УДК 004.827

ВЕРОЯТНОСТНОЕ ПРОСТРАНСТВО ДЛЯ МЕТОДОВ И ЗАДАЧ ЛОГИКО-ВЕРОЯТНОСТНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ И ВЕРОЯТНОСТНОЙ ЛОГИКИ

Б.А. Кулик (Санкт-Петербург)

Введение

Проблема совмещения логики и вероятности имеет давнюю историю. Известные ученые, стоящие у истоков математической логики, такие как А. де Морган и Дж. Буль, подчеркивали тесную связь между вероятностью и логикой [1]. В 1886 П.С. Порецкий предложил метод решения задач теории вероятностей с помощью математической логики [2], а в 1950 г. Р. Карнап заложил основы вероятностной логики [3], развитие которой продолжилось в известной публикации Н. Нильсона [4]. В 1956 г. была опубликована статья М. Руша [5], в которой строился мост между алгеброй логики и теорией вероятности, а в 1963 году статья Ю.В. Мерекина [6], в которой был предложен универсальный метод преобразования произвольных формул исчисления высказываний в ортогональные дизъюнктивные нормальные формы (ДНФ). Такие ДНФ удобны для вероятностного анализа тем, что их можно преобразовать в соответствующий для данной формулы вероятностный полином с помощью элементарных подстановок (замещений).

Развитие логико-вероятностного моделирования (ЛВМ) и его применения для оценки надежности и безопасности технических систем тесно связано с исследованиями И.А. Рябинина [7, 8] и его учеников. В этих работах рассматривались методы представления структурно сложных систем формулами исчисления высказываний (или, в другой формулировке, булевой алгебры) и методы замещения, позволяющие преобразовать эти формулы в вероятностные функции. Идеи ЛВМ были также представлены в зарубежных публикациях [9, 10]. Были предприняты попытки выйти в ЛВМ за пределы формул исчисления высказываний. В публикации [11] было показано применение методов ЛВМ для анализа систем, у которых элементы характеризовались тремя и более возможными состояниями.

Исследовались также возможности вероятностного представления для некоторых формул и соотношений логики первого прядка [12, 13]. Однако в перечисленных и, по-видимому, во многих других публикациях, рассматривающих совмещение логики и вероятности, нет той основы, которая их могла бы их объединить и позволить рассматривать эти методы как часть теории вероятностей. В них нет определения вероятностного пространства, с помощью которого можно было бы обобщить многие методы и задачи ЛВМ и вероятностной логики. Возможный подход к этому определению рассматривается в данном докладе.

1. Вероятностное пространство для интерпретаций логических формул

В теории вероятностей ***вероятностное пространство*** определяется как тройка (Ω, U, P), где Ω – произвольное непустое множество, элементы которого называются ***элементарными событиями*** или исходами, U – сигма-алгебра подмножеств из Ω, называемых ***случайными событиями***, P – ***вероятностная мера*** такая, что P (Ω) = 1, а вероятность любого множества элементарных событий равна сумме вероятностей его элементов (свойство аддитивности).

Булева алгебра и вариант исчисления высказываний, в котором используются только связки (¬, ∧, ∨), изоморфны сигма-алгебре, но вызывает затруднение определение вероятностной меры в них и нет достаточно четкого определения случайного события. Если, допустим, в формуле исчисления высказываний элементарное событие для пропозициональной переменной определяется легко (например, множество {исправное состояние, отказ}), то для всей формулы определение случайного события может вызвать затруднения.

Однако задача существенно упрощается, если использовать в качестве случайных событий (т. е. подмножеств из Ω) не логические формулы, а их интерпретации. Сведения об интерпретации языка первого порядка содержатся во многих публикациях по математической логике, в частности, в [14]. В этой интерпретации задано некоторое множество D, которое рассматривается как область интерпретации предметной переменной x_i. Элементами этого множества являются предметные константы a_m. Тогда область интерпретации для n-местного предиката (или формулы с n свободными переменными) B_j^n определяется как n-местное отношение, равное подмножеству декартова произведения D^n.

Аналогичную интерпретацию можно предложить и для формул исчисления высказываний, у которых область интерпретации пропозициональной переменной определена как множество $D = \{false, true\}$ или $D = \{0, 1\}$.

Обозначим $I(B_j^n)$ интерпретацию предиката (или логической формулы) B_j^n. Тогда становится понятным, что элементами $I(B_j^n)$ являются принадлежащие D^n n-местные кортежи элементов (т. е. предметных констант) из D. Отсюда ясно, что кортежи, принадлежащие $I(B_j^n)$, соответствуют выполняющим подстановкам формулы B_j^n. А это означает, что интерпретацией формул и предикатов являются множества кортежей, каждый из которых соответствует выполняющей подстановке данной формулы. С учетом этого можно предложить следующее определение:

Вероятностное пространство для интерпретаций логических формул определяется как тройка (D^n, U, P), где U – в данном случае система подмножеств декартова произведения D^n. Тогда ***элементарными событиями*** являются элементы D^n, а ***случайными событиями*** – подмножества множества D^n, т. е. интерпретации логических формул. При этом требуется решить две задачи:

Задача 1: определить семантику вероятностной меры для элементов из D и D^n;

Задача 2: разработать систему моделирования, в которой выполняются преобразования логических формул B_j^n в их интерпретации $I(B_j^n)$ и обратно.

Рассмотрим решение Задачи 1. Для этого сначала нужно понять, что означает вероятностная мера для переменной логической формулы. Предположим, что областью интерпретации переменой x является множество $D = \{a,\ b,\ c\}$. Тогда в качестве вероятностной модели для D можно выбрать урну, в которой содержатся шары с пометками элементов из D, при этом их количества могут быть произвольными. Пусть в урне содержится N_a, N_b и N_c шаров с соответствующими пометками. Тогда элементарным событием является извлечение шара из урны с возвращением. Если вероятности извлечения всех шаров в урне одинаковы, то нетрудно вычислить вероятности извлечения шаров с определенными пометками. Пусть $N = N_a + N_b + N_c$. Тогда $P(a) = \dfrac{N_a}{N}$; $P(b) = \dfrac{N_b}{N}$; $P(c) = \dfrac{N_c}{N}$.

Рассмотрим случай, когда логическая формула содержит n переменных с областью интерпретации D. Обозначим $P(k)$ вероятность извлечения шара с пометкой k. Тогда моделью для этой формулы будут n урн, у которых вероятности $P(k)$ событий k могут отличаться от вероятностей таких же событий в других урнах. Элементарным событием в системе с n урнами является одновременное извлечение по одному шару из каждой урны с возвращением, при этом вероятность извлечения шара с определенной пометкой в каждой урне не зависит от результатов извлечения шаров в других урнах.

Рассмотрим пример, в котором $D = \{a, b, c\}$ и $n = 3$. Тогда элементарному событию будет соответствовать кортеж из множества $D^3 = \{a, b, c\}\times\{a, b, c\}\times\{a, b, c\}$. Элементы множества D^n обычно обозначаются как кортежи элементов (например, (a, c, a)), на самом же деле элементами D^n являются декартовы произведения одноэлементных множеств, например:

$$(a, c, a) = \{a\}\times\{c\}\times\{a\}. \tag{1}$$

Поскольку мера декартова произведения вычисляется как произведение мер его компонент, то из (1) мы получим $P((a, c, a)) = P_1(a)P_2(c)P_3(a)$, где $P_i(k)$ – вероятность извлечения шара с пометкой k из урны с номером i.

Рассмотрим общий случай, когда имеется n урн и в каждой урне размещены шары с пометками $k \in \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$. Тогда вероятность любого элемента $d_r \in D^n$ вычисляется по формуле

$$P(d_r) = \prod_{i=1}^{n} P_i(k_i) \tag{2}$$

Нетрудно убедиться, что рассмотренная вероятностная мера для D^n является аддитивной и удовлетворяет всем аксиомам теории вероятностей. Это следует из того, что в предложенной урновой модели $P(D) = P(D^n) = 1$, а при использовании формулы (2) вероятность любого подмножества множества D^n равна сумме вероятностей его элементов.

2. Интерпретация логических формул с помощью алгебры кортежей

Рассмотрим решение Задачи 2. Выражать логические формулы в виде множеств их выполняющих подстановок весьма трудоемко, а во многих случаях вообще невозможно в силу экспоненциальной вычислительной сложности такого алгоритма. Поэтому возникает необходимость в сжатом представлении интерпретаций логических формул. Для решения этой задачи предлагается воспользоваться методами алгебры кортежей [11, 15], в которой подмножества декартовых произведений (т. е. n-местные отношения) можно выразить, используя сжатые структуры.

Алгебра кортежей (АК) – это математическая система, предназначенная для моделирования и анализа n-местных отношений и основанная на свойствах декартовых произведений множеств (ДП). Эти свойства позволяют представить n-местные отношения в сжатом виде и унифицировать многие методы и модели дискретной математики, в том числе методы логического анализа данных и знаний.

По сути, АК – это рассмотренная выше интерпретация языка первого прядка, но она отличается от традиционной интерпретации следующими особенностями:

1) областью интерпретации n-местного предиката и формулы с n переменными является подмножество ДП

$$\boldsymbol{U} = D_1 \times D_2 \times \ldots \times D_n, \tag{3}$$

в котором D_i могут быть разными множествами;

2) для сжатых структур АК (АК-объектов) определены операции алгебры множеств и операции с атрибутами, для которых доказано их соответствие логическим связкам $\wedge$, $\vee$, $\neg$, $\forall$ и $\exists$;

3) общезначимость импликации $A \rightarrow B$ интерпретируется как выполнимость соотношения $I(A) \subseteq I(B)$, где $I(A)$ и $I(B)$ – интерпретации логических формул A и B, выраженные с помощью АК-объектов;

4) любой АК-объект можно преобразовать в ортогональную C-систему, которая с помощью замещения переводится в вероятностный полином.

С учетом сказанного можно дать следующее определение вероятностного пространства для методов и задач ЛВМ и вероятностной логики.

Вероятностное пространство для случайных событий, заданных интерпретациями логических формул, определяется как тройка ($\boldsymbol{U}$, U, P), где $\boldsymbol{U}$ – ДП в соответствии с (3), U – система подмножеств множества $\boldsymbol{U}$, P – вероятностная мера, в которой вероятности элементов из $\boldsymbol{U}$ вычисляются по формуле (2).

Тогда ***элементарными событиями*** являются элементы из $\boldsymbol{U}$, соответствующие выполняющим подстановкам логической формулы.

Заключение

Предложенное определение вероятностного пространства на основе интерпретации языка первого порядка и алгебры кортежей позволяет обобщить методы и задачи ЛВМ и вероятностной логики.

Работа выполнена в рамках государственного контракта Министерства образования и науки России №124041500008-1 от 01 января 2024 в Институте проблем машиноведения Российской академии наук.

Литература

1. **Demey L., Kooi B. and Sack J.** Logic and Probability // The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Fall 2023 Edition), Edward N. Zalta & Uri Nodelman (eds.) – Режим доступа https://plato.stanford.edu/archives/fall2023/entries/logic-probability (дата обращения 20.09.2025).
2. **Порецкий П.С.** Решение общей задачи теории вероятностей при помощи математической логики // Труды СПИИРАН. 2015. Вып. 6(43). С. 27-49.
3. **Carnap, R.** Logical Foundations of Probability. – London: Routledge and Kegan Paul, Ltd, 1951. – XVII+607 p.
4. **Nilsson, N.** Probabilistic Logic // Artificial Intelligence. – *1986*. – vol. 28. – P. 71–87.
5. **Rouche N.** Extension aux probabilités du formalisme. de l'algèbre logique // Revue HF . – *1956*. – vol. 3, no 5. – P. 179–182.
6. **Мерекин Ю.В.** Решение задач вероятностного расчета однотактных схем методом ортогонализации // Вычислительные системы. – 1963. – Вып.4. С. 10-21.
7. **Рябинин И.А.** Основы теории и расчета надежности судовых электроэнергетических систем. – Л.: «Судостроение». 1971. – 456 с.
8. **Рябинин И.А.** Надежность и безопасность структурно-сложных систем. – СПб.: Политехника. – 2000. – 248 с.
9. **Fratta L., Montanari U.G.** A Boolean Algebra Method for Computing the Terminal Reliability in a Communication Network // IEEE Trans. Circuit Theory. – 1973. – vol CT-20, May. – P. 203-211.
10. **Aggarwal K.K., Gupta J.S., Misra R.B.** A New Method for System Reliability Evaluation // Microelectronics and Reliability. –1973. – vol 12. – P. 435-440.
11. **Кулик Б.А.** Анализ надежности систем с многими состояниями на основе алгебры кортежей // Автоматика и телемеханика. – 2003. – № 7. – С. 13-18.
12. **Bacchus, F.** Representing and Reasoning with Probabilistic Knowledge. – Cambridge, MA: The MIT Press. – 1990. – 256 p.
13. **Halpern J. Y.** An analysis of first-order logics of probability // Artificial Intelligence. – 1990. – vol. 46. – 1990. – P. 311-350.
14. **Mendelson E.** Introduction to Mathematical Logic (6th ed.). – Boca Raton, London, New York: Taylor & Francis Group. – 2015. – 499 p.
15. **Кулик Б.А.** Как вычислять интересные следствия // Онтология проектирования. – 2023. – Т. 13. – №2. – С. 160-174.