на орбитах определяются, как:

$$\hat{P}(i) = \sum_{n,k \geq 0} \hat{P}(i, n, k), \quad \hat{P}(n) = \sum_{i,k \geq 0} \hat{P}(i, n, k). \quad (1)$$

Имитационная модель была проведена с использованием следующих параметров: $\lambda = 0,8, \gamma = 2, \mu = 1, \sigma_1 = 0,08, \sigma_2 = 0,07$ при времени моделирования $T_{\max} = 10^8$ ед. . На рис. 3 представлены полученные результаты работы модели.

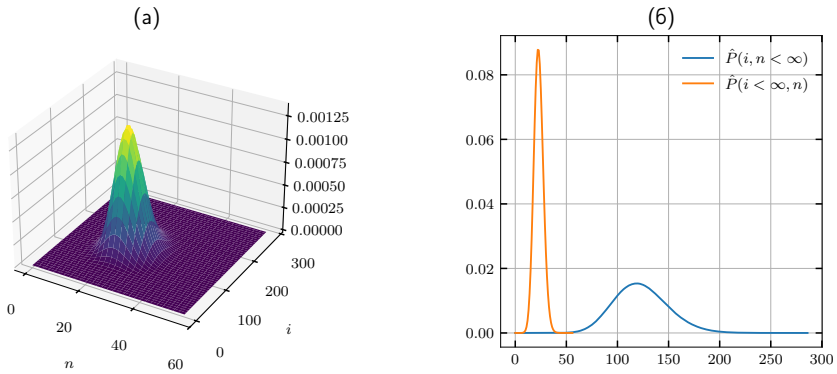


Рис. 3. Распределения числа заявок на орбитах ожидания и восстановления, полученные методом дискретно-событийного моделирования: (а) двухмерное распределение, показывающее совместную вероятность числа заявок на орбитах; (б) одномерные распределения, иллюстрирующие вероятности числа заявок на каждой орбите

3. Валидация модели

Для подтверждения достоверности результатов работы имитационной модели проведена валидация.

Проверка воспроизводимости результатов. Проведена оценка устойчивости результатов при повторных запусках модели с идентичными параметрами (табл. 1). В рамках проверки рассчитывалась величина максимального отклонения:

$$\Delta_{\max} = \max_{i,j,k} \left| \hat{P}^{(1)}(i, n, k) - \hat{P}^{(2)}(i, n, k) \right|,$$

где $\hat{P}^{(1)}$ и $\hat{P}^{(2)}$ — результаты двух независимых запусков модели.

Таблица 1

Значения максимальных отклонений при повторных запусках.

$T_{\max}$	10^4	10^5	10^6	10^7
$\Delta_{\max}$	0.0014	0.00046	0.00012	$3.317 \cdot 10^{-5}$

Сопоставление с аналитическим решением в частном случае. При установке значения параметра γ , равного нулю, система переходит в классическую СМО с повторными вызовами, простейшим потоком входящих требований, одной орбитой ожидания и известной аналитической формулой распределения числа заявок на орбите в стационарном режиме функционирования:

$$H(u) = (1 - \rho(e^{ju} - 1)) \left(\frac{1 - \rho}{1 - \rho e^{ju}} \right)^{\frac{\lambda}{\sigma_1} + 1}, \quad (2)$$

$$P(i) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-jui} H(u) du, \quad (3)$$

где $\rho = \lambda/\mu$ - пропускная способность системы.

Расстояние Колмогорова между статистическим и теоретическим распределениями числа заявок на орбите ожидания (табл. 2).

$$D = \max_i \left| P(i) - \hat{P}(i) \right|_{\gamma=0}.$$

Таблица 2

Расстояние Колмогорова D при различных значениях параметров λ и μ при фиксированных $\sigma_1 = 0.08$, $T_{\max} = 10^7$.

$\mu \backslash \lambda$	10	8	5	0,1
15	0,00011	0,00012	0,00018	0,00013
11	0,00009	0,00012	0,00025	0,00011

Закключение

В данной работе рассмотрена математическая модель RQ-системы с искажениями заявок и орбитой восстановления. На основе построен-

ной модели реализован алгоритм дискретно-событийного имитационного моделирования, позволяющий проводить численный анализ системы при различных параметрах. Проведена валидация модели, результаты которой демонстрируют возможность применения программной реализации для исследования характеристик системы и оптимизации процессов СМО.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Falin, G.* A survey of retrial queues. Queueing Syst. // Theory Appl. 1990. Vol. 7,2. P. 127–167.
2. *Gelenbe E.* Product-form queueing networks with negative and positive customers. Journal of Applied Probability. 1991. Vol.28(3). P. 656–663.
3. *Gelenbe, E., Glynn, P., Singman, K.* Queues with negative arrivals. Journal of Applied Probability. (1991). Vol. 28. P. 245–250.
4. *Daduna, Hans.* Queueing networks – customers, signals, and product form solutions, by X. Chao, M. Miyazawa, and M. Pinedo and Introduction to stochastic networks, by R.F. Serfozo. Journal of Applied Mathematics and Stochastic Analysis. 2001.
5. *Artalejo, J. R., Gomez-Corral, A.* Analysis of a stochastic clearing system with repeated attempts. Communications in Statistics. Stochastic Models, 1998. Vol. 14(3). P. 623–645.
6. *J. R. Artalejo, A. Gomez-Corral* Steady state solution of a single-server queue with linear repeated requests, // Journal of Applied Probability, 1997. Vol. 34, № 1. P. 223–233.
7. *Марголис Н. Ю.* Имитационное моделирование: учеб. пособие. Томск: М253 Издательский Дом Томского государственного университета, 2015. 130 с.
8. *Стародубов А. Н., Зиновьев В. В., Николаев П. И., Кузнецов И. С.* Верификация и валидация имитационных моделей систем: методические указания к лабораторной работе; КузГТУ. Электрон. дан. Кемерово, 2018.
9. *Назаров А. А., Терпугов А. Ф.* Теория массового обслуживания. 2-е изд., исправ. Томск : Издательство научно-технической литературы, 2010. 228 с.

Измайлова Яна Евгеньевна — кандидат физико-математических наук; доцент; каф. теории вероятностей и математической статистики.. E-mail: evgenevna.92@mail.ru

Канылбай Зангар — студент 4 курса; институт прикладной математики и компьютерных наук.. E-mail: zzangar72@gmail.com