

УДК 519.853, 517.977.58

# МУЛЬТИГЕНТНЫЙ АЛГОРИТМ ПОИСКА ОПТИМАЛЬНОГО ПРОГРАММНОГО УПРАВЛЕНИЯ НА ОСНОВЕ РАДИАЛЬНО-БАЗИСНЫХ ФУНКЦИЙ

**А.В. Пантелеев**

*Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)*  
Россия, 125993, Москва, Волоколамское шоссе, 4  
E-mail: avpanteleev@inbox.ru

**М.М.С. Каранэ**

*Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)*  
Россия, 125993, Москва, Волоколамское шоссе, 4  
E-mail: mm\_karane@mail.ru

**Ключевые слова:** оптимальное программное управление, мультиагентный алгоритм, радиально-базисные функции.

**Аннотация:** Предлагается численный алгоритм решения задачи поиска оптимального программного управления, основанный на разложении закона управления по системе радиально-базисных функций и использовании мультиагентного метаэвристического метода оптимизации. В качестве радиально-базисных функций рассматриваются: функция Гаусса, мульти-квадратичная функция, обратная квадратичная функция и обратная мульти-квадратичная функция, а в качестве мультиагентного метода – гибридный мультиагентный метод интерполяционного поиска. На основе предложенного подхода разработано программное обеспечение и исследована его эффективность при решении модельного примера. Проведен сравнительный анализ влияния выбора параметров базисной системы на точность решаемой задачи.

## 1. Введение

Задача синтеза оптимального управления нелинейными детерминированными системами является востребованной и поднимается во многих областях науки и техники. Используются различные подходы к решению этой задачи, которые можно разделить на два класса: прямые и косвенные. Косвенные методы [1] решения заключаются в решении двухточечной краевой задачи. Прямые методы [2] сводят задачу поиска закона управления к задаче параметрической оптимизации.

В работе используется прямой метод поиска оптимального программного управления: осуществляется дискретизация закона управления, а именно представление его в виде ряда по радиально-базисным функциям с неизвестными коэффициентами. Для их поиска применяются мультиагентные методы оптимизации [3], идея которых основывается на различных эвристических процедурах. Принцип работы таких методов заключается в генерации популяции агентов на множестве допустимых решений и управлении их движением, приводящим к решению. В качестве мультиагентного алгоритма используется гибридный мультиагентный алгоритм

интерполяционного поиска [4], в котором для организации процесса поиска агентами применяются интерполяционные кривые Безье, Катмулла-Рома и сплайны разных степеней, что позволяет подстроиться под структуру поверхности уровня целевой функции.

Радиально-базисные функции используются при решении задач интерполяции, синтезе нелинейных систем управления и в нейронных сетях [5, 6].

## 2. Постановка задачи

Пусть поведение модели объекта управления описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$(1) \quad \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)),$$

где  $x$  – вектор состояния системы,  $x = (x_1, \dots, x_n)^T \in R^n$ ;  $u$  – вектор управления,  $u = (u_1, \dots, u_q)^T \in U \subseteq R^q$ ,  $U$  – некоторое заданное множество допустимых значений управления, определяемое прямым произведением отрезков  $[a_1, b_1] \times \dots \times [a_q, b_q]$ ;  $t \in T = [t_0, t_f]$  – промежуток времени функционирования системы; моменты начала процесса  $t_0$  и окончания  $t_f$  заданы;  $f(t, x, u)$  – непрерывная вектор-функция;  $R^n$  –  $n$ -мерное евклидово пространство.

Начальное условие

$$(2) \quad x(t_0) = x_0$$

задает начальное состояние системы.

Определим множество допустимых процессов  $D(t_0, x_0)$  как множество пар  $d = (x(\cdot), u(\cdot))$ , которые включают траекторию  $x(\cdot)$  и управление  $u(\cdot)$  (где  $\forall t \in T: x(t) \in R^n, u(t) \in U$ , функции  $x(\cdot)$  непрерывны и кусочно-дифференцируемы, а  $u(\cdot)$  кусочно-непрерывны), удовлетворяющие уравнению (1) с заданным начальным условием (2).

На множестве  $D(t_0, x_0)$  определим функционал качества управления

$$(3) \quad I(d) = F(x(t_f)),$$

где  $F(x)$  – заданная непрерывная функция.

Требуется найти такую пару  $d^* = (x^*(\cdot), u^*(\cdot)) \in D(t_0, x_0)$ , что  $I(d^*) = \min_{d \in D(t_0, x_0)} I(d)$ .

## 3. Стратегия поиска решения задачи

Для частного случая систем (1), в котором структура оптимального программного управления согласно принципу максимума является релейной, предлагается искать приближенное решение в виде функции насыщения, которая должна гарантировать выполнение заданных ограничений на управление параллелепипедного типа, а аргументы функции насыщения – в виде линейной комбинации заданных радиально-базисных функций.

Закон управления задается в виде функции насыщения  $\text{sat}$ , гарантирующей выполнение ограничений на управление:

$$(4) \quad u_j(t) = \text{sat}\{g_j(t)\}, j = 1, \dots, q,$$

$$\text{где } \forall t \in T \quad g_j(t) = \sum_{i=0}^{L_j-1} c_i^j \varphi(|t - t^i|), \quad \text{sat } g_j(t) = \begin{cases} a_j, & g_j(t) < a_j, \\ g_j(t), & a_j \leq g_j(t) \leq b_j, \\ b_j, & g_j(t) > b_j, \end{cases}$$

$\{c_0^j, c_1^j, \dots, c_{L_j-1}^j\}$  – неизвестные коэффициенты разложения по базисной системе

функций  $\{\varphi(|t - t^i|)\}_{i=0}^{L^j-1}$ ;  $L^j \geq 1, j = 1, \dots, q$  – масштабы усечения разложений по каждой из координат вектора управления.

В качестве радиально-базисной системы функций  $\{\varphi(|t - t^i|)\}_{i=0}^{L^j-1}$  можно использовать:

- функцию Гаусса

$$(5) \quad \varphi(r) = e^{-(\mu r)^2};$$

- мульти-квадратичную функцию

$$(6) \quad \varphi(r) = \sqrt{1 + (\mu r)^2};$$

- обратную квадратичную функцию

$$(7) \quad \varphi(r) = 1/(1 + (\mu r)^2);$$

- обратную мульти-квадратичную функцию

$$(8) \quad \varphi(r) = 1/\sqrt{1 + (\mu r)^2}.$$

Здесь  $\mu$  – масштабный коэффициент,  $t^i$  – базовая точка,  $r = |t - t^i|$ . Базовые точки задаются следующим образом:  $t^i = t_0 + ih, i = 0, \dots, L^j - 1$ , где  $h = \frac{t_f - t_0}{L^j - 1}$ ,  $j = 1, \dots, q$ .

При решении задачи принимается гипотеза о том, что с ростом числа членов разложения (увеличении числа  $L^j$ ) точность приближенного решения должна возрастать. Процесс увеличения чисел  $L^j$  можно завершить, если относительное приращение величины функционала станет меньше заранее заданного порогового значения, т.е. когда добавление новых слагаемых и, как следствие, усложнение закона управления не приносит существенного улучшения значения критерия оптимальности.

Текущее приближение решения задается в виде блочного вектора

$$(9) \quad (L^1, \dots, L^q | c_0^1, c_1^1, \dots, c_{L^1-1}^1 | \dots | c_0^q, c_1^q, \dots, c_{L^q-1}^q)^T,$$

определяющего представление закона управления (4). На координаты вектора (9) накладываются интервальные ограничения вида

$$c_i^j \in [c_{i\min}^j, c_{i\max}^j], j = 1, \dots, q; i = 0, \dots, L^j - 1.$$

Поскольку первый блок матрицы (9) содержит целочисленные переменные, а последующие блоки содержат вещественные переменные, задача параметрической минимизации функционала (3) на множестве допустимых векторов вида (9) относится к классу целочисленно-непрерывных. Ее решение связано с последовательным улучшением значений, как целочисленных переменных, образующих вектор масштабов усечения  $L = (L^1, \dots, L^q)$ , так и действительных переменных, образующих вектор  $C = (c_0^1, c_1^1, \dots, c_{L^1-1}^1 | \dots | c_0^q, c_1^q, \dots, c_{L^q-1}^q)^T$ . Предлагается при поиске целочисленных решений реализовать идею последовательного покоординатного спуска с возвратом при неудачном шаге, а при поиске значений остальных переменных "заморозить" текущие значения целочисленных переменных и применить мультиагентные методы оптимизации, в частности гибридный мультиагентный алгоритм интерполяционного поиска.

## 4. Модельный пример

Параметры постановки задачи приведены в табл. 1.

Таблица 1. Постановка задачи.

Система дифференциальных уравнений	$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2(t) + \sin x_1(t) + u(t) \\ \dot{x}_2 = x_1(t) \cos x_2(t) u(t) \end{cases}$
------------------------------------	------------------------------------------------------------------------------------------------------------

<b>Начальное условие</b>	$x(0) = (0; 0)^T$
<b>Временной интервал</b>	$t \in [0; 1]$
<b>Ограничения на управление</b>	$-1 \leq u \leq 1$
<b>Функционал (3)</b>	$I(d) = x_2(1) \rightarrow \min$

Решим задачу с помощью рассмотренного алгоритма. Для этого требуется выбрать одну из указанных радиально-базисных функций: функцию Гаусса, мульти-квадратичную функцию, обратную квадратичную функцию или обратную мульти-квадратичную функцию, а также задать параметры мультиагентного алгоритма условной оптимизации. Выбраны значения параметра остановки алгоритма  $\varepsilon = 0,05$  и шага интегрирования  $h = 0,001$ , максимальное число проходов равно 10.

Рассмотрено четыре случая поиска оптимального программного управления с разными радиально-базисными функциями (5)-(8). Для каждого случая найдено наилучшее количество  $L$  коэффициентов разложения и их числовые значения, а также определены наилучшие параметры гибридного мультиагентного алгоритма интерполяционного поиска:  $NP = 20$ ,  $I_{\max} = 10$ ,  $M_1 = 2$ ,  $M_2 = 5$ ,  $PRT = 0,9$ ,  $nstep = 5$ ,  $b_2 = 8$ . Масштабный коэффициент для радиально-базисных функций  $\mu = 2L$ , максимального числа проходов 10. На значения коэффициентов в разложении наложены ограничения  $c_{\min} = -5$ ,  $c_{\max} = 5$ .

Результаты численного эксперимента приведены в табл. 2. При использовании функции Гаусса количество коэффициентов в разложении  $L = 6$ , мульти-квадратичной функции –  $L = 6$ , обратной квадратичной функции –  $L = 4$  и обратной мульти-квадратичной функции –  $L = 6$ .

Таблица 2. Результаты решения модельного примера.

Радиально-базисные функции	Значения координат $x_1(1), x_2(1)$	Коэффициенты разложения	Значение функционала $I$
Функция Гаусса	0,4512; -0,1361	-5; -4,65; -4,64; 3,91; 4,24; 5	-0,136065
Мульти-квадратичная функция	0,47; -0,1362	-4,06; -3,28; -2,34; 2,69; 3,4; 4,29	-0,136163
Обратная квадратичная функция	0,4403; -0,1354	-5; -5; 5; 5	-0,135446
Обратная мульти-квадратичная функция	0,4649; -0,1357	-4,38; -4,38; -4,13; 3,85; 4,33; 4,66	-0,135674

На рис. 1 изображены графики траекторий и управления при применении мульти-квадратичной функции (для остальных трех случаев графики аналогичные).

Известное решение примера 1 представлено в [7]: значения координат  $(x_1(1), x_2(1)) = (0,440804; -0,13593)$ , значение функционала  $I = -0,13593$ .

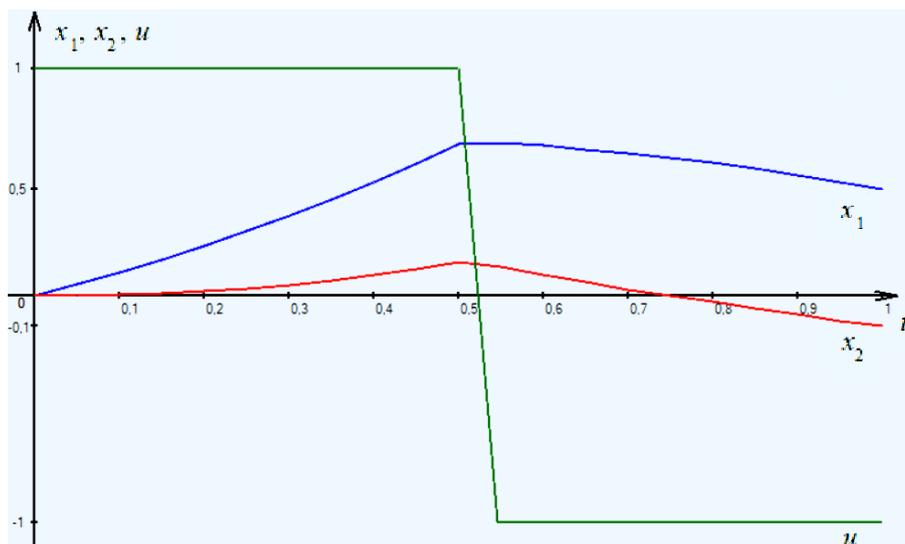


Рис. 1. Оптимальное управление и траектория в примере 1.

## 6. Заключение

Исходя из полученных результатов, описанный подход поиска оптимального управления на основе радиально-базисных функций с использованием гибридного алгоритма интерполяционного поиска показал свою эффективность. Применение функции Гаусса, мульти-квадратичной функции, обратной квадратичной функции и обратной мульти-квадратичной функции позволяет найти программное управление, близкое к оптимальному. Найдены искомые траектории и управление, количество коэффициентов в разложении закона управления и значения этих коэффициентов, а также подобраны параметры мультиагентного алгоритма.

## Список литературы

1. Атанс М., Фалб П.Л. Оптимальное управление. М.: Машиностроение, 1968. 766 с.
2. Федоренко Р.П. Приближенное решение задач оптимального управления. М.: Наука, 1978. 488 с.
3. Пантелеев А.В., Склавинская Д.В. Метаэвристические стратегии и алгоритмы глобальной оптимизации. М.: Факториал, 2023. 564 с.
4. Karane M., Panteleev A. Hybrid multi-agent optimization method of interpolation search // AIP Conference Proceedings (Proceedings of Computational Mechanics and Modern Applied Software Systems (CMMASS'2019). Alushta, 2019. Vol. 2181. Id 020028. <https://doi.org/10.1063/1.5135688>.
5. Buhmann M.D. Radial Basis Functions: Theory and Implementations. N.Y.: Cambridge University Press, 2003. 259 P.
6. Press W.H., Teukolsky S.A., Vetterling W.T., Flannery B.P. Radial Basis Function Interpolation. Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing / 3rd ed. N.Y.: Cambridge University Press, 2007. 1256 P.
7. Gornov A., Zarodnyuk T.S., Madzhara T.I., Daneeva A.V., Veyalko I. A Collection of Test Multiextremal Optimal Control Problems // Optimization, Simulation, and Control. Springer Optimization and Its Applications, 2013. Vol. 76. P. 257-274.