

УДК: 004.94

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ СИСТЕМЫ ИМИТАЦИОННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ДИНАМИКИ БЕСПИЛОТНОГО ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА

А.Р. Исхаков, Р.Ф. Маликов, М.Р. Богданов (Уфа)

Введение. Современные военные конфликты невозможно представить без робототехнических систем, как военного, так и двойного назначения. Опыт специальной военной операции (СВО) на новых территориях Российской Федерации показывает, что большое количество беспилотных летательных аппаратов (БПЛА) может стать сдерживающим фактором на достаточно продолжительный срок времени даже для регулярных вооруженных сил государства. Еще одним преимуществом на поле боя является использование БПЛА для уничтожения живой силы противника и дорогостоящей военной техники. БПЛА начинают играть роль недорогого высокоточного оружия с индивидуальным дистанционным управлением [1, 2].

Таким образом, БПЛА, применяемые при решении обычных гражданских задач, становятся техникой двойного назначения и позволяют эффективно решать боевые задачи. К числу боевых задач, решаемых с помощью БПЛА в целом, можно отнести: разведку территорий ведения боевых действий, целенаправленное наблюдение за живой силой или военной техникой противника, уничтожение живой силы или военной техники противника путем сброса взрывчатых веществ (ВВ), целенаправленное преследование живой силы или военной техники противника; подвоз боекомплектов, продуктов питания, и медикаментов под обстрелом противника; применение автономных «дронов» для удаленной атаки объектов критической инфраструктуры на территории противника; воздушные бои БПЛА между конфликтующими сторонами и т.п. [3-4].

Все используемые БПЛА в зоне СВО, за исключением автономных «дронов», управляются операторами дистанционно через пульта управления (ПУ) или наземные пункты управления (НПУ). Автономные БПЛА используют, в основном, ту или иную глобальную навигационную спутниковую систему (ГНСС) и редко применяют системы машинного зрения (СМЗ). Однако ситуация меняется с течением времени. Одним из последних трендов в применении боевых БПЛА в зоне СВО стало комплексное использование FPV (First Person View) управления БПЛА и автономного режима управления на конечном этапе полета для самонаведения на цель через СМЗ. Другим перспективным направлением применения БПЛА стало их использование в качестве средства уничтожения «дронов» противника. Это стало причиной увеличения скоростей беспилотных воздушных судов (БВС) с использованием миниатюрных авиационных газотурбинных двигателей (ГТД). Переход на высокие скорости полета является прецедентом усложнения систем управления БПЛА, масштабным переходом к использованию ГНСС и интеллектуальных СМЗ. Использование ГНСС предполагает применение заранее подготовленных полетных программ. Следовательно, возникает необходимость в четком и детальном планировании полета БПЛА. Разработка полетного задания является последним шагом в планировании воздушных атак на стационарные или квазистационарные цели. Полетное задание будет эффективным при его разработке с применением программных систем имитационного моделирования полета БПЛА [5-7].

Математическое обеспечение системы имитационного моделирования полета БПЛА в атмосфере. Имитационные модели используются с целью реконструкции сложных процессов и систем, математическое моделирование которых при некоторых допущениях нецелесообразно из-за затратности используемых ресурсов.

В этом разделе статьи речь пойдет об элементах математического обеспечения программного комплекса для имитационного моделирования динамики БПЛА самолетного типа компоновки в среде многоагентного моделирования NetLogo [8].

В работе [9] БПЛА определяется как «...летательный аппарат (ЛА) многоразового применения, не имеющий на борту экипажа, использующий силу тяги двигателей и аэродинамические силы для движения в атмосфере, имеющий целевую нагрузку, определяющую его назначение, и осуществляющий полет как по заранее заданной программе, так и, при необходимости, с использованием дистанционного (радиокомандного) управления». Данное определение распространяется на БПЛА как мультироторные, так и самолетного типа. Условно в состав БПЛА можно включить следующие элементы: планер (корпус), силовую установку, взлетно-посадочные устройства, целевую нагрузку, систему автоматического управления, систему электроснабжения, систему сбора и передачи телеметрической информации, навигационную аппаратуру и бортовую часть радиопередачи управления и передачи целевой информации [9]. Разработка полной имитационной модели БПЛА представляет разработку взаимодействующих имитационных моделей составляющих его подсистем. Имитационные модели подсистем БПЛА будут наиболее точно функционировать, если будут использованы их математические модели. В программной системе имитационного моделирования динамики БПЛА присутствуют еще две составляющие – атмосфера и противник. Имитационное моделирование влияния атмосферы на динамику БПЛА является важнейшей задачей и подлежит также моделированию.

В задачах динамики полета БПЛА были использованы следующие нормальные параметры стандартной атмосферы (1) на уровне Земли в виде величин давления, плотности и температуры соответственно [9]:

$$p_n = 760 \text{ мм.рт.ст.}, \quad \rho_n = 1,225 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}, \quad T_n = 288,15^\circ\text{K} = 15^\circ\text{C}, \quad (1)$$

Допуская, что все аэродинамические силы, входящие в уравнения движения БПЛА, зависят от плотности воздуха ρ в атмосфере, использовалась зависимость плотности воздуха от высоты полета $y \in [0; 11000]$ м в виде (2):

$$\rho = \rho(p_0, \tau_0, y) = \frac{0,46431 p_0}{273,15 + \tau_0 - \mu y} e^{-cy}, \quad (2)$$

где $\mu = 0,0065 \text{ К/м}$ – градиент температуры, p_0 – атмосферное давление в мм.рт.ст., τ_0 – температура воздуха в градусах Цельсия, $c = 0,0001286$ – эмпирический коэффициент [9].

Другой важной характеристикой атмосферы, позволяющей оценивать сжимаемость воздуха, является скорость звука, которая была описана зависимостью (3) от температуры воздуха τ_0 в градусах Цельсия и высоты полета y для БПЛА:

$$a = a(\tau_0, y) = 20,048 \sqrt{273,15 + \tau_0} - 0,004y, \quad (3)$$

где $a_n = 340,314 \text{ м/с}$ – нормальное значение скорости звука на уровне Земли.

Рассмотренные физические величины влияют на аэродинамические силы, действующие на БПЛА. Далее рассмотрим теоретические аспекты динамики БПЛА самолетного типа.

В прикладной теории управления авиационными системами изучаются программное, радиокомандное и в режиме самонаведения разновидности опорного движения БПЛА [9, 10]. В статье рассматриваются прикладные аспекты программного управления БПЛА самолетной схемы компоновки с турбореактивным двигателем (ТРД). Движение БПЛА по требуемой траектории осуществляется за счет управления тягой $P = P(t)$, углом атаки $\alpha = \alpha(t)$ и углом крена $\gamma = \gamma(t)$ на интервале времени $t \in [t_0, t_k]$. Поэтому разрешение модели пространственного движения БПЛА с начальными условиями при заданном векторе управления $u(t) = (P(t), \alpha(t), \gamma(t))$,

удовлетворяющего соответствующим ограничениям, называется моделированием управляемого движения БПЛА на интервале времени $t \in [t_0, t_k]$.

На БПЛА в полете действуют силы, как представлено на рисунке 1, приложенные к его центру масс $O_{ЦМ}$ (ЦМ): сила тяжести $G = mg$, сила тяги двигателей БПЛА P , сила лобового сопротивления среды $X = 0,5c_x\rho V^2S$, подъемная сила $Y = 0,5c_y\rho V^2S$, боковая сила $Z = 0,5c_z\rho V^2S$, c_x, c_y, c_z – безразмерные коэффициенты лобового сопротивления, подъемной и боковой сил БПЛА, $\rho = \rho(y)$ – плотность воздуха на соответствующей высоте у полета БПЛА [9].

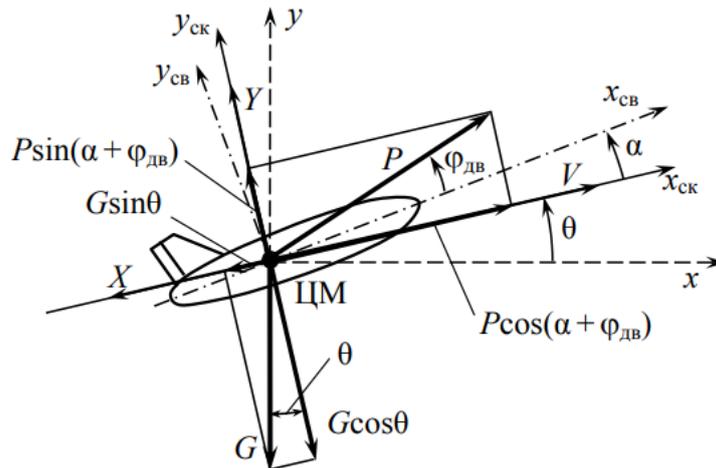


Рис. 1 – Силы, действующие на БПЛА самолетного типа (вид сбоку) [9]

Для математического и имитационного моделирования введены скоростная $O_{ЦМ}x_{ск}y_{ск}$ (рисунки 1-3), связанная $O_{ЦМ}x_{св}y_{св}$ (рисунок 1) и земная $O_{ЦМ}xy$, как представлено на рисунках 1-3, системы координат [9].

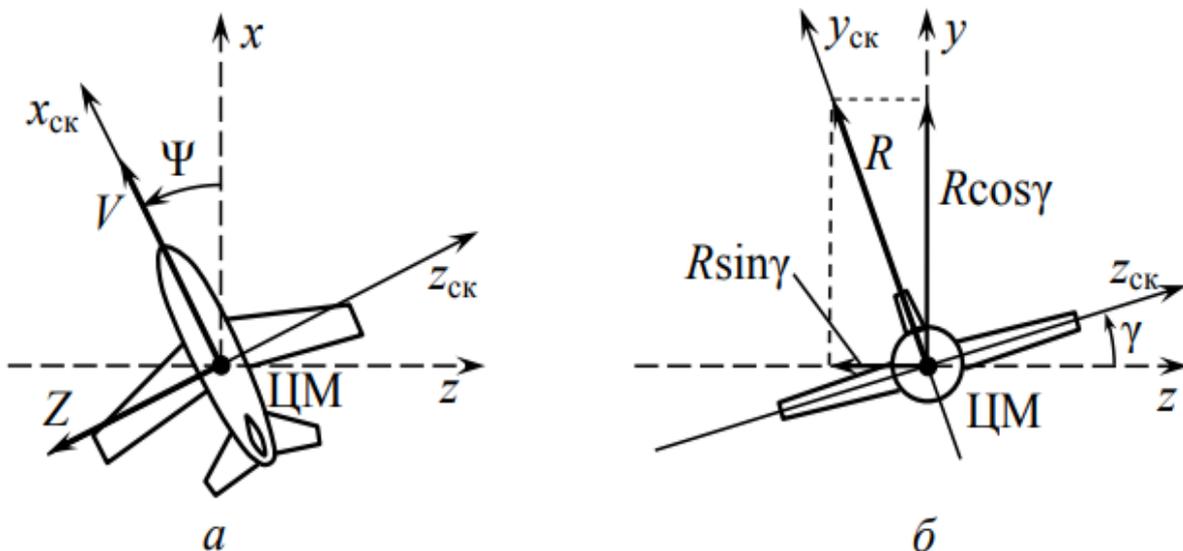


Рис. 2 – Силы, действующие на БПЛА самолетного типа: а) вид сверху, б) вид спереди

В работе были использованы динамические уравнения ЦМ БПЛА, которые имеют нормальный вид (4) [9]:

$$\begin{cases} \dot{V} = \frac{P-X}{m} - g \sin \theta \\ \dot{\theta} = \frac{(P(\alpha+\varphi_{дв})+Y) \cos \gamma}{mV} - \frac{g}{V} \cos \theta \\ \dot{\Psi} = \frac{(P(\alpha+\varphi_{дв})+Y) \sin \gamma}{mV \cos \theta} \\ \dot{x} = V \cos \theta \\ \dot{y} = V \sin \theta \end{cases}, \quad (4)$$

где m – масса БПЛА; V – скорость БПЛА в произвольный момент времени; γ – угол крена; Ψ – угол поворота траектории (угол курса); α – угол атаки; θ – угол наклона траектории; $\varphi_{дв}$ – угол между направлением силы тяги БПЛА и абсциссой $x_{св}$ связанной системы координат $O_{ЦМ}x_{св}y_{св}$, x, y, \dot{x}, \dot{y} – законы изменения координат ЦМ и их производные (скорости).

Имитационное моделирование полета БПЛА предполагает определение математической траектории движения ЛА и его скоростей. Один из постулатов данного подхода заключается в непрерывности самих траекторий и его производных вплоть до гладкости кривых 2-го порядка. Суть альтернативного подхода – применение поворотных пунктов маршрута и характерных точек траектории, в которых могут быть разрывы производной [9]. БПЛА в динамике может находиться в установившемся режиме и двигаться с постоянной крейсерской скоростью $V(t) = V_{кр}$, или в неустойчившемся режиме осуществлять движение со скоростью $V = V(t), t \in [t_0, t_k]$. Для неустойчившегося случая, динамика БПЛА были использованы формулы (5) – (7) [9]:

$$V(t) = V_0 + \frac{V_k - V_0}{t_k - t_0} (t - t_0), \quad (5)$$

$$\dot{V}(t) = \frac{V_k - V_0}{t_k - t_0} = const, \quad (6)$$

$$L = \int_{t_0}^{t_k} V(t) dt \quad (7)$$

где $t \in [t_0, t_k]$, $V(t_0) = V_0, V(t_k) = V_k, L$ – длина траектории движения БПЛА на интервале времени $t \in [t_0, t_k]$. С использованием (5) – (7) определяются мгновенные значения скорости и ускорения. Длина пройденного пути по формуле (7) требует закона изменения скорости $V = V(t), t \in [t_0, t_k]$. Для его нахождения должны быть решены две вспомогательные изопараметрические задачи вариационного исчисления (8) и (9) с минимизацией функционалов J_1 и J_2 [9, 11, 12]:

$$J_1 = \int_{t_0}^{t_k} \dot{V}^2(t) dt \rightarrow min \quad (8)$$

$$J_2 = \int_{t_0}^{t_k} \sqrt{1 + \dot{V}^2(t)} dt \rightarrow min \quad (9)$$

Решения задач (8) и (9) означает нахождение функции $V = V(t), t \in [t_0, t_k]$ минимизирующую один из функционалов J_1 или J_2 при удовлетворении условия $V(t_0) = V_0, V(t_k) = V_k$ и соответствия равенству (7). Например, для задачи (8) было получено решение (10) [9]:

$$V(t) = 0,25\lambda t^2 + \frac{(V_k - V_0) - 0,25\lambda(t_k^2 - t_0^2)}{t_k - t_0} (t - t_0) + V_0 - 0,25\lambda t_0^2, \quad (10)$$

$$\text{где } \lambda = \frac{24L + 12(3V_0 - V_k)(t_k - t_0)}{2(t_k^3 - t_0^3) - 3(t_k + t_0)(t_k - t_0)^2 - 6t_0^2(t_k - t_0)}$$

В разрабатываемой системе используется пространственный подход к имитационному моделированию динамики БПЛА. В работах [13, 14] для решения подобных задач предложены два способа – параметрический и классический метод описания траекторий. В работе [9] для решения аналогичной задачи был применен проекционный подход. Он заключается в задании проекций искомой траектории на одну или две координатные плоскости в виде кривой с последующим ее преобразованием в

пространственную кривую. На основе полученной кривой формируется параметрическое описание траектории движения БПЛА.

Допустим, что искомая траектория движения БПЛА располагается в маневренной системе координат $O_M x_M y_M z_M$, а ее проекция на координатную плоскость $O_M x_M z_M$ имеет неявный вид (11):

$$F(x, z) = 0 \quad (11)$$

Также допустим, что задан требуемый для выполнения полетного задания БПЛА закон изменения его высоты (12):

$$y_h = y_h(t), \quad t \in [t_0, t_k] \quad (12)$$

Тогда искомая траектория полета БПЛА должна удовлетворять условиям (13) и (14):

$$y_0 = y_h(t_0), \quad y_k = y_h(t_k) \quad (13)$$

$$F(x_0, z_0) = 0, \quad F(x_k, z_k) = 0 \quad (14)$$

В системе имитационного моделирования были использованы кинематические уравнения пространственного движения БПЛА (15):

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = V(t) \cos \theta(t) \cos \Psi(t) \\ \dot{y}(t) = V(t) \sin \theta(t) \\ \dot{z}(t) = V(t) \cos \theta(t) \sin \Psi(t) \end{cases}, \quad (15)$$

где $\theta(t)$, $\dot{\theta}(t)$, $\dot{\Psi}(t)$ – углы, обеспечивающие движение БПЛА по искомой траектории.

В работе [9] для углов $\theta(t)$, $\dot{\theta}(t)$, $\Psi(t)$ были найдены значения в форме (16):

$$\begin{aligned} \theta(t) &= \arcsin \frac{y_h(t)}{V(t)} \\ \dot{\theta}(t) &= \frac{\dot{y}_h(t)V(t) - y_h(t)\dot{V}(t)}{V(t)\sqrt{V^2(t) - y_h^2(t)}}, \\ \Psi(x, z) &= \arctg \left(-\frac{F'_x}{F'_z} \right) \end{aligned} \quad (16)$$

где $y_h(t)$ – закон изменения высоты полета БПЛА; $V(t)$ – закон изменения скорости полета БПЛА; $\dot{y}_h(t)$, $\dot{V}(t)$ – первые производные (скорости) $y_h(t)$ и $V(t)$ по времени t соответственно; $\ddot{y}_h(t)$ – вторая производная (ускорение) $y_h(t)$ по времени t ; F'_x и F'_z – частные производные первого порядка проекции траектории $F(x, z)$ на маневренную плоскость $O_M x_M y_M z_M$. Подставляя (16) в (15), после необходимых преобразований можно получить систему дифференциальных уравнений (17) [9]:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = F_z(x, z) \sqrt{\frac{V^2(t) - y_h^2(t)}{F_x^2(x, z) + F_z^2(x, z)}} \\ \dot{y}(t) = \dot{y}_h(t) \\ \dot{z}(t) = -F_x(x, z) \sqrt{\frac{V^2(t) - y_h^2(t)}{F_x^2(x, z) + F_z^2(x, z)}} \end{cases}, \quad (17)$$

где $t \in [t_0, t_k]$.

Решая систему дифференциальных уравнений 1-го порядка (17) с начальными условиями (18) можно получить параметрическое представление траектории полета БПЛА [9]:

$$x(t_0) = x_0, \quad y(t_0) = y_h(t_0), \quad z(t_0) = z_0, \quad (18)$$

где x_0 и z_0 должны удовлетворять условию (14).

Задача (17) с начальными условиями (18) будет иметь решение при выполнении условия (19) [9]:

$$V(t) > \max_{t \in [t_0, t_k]} \{\dot{y}_h(t)\} \quad (19)$$

Уравнения движения БПЛА в географических координатах. На поле боя для управления БПЛА в основном используется оборудование в виде пультов дистанционного управления или наземных пунктов (станций) управления. Автономное управление предполагает полет по заранее заложенной программе в пилотный контроллер БПЛА или следование перечисленным точкам в полетной программе. В каждом из этих случаев БПЛА опирается либо на локальную навигационную систему (радиолокационную, акустическую, инерциальную или оптическую), либо использует ГНСС с коррекцией координат при необходимости. Наиболее часто используемыми ГНСС являются: GPS (США), Galileo (Евросоюз), ГЛОНАСС (Россия), BeiDou (КНР), DORIS (Франция), IRNSS (Индия) и QZSS (Япония). На практике для коррекции координат применяют систему дифференциальной коррекции (СДК) ГНСС, которая использует поправку псевдодальностей DGNSS (Differential Global Navigation Satellite System) или фазу несущей RTK (Real-Time Kinematic). Каждый из этих подходов имеет свои преимущества и недостатки в аспекте точности.

В системе имитационного моделирования полета БПЛА применяются уравнения движения в географических координатах (рисунок 3). Для этого используются прямоугольные геодезические координаты (x, y, z, V_x, V_y, V_z) и географические координаты (долгота λ , широта φ , высота h и их скорости $V_\lambda, V_\varphi, V_h$). Положение БПЛА в географической СК описывается параметрами, представленными на рисунке 3. При проведении расчетов в географических координатах геоид описывается общим земным эллипсоидом в глобальной СК WGS-84 с параметрами: $a_{\text{общ}} = 6378137$ км – радиус экватора Земли, $\alpha_{\text{общ}} = 1/298,2572$ – сжатие эллипсоида [9, 10, 12].

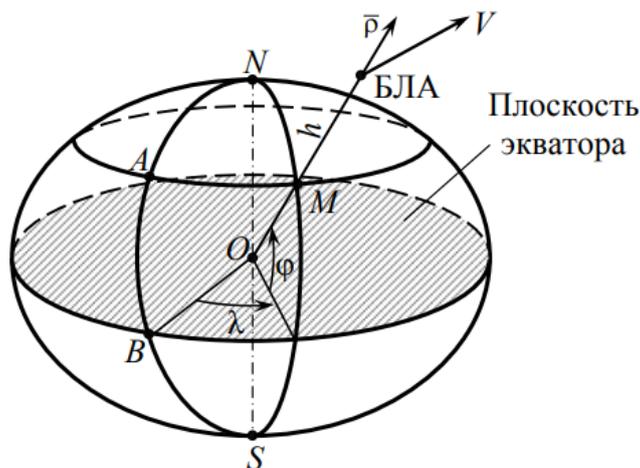


Рис. 3 – Форма Земли (геоид) в глобальной СК WGS-84 [9]

Кинематические дифференциальные уравнения, описывающие изменение геоцентрических координат λ, φ, r при динамике ЦМ БПЛА, имеют вид (20) [9, 10, 12]:

$$\begin{cases} \dot{\lambda} = \frac{V \sin \Psi \cos \theta}{r \cos \varphi} \\ \dot{\varphi} = \frac{V}{r} \cos \Psi \cos \theta \\ \dot{r} = V \sin \theta \end{cases} \quad (20)$$

где λ – географическая долгота, φ – географическая широта, высота r – расстояние от центра общего земного эллипсоида до ЦМ БПЛА, $V_\lambda, V_\varphi, V_h$ – скорости этих величин.

Допуская, что выполняются условия (21) [9, 10, 12]:

$$\sin(\alpha + \varphi_{\text{дв}}) \cong (\alpha + \varphi_{\text{дв}}), \cos(\alpha + \varphi_{\text{дв}}) = 1, \beta = 0, Z = 0 \quad (21)$$

динамические уравнения движения ЦМ БПЛА (4) принимают вид (22) [9, 10, 12]:

$$\begin{cases} \dot{V} = \frac{P-X(\alpha, V, h)}{m} - g \sin \theta \\ \dot{\theta} = \left(\frac{V}{r} - \frac{g}{V}\right) \cos \theta + \frac{1}{mV} (P(\alpha + \varphi_{дв}) + Y(\alpha, V, h)) \cos \gamma \\ \dot{\Psi} = \frac{V}{r} \operatorname{tg} \varphi \sin \Psi \cos \theta + \frac{1}{mV \cos \theta} (P(\alpha + \varphi_{дв}) + Y(\alpha, V, h)) \sin \gamma \end{cases} \quad (22)$$

где m – масса БПЛА; V – скорость БПЛА в произвольный момент времени; γ – угол крена; Ψ – угол поворота траектории (угол курса); α – угол атаки; θ – угол наклона траектории; $\varphi_{дв}$ – угол между направлением силы тяги БПЛА и абсциссой $x_{св}$ связанной системы координат $O_{ЦМ}x_{св}y_{св}$; φ – географическая широта.

Текущая высота полета БПЛА вычисляется по формуле (23) [9, 10, 12]:

$$h(t) = r(t) - a \sqrt{\frac{1-e^2}{1-e^2 \cos \varphi(t)}} \quad (23)$$

где h – высота полета БПЛА; r – расстояние от центра общего земного эллипсоида до ЦМ БПЛА; a – большая полуось общего земного эллипсоида; $e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$ – эксцентриситет земного эллипсоида; φ – географическая широта.

Тогда модель (20) принимает вид (24) [9, 10, 12]:

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = \frac{V}{r(\varphi)} \cos \Psi \cos \theta \\ \dot{\lambda} = \frac{V \sin \Psi \cos \theta}{r(\varphi) \cos \varphi} \end{cases} \quad (24)$$

при

$$r(\varphi) = h + a \sqrt{\frac{1-e^2}{1-e^2 \cos \varphi}} \quad (25)$$

Таким образом, модель частной задачи управляемого полета БПЛА над земным эллипсоидом на постоянной высоте h представляется системой уравнений (22) и (24) при условии (25), которые интегрируются при начальных условиях (26) [9, 10, 12]:

$$\begin{aligned} \varphi(t_0) &= \varphi_0, \quad \lambda(t_0) = \lambda_0, \quad r(t_0) = r_0 \\ h(t_0) &= h_0, \quad V(t_0) = V_0, \quad \theta(t_0) = \theta_0, \quad \Psi(t_0) = \Psi_0 \end{aligned} \quad (26)$$

Для численного решения систем дифференциальных уравнений был использован программный комплекс [15].

Заключение. Интенсивное становление технологий в авиационной промышленности, актуальные задачи и проблемы стали мощным толчком к развитию БПЛА. СВО на новых территориях Российской Федерации и на территории Украины продемонстрировала широкое и эффективное использование БПЛА различного назначения на поле боя. Однако, широкое применение средств радиоэлектронной борьбы (РЭБ) в условиях активной фазы боевых действий противодействует дистанционному управлению и пилотированию боевых дронов. При этом РЭБ не влияет на автономный полет БПЛА. В статье рассмотрено математическое обеспечение системы имитационного моделирования для планирования автономного полета БПЛА.

Литература

1. **Полтавский А.В., Жумабаева А.С., Бикеев Р.Р.** Многофункциональные комплексы беспилотных летательных аппаратов: развитие в системе вооружения. // Надежность и качество сложных систем. 2016, № 1 (13). С. 35-44.
2. **Быстров Р.П., Гвоздев А.Е., Немцов А.В., Потапов А.А., Шеремет И.Б.** Современное состояние и перспективы развития беспилотных летательных аппаратов ведущих стран мира. М.: 3 ЦНИИ МО РФ, 2016. –399 с.

3. **Моисеев В.С.** Комплексы бортового оборудования перспективных беспилотных вертолетов – Казань: Редакционно-издательский центр «Школа», 2021. – 248 с.
4. **Волков В.Г.** Вертолетные оптико-электронные системы наблюдения и разведки. [Электронный ресурс]. Код доступа: <http://www.bnti.ru>.
5. **Краснов А., Путилин А.** БЛА: от разведки к боевым действиям // Зарубежное военное обозрение, 2004, №5. С. 42-49.
6. **Окуньков А.Г.** Анализ тактико-технических характеристик и боевых возможностей российских беспилотных летательных аппаратов, способных решать оперативно-тактические задачи совместно с пилотируемой авиацией / А.Г. Окуньков, Р.Р. Шатовкин. – Текст : электронный // NovaInfo, 2023. № 141. С. 11-14. URL: <https://novainfo.ru/article/20244> (дата обращения: 01.10.2024).
7. **Малахов С.О., Оленко Ф.Ф.** Моделирование динамики полета беспилотных летательных аппаратов в среде динамического моделирования SIMINTECH // Эксплуатация морского транспорта. № 2, 2021.
8. **Исхаков А.Р.** Разработка программного тренажера в среде многоагентного моделирования NetLogo : учебное пособие для вузов / А. Р. Исхаков. – Санкт-Петербург : Издательство «Лань», 2022. – 120 с.
9. **Моисеев В.С.** Динамика полета и управление беспилотными летательными аппаратами: монография. – Казань: Редакционно-издательский центр «Школа», 2017. – 416 с.
10. **Моисеев В.С.** Прикладная теория управления беспилотными летательными аппаратами: монография. – Казань: ГБУ «Республиканский центр мониторинга качества образования», 2013. – 768 с.
11. **Лебедев А.А., Чернобровкин Л.С.** Динамика полета беспилотных летательных аппаратов: учебное пособие для вузов. Изд. 2-е, переработанное и доп. М.: «Машиностроение», 1973. – 616 с.
12. **Моисеев В.С.** Групповое применение беспилотных летательных аппаратов: монография. – Казань: Редакционно-издательский центр «Школа», 2017 – 572 с.
13. **Крутько П.Д.** Обратные задачи динамики управляемых систем: нелинейные модели. М.: Наука, 1988. – 328 с.
14. **Корн Г., Корн Т.** Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1984. – 631 с.
15. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2024617070 Российская Федерация. «Программный модуль математического моделирования «Эйлер. Обыкновенные дифференциальные уравнения»: № 2024615449: заявл. 18.03.2024 : опубл. 28.03.2024 / А. Р. Исхаков, Р. Ф. Маликов; заявитель Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Башкирский государственный педагогический университет имени М. Акмуллы».