УДК 519.872

# Численный метод расчета многоканальных систем массового обслуживания с потоком Парето

Рыжиков Ю. И., Уланов А. В.

***Постановка задачи:*** *анализ структуры потоков информации в сетях передачи данных показывает, что по своей природе они являются самоподобными. Одним из способов моделирования самоподобного трафика является распределение Парето. Предложен метод, позволяющий моделировать процесс обслуживания потока с распределением Парето.* ***Целью работы*** *является разработка более точного по сравнению с имитационным моделированием численного метода расчета многоканальных систем массового обслуживания с входящим потоком заявок, интервалы между которыми описываются распределением Парето Pa/M/n.* ***Используемые методы****: с помощью построения вложенной цепи Маркова получены выражения для расчета распределения числа заявок. Через преобразование Лапласа-Стильтьеса получено выражение для распределения времени ожидания.* ***Новизна:*** *представленный метод впервые позволяет получить аналитические выражения для вероятностно-временных характеристик многоканальных систем с входящим потоком, описываемым распределением Парето.* ***Результат****: разработана реализующая вычисления программа на Фортране. Приведено сопоставление результатов применения численного метода с результатами имитационного моделирования. Показано, что предложенный метод позволяет с высокой точностью вычислять вероятностно-временные характеристики многоканальных СМО Pa/M/n.* ***Практическая значимость****: представленный метод (особенно его программная реализация) может быть полезен при разработке математических моделей обработки трафика со сложной структурой для обоснования требований к пропускной способности каналов связи и характеристикам сетевого оборудования.*

***Ключевые слова:*** *самоподобный трафик, системы массового обслуживания, численные методы, распределение Парето.*

## Введение

Современные исследования структуры трафика в телекоммуникационных сетях показали, что по своей природе он является самоподобным или фрактальным. Считается, что общих аналитических результатов исследования очередей или влияния фрактальности трафика на качество его обслуживания в настоящее время не существует [1]. Однако по крайней мере часть задач, интересующих практиков, может быть решена с использованием распределения Парето, которое Б. Мандельброт считал «ближайшим родственником» фракталов. Распределение Парето, оно же гиперболическое или степенное, имеет функцию распределения

$$F(t) = 1 - \left(\frac{K}{t}\right)^{\alpha}, \ t \ge K,$$

где $K$, $\alpha$ – параметры распределения.

**Библиографическая ссылка на статью:**
Рыжиков Ю. И., Уланов А. В. Численный метод расчета многоканальных систем массового обслуживания с потоком Парето // Системы управления, связи и безопасности. 2021. № 2. С. 1-11. DOI: 10.24412/2410-9916-2021-2-1-11.

**Reference for citation:**
Ryzhikov Yu. I., Ulanov A. V. Numerical Method for Calculating Multichannel Queuing Systems with Pareto Distribution of Incoming Flow. *Systems of Control, Communication and Security*, 2021, no. 2, pp. 1-11 (in Russian). DOI: 10.24412/2410-9916-2021-2-1-11.

№2. 2021
ISSN 2410-9916

Моменты распределения Парето порядка $m$ имеют конечные значения только при $\alpha > m$. В этом случае

$$f_m = \frac{\alpha K^m}{\alpha - m}. \tag{1}$$

Поскольку коммуникационные узлы и серверы информационно-телекоммуникационных сетей представляют собой многоканальные устройства, особую практическую ценность приобретают методы анализа *многоканальных* систем массового обслуживания с фрактальным трафиком. В статье [2] предложены аналитические зависимости по результатам имитационного моделирования одноканальных систем $Pa/M/1$, в работе [3] приведено исследование и сопоставление характеристик систем $M/Pa/1$ и $M/M/1$ на имитационной модели. В статье [4] приводятся аналитические результаты для одноканальных систем $M/Pa/1$ и $Pa/M/1$.

Резюмируя вышесказанное, можно сделать вывод о том, что в случае Парето-обслуживания точный расчет возможен только одноканальных систем, причем моменты распределения времени пребывания порядка $m$ существуют только при $\alpha > m$. В работе [4] показано, что при имитационном моделировании данные моменты стабилизируются крайне медленно.

Поскольку в телекоммуникационных сетях поступающий на входы узлов поток пакетов является самоподобным, а сами узлы являются многоканальными устройствами обслуживания, особую ценность представляет модель $Pa/M/n$, аналитические методы исследования которой авторам не встречались. При этом в ряде исследований установлено, что самоподобный трафик на практике имеет параметр $Pa$-распределения $\alpha \in (1, 2)$. Учитывая, что в данном диапазоне распределение Парето не имеет дисперсии и моментов более высокого порядка, аппроксимационные методы, основанные на подборе распределений фазового типа (например, гиперэкспоненциального) по моментам исходного, в данном случае неприменимы.

В настоящей статье предложен аналитический метод численного расчета вероятностно-временных характеристик многоканальных систем с Парето-входящим потоком и экспоненциальным обслуживанием $Pa/M/n$. Результаты применения данного метода для расчета среднего времени ожидания докладывались на конференции [5]. Здесь остановимся подробнее на описании расчетной схемы и влиянии параметров распределения Парето на распределение числа заявок и начальные моменты времени обслуживания.

## Распределение числа заявок

Метод построения вложенной цепи Маркова и последующего расчета системы общего вида $GI/M/n$ был предложен Л. Такачем [6] в 1962 г. Приведем его модификацию с учетом $Pa$-входящего потока.

Вложенная цепь Маркова контролирует число заявок в системе на моменты времени, непосредственно предшествующие поступлению очередного требования (моменты регенерации). Распределение вероятностей числа заявок в такие моменты находится из системы уравнений

$$\pi_k = \sum_{j=k-1}^{\infty} q_{j,k}\pi_j, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{2}$$

где $q_{j,k}$ – вероятности перехода из $j$-го в $k$-е состояние. В данном случае они зависят не только от разности индексов $j - k$, но и от значения начального индекса $j$, который определяет количество каналов, производящих обслуживание. Поскольку моменты регенерации непосредственно предшествуют прибытию очередной заявки, максимальное значение $k = j + 1$.

При $j = \overline{0, n-1}$ требование, прибывшее в момент регенерации процесса, переводит его в состояние $j + 1 \le n$; причем из этого числа требований ровно $k$ до следующего момента регенерации должны остаться необслуженными. При показательном распределении времени обслуживания с параметром μ распределение времени его окончания не зависит от уже истекшей длительности. Значит,

$$q_{j,k} = \binom{j+1}{k} \int_0^{\infty} e^{-k\mu t}(1 - e^{-\mu t})^{j+1-k}\, dA(t),\ j = \overline{0, n-1};\ \ k = \overline{0, j+1}, \tag{3}$$

где $A(t)$ – функция распределения интервалов между заявками входящего потока.

В случае $j \ge n$ и $k \ge n$ в течение всего интервала времени между последовательными прибытиями заявок имеет место простейший поток обслуживаний с параметром $n\mu$. Таким образом, здесь

$$q_{j,k} = \int_0^{\infty} \frac{(n\mu t)^{j+1-k}}{(j+1-k)!} e^{-n\mu t} dA(t), \quad j, k \ge n.$$

Более сложных рассуждений требует случай $j \ge n$, $k < n$ – здесь система, приняв очередное требование, в процессе обслуживания переходит от режима полной занятости к работе с недогрузкой. Для перехода данного вида необходимо последовательное выполнение двух условий:

1) $n$ каналами обслуживаются $j + 1 - n$ требований, после чего в системе исчезает очередь и остается ровно $n$ требований;

2) за оставшееся до момента регенерации время обслуживаются ровно $n - k > 0$ требований.

Распределение длительности первой фазы при параметре обслуживания $n\mu$ есть распределение Эрланга с плотностью

$$\psi(\tau) = \frac{n\mu(n\mu\tau)^{j-n}}{(j-n)!} e^{-n\mu\tau}.$$

При полной длительности интервала между требованиями $t$ вероятность обслуживания $n - k$ требований за оставшееся время $t - \tau$

$$\delta_k(t-\tau) = \binom{n}{k} e^{-k\mu(t-\tau)} \left[1 - e^{-\mu(t-\tau)}\right]^{n-k}.$$

 ISSN 2410-9916

Окончательно для этого диапазона

$$q_{j,k}=\int_0^\infty\left[\int_0^t \delta_k(t-\tau)\psi(\tau)d\tau\right]dA(t)=$$
$$=\binom{n}{k}\int_0^\infty e^{-k\mu t}\left[\int_0^t\left(e^{-\mu\tau}-e^{-\mu t}\right)^{n-k}\frac{(n\mu\tau)^{j-n}}{(j-n)!}n\mu d\tau\right]dA(t),\ j\ge n,\ k<n. \tag{4}$$

Такач показал [5], что уравнения (2) для состояний, соответствующих полностью загруженной системе ($k \ge n$), могут быть преобразованы к виду

$$\pi_k = C\omega^{k-n},\quad k=n-1, n, ..., \tag{5}$$

где ω – корень уравнения

$$\omega=\int_0^\infty e^{-n\mu t(1-\omega)}dA(t) \tag{6}$$

из промежутка (0, 1), который существует при $n\mu a > 1$, где $a$ – среднее значение интервала между заявками входящего потока.

Заметим, что при $k = n$ из формулы (5) следует равенство $C = \pi_n$, так что

$$\pi_k=\pi_n\omega^{k-n},\ \ k=n-1,\ n,\ ...$$

Таким образом, для $k \ge n$ значения $\{\pi_k\}$ могут быть вычислены рекуррентно через $\pi_n$, и задача сводится к определению начальных вероятностей $\{\pi_k\}$ при $k < n$.

Остановимся подробнее на решении уравнения (6) для $A(t)$ из класса распределений Парето:

$$\omega=\int_0^\infty e^{-n\mu t(1-\omega)}\frac{\alpha K^\alpha}{t^{\alpha+1}}dt=\alpha K^\alpha\int_0^\infty t^{-\alpha-1}e^{-n\mu t(1-\omega)}dt=$$
$$=\alpha\left[Kn\mu(1-\omega)\right]^\alpha\int_{Kn\mu(1-\omega)}^\infty u^{-\alpha-1}e^{-u}du.$$

Последний интеграл является неполной гамма-функцией

$$\hat{\Gamma}(-\alpha,z)=\Gamma(-\alpha)-\gamma(-\alpha,z),$$

где $z = Kn\mu(1-\omega)$, а выражение $\gamma(-\alpha, z)$ считается с помощью степенного ряда:

$$\gamma(-\alpha,z)=z^{-\alpha}\sum_{i=0}^\infty\frac{(-z)^i}{i!(i-\alpha)}.$$

Перепишем систему (2) для $k=\overline{1,\ n}$, выделив отдельно вероятности, которые выражаются через $\pi_n$ и ω:

$$\pi_k=\sum_{j=k-1}^{n-1}q_{j,k}\pi_j+\sum_{j=n}^\infty q_{j,k}\pi_n\omega^{j-n}. \tag{7}$$

DOI: 10.24412/2410-9916-2021-2-1-11
URL: http://sccs.intelgr.com/archive/2021-02/01-Ryzhikov.pdf

Вторая сумма после подстановки $\{q_{j,k}\}$ из (4) сводится к

$$n\mu\pi_n \int\limits_0^\infty \int\limits_0^t \binom{n}{k} e^{-k\mu t} \left(e^{-\mu\tau} - e^{-\mu t}\right)^{n-k} \sum_{j=n}^{\infty} \frac{(n\mu\omega\tau)^{j-n}}{(j-n)!} d\tau dA(t) =$$

$$= n\mu\pi_n \int\limits_0^\infty \left\{ \binom{n}{k} e^{-k\mu t} \sum_{i=0}^{n-k} (-1)^i \binom{n-k}{i} \int\limits_0^t e^{-(n-k-i)\mu\tau} e^{-i\mu t} e^{n\mu\omega\tau} d\tau \right\} dA(t) =$$

$$= n\mu\pi_n \binom{n}{k} \sum_{i=0}^{n-k} (-1)^i \binom{n-k}{i} \int\limits_0^\infty e^{-(k+i)\mu t} \left\{ e^{-\mu\tau(n-k-i-n\omega)} d\tau \right\} dA(t) =$$

$$= n\mu\pi_n \binom{n}{k} \sum_{i=0}^{n-k} (-1)^i \binom{n-k}{i} \int\limits_0^\infty e^{-(k+i)\mu t} \frac{1 - e^{-\mu t(n-k-i-n\omega)}}{\mu(n-k-i-n\omega)} dA(t) =$$

$$= n\pi_n \sum_{i=0}^{n-k} (-1)^i \frac{n!}{k!i!(n-k-i)!} \int\limits_0^\infty \frac{e^{-(k+i)\mu t} - e^{-\mu t n(1-\omega)}}{n-k-i-n\omega} dA(t).$$

Положим

$$\beta_0^{(j)} = \int\limits_0^\infty e^{-j\mu t} dA(t). \qquad (8)$$

С учетом выражений (6) и (8) вторая сумма из формулы (7):

$$\sum_{j=n}^{\infty} q_{j,k} \pi_n \omega^{j-n} = n\pi_n \sum_{i=0}^{n-k} (-1)^i \frac{n!}{k!i!(n-k-i)!} \frac{\beta_0^{(k+i)} - \omega}{n(1-\omega)-(k+i)}.$$

Теперь упростим выражение для $q_{j,k}$ из первой суммы в формуле (7). На основании (3) и (8)

$$q_{j,k} = \binom{j+1}{k} \int\limits_0^\infty e^{-k\mu t} \left(1 - e^{-\mu t}\right)^{j+1-k} dA(t) =$$

$$= \sum_{i=0}^{j+1-k} (-1)^i \binom{j+1}{k} \binom{j+1-k}{i} \int\limits_0^\infty e^{-\mu t(k+i)} dA(t) =$$

$$= \sum_{i=0}^{j+1-k} (-1)^i \frac{(j+1)!}{k!i![j+1-(k+i)]!} \beta_0^{(k+i)}.$$

Условие нормировки вероятностей $\{\pi_j\}$ имеет вид

$$\sum_{j=0}^{n-1} \pi_j + \sum_{j=n}^{\infty} \pi_n \omega^{j-n} = \sum_{j=0}^{n-1} \pi_j + \frac{\pi_n}{1-\omega} = 1.$$

 ISSN 2410-9916

В результате имеем систему линейных алгебраических уравнений для нахождения начальных $\{\pi_j\}$:

$$\sum_{j=0}^{n-1}\pi_j + \frac{\pi_n}{1-\omega} = 1,$$

$$\sum_{j=k-1}^{n-1}\pi_j \sum_{i=0}^{j+1-k}(-1)^i \frac{(j+1)!\beta_0^{(k+i)}}{k!i![j+1-(k+i)]!} - \pi_k +$$

$$+ n\pi_n \sum_{i=0}^{n-k}(-1)^i \frac{n!}{k!i!(n-k-i)!}\frac{\beta_0^{(k+i)}-\omega}{n(1-\omega)-(k+i)} = 0,\ k = \overline{1, n}.$$

Последующие финальные вероятности вложенной цепи Маркова вычисляются по формуле (5).

Для нахождения стационарного распределения числа заявок применим принцип баланса переходов между смежными состояниями вложенной цепи Маркова. Немарковские переходы из $(k-1)$-го в $k$-е состояние – по прибытию заявок – осуществляются с интенсивностью $\pi_{k-1}/a$, где $a$ – среднее значение интервала между заявками входящего потока. Переходы в обратном направлении – по обслуживанию – осуществляются с интенсивностью $p_k\mu_k$.

Исходя из данного принципа, стационарное распределение числа заявок в системе вычисляется по формулам

$$p_k = \begin{cases} \pi_{k-1}/(k\mu a), & k = \overline{1, n}, \\ \pi_{k-1}/(n\mu a), & k = n, n+1, \ldots \end{cases}$$

Стационарную вероятность $p_0$ застать систему свободной можно определить из условия

$$p_0 = 1 - \left[\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)p_k + b/a\right]\Big/ n.$$

## Временные характеристики

Найдем распределение времени ожидания начала обслуживания. Пребывающая в систему со свободными каналами заявка немедленно принимается на обслуживание. Если же она застает в системе $k \geq n$ заявок, то до ее выборки из очереди должны обслужиться $k-n+1$ заявок, причем параметр обслуживания равен $n\mu$. Тогда преобразование Лапласа-Стильтьеса (ПЛС) плотности искомого распределения

$$\varphi(s) = \sum_{k=n}^{\infty}\pi_k\left(\frac{n\mu}{n\mu+s}\right)^{k-n+1} = \pi_n\left(\frac{n\mu}{n\mu+s}\right)\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{n\mu\omega}{n\mu+s}\right)^k =$$

$$= \pi_n \frac{n\mu}{n\mu+s}\frac{1}{1-n\mu\omega/(n\mu+s)} = \frac{n\mu\pi_n}{n\mu(1-\omega)+s}.$$

DOI: 10.24412/2410-9916-2021-2-1-11
URL: http://sccs.intelgr.com/archive/2021-02/01-Ryzhikov.pdf 

Выполняя обратное преобразование для имеющего дополнительный множитель $1/s$ изображения *функции распределения*, получим

$$\Phi(t)=\frac{n\mu\pi_n}{-n\mu(1-\omega)}\left[e^{-n\mu(1-\omega)t}-1\right]=\frac{\pi_n}{1-\omega}\left[1-e^{-n\mu(1-\omega)t}\right].$$

Заметим, что первый множитель $\pi_n(1-\omega)$ равен вероятности того, что новая заявка застанет систему занятой. Условная функция распределения ненулевого ожидания

$$\hat{\Phi}(t)=1-e^{-n\mu(1-\omega)t}.$$

Как и следовало ожидать, упомянутое распределение является экспоненциальным независимо от вида распределения интервалов между заявками входящего потока.

Начальные моменты безусловного времени ожидания

$$w_k=\frac{\pi_n}{1-\omega}\frac{k!}{[n\mu(1-\omega)]^k},\ k=1,2,... \tag{9}$$

Время пребывания заявки в системе является суммой времени ожидания и времени обслуживания. Соответственно, распределение времени пребывания можно получить сверткой распределений ожидания обслуживания. Свертку удобно выполнить непосредственно в моментах на основе символьного разложения

$$v_k=(w+b)^k,$$

при котором после раскрытия скобок показатели степени являются порядками соответствующих моментов.

## Численные результаты

Представленный метод расчета системы *Pa*/*M*/*n* был программно реализован на языке Фортран 90.

На рис. 1 представлены результаты расчета распределения числа заявок $\{p_j\}$ в системе *Pa*/*M*/*n* при следующих исходных данных:

– число каналов $n = 3$;
– коэффициент загрузки $\rho = 0{,}8$;
– средняя интенсивность входящего потока $\lambda = 1$;
– параметр Парето $\alpha = \{1{,}2;\ 1{,}5;\ 1{,}8;\ 2{,}1;\ 2{,}5;\ 3{,}2;\ 4{,}2\}$.

Необходимый для расчета параметр распределения Парето $K$ рассчитывался из формулы (1), а интенсивность $\mu$ экспоненциального обслуживания – из формулы $\rho = \lambda/(n\mu)$.

Сплошными линиями показаны результаты, полученные с помощью аналитического метода, штриховыми – с помощью имитационного моделирования, справа указаны значения параметра $\alpha$.

DOI: 10.24412/2410-9916-2021-2-1-11
URL: http://sccs.intelgr.com/archive/2021-02/01-Ryzhikov.pdf

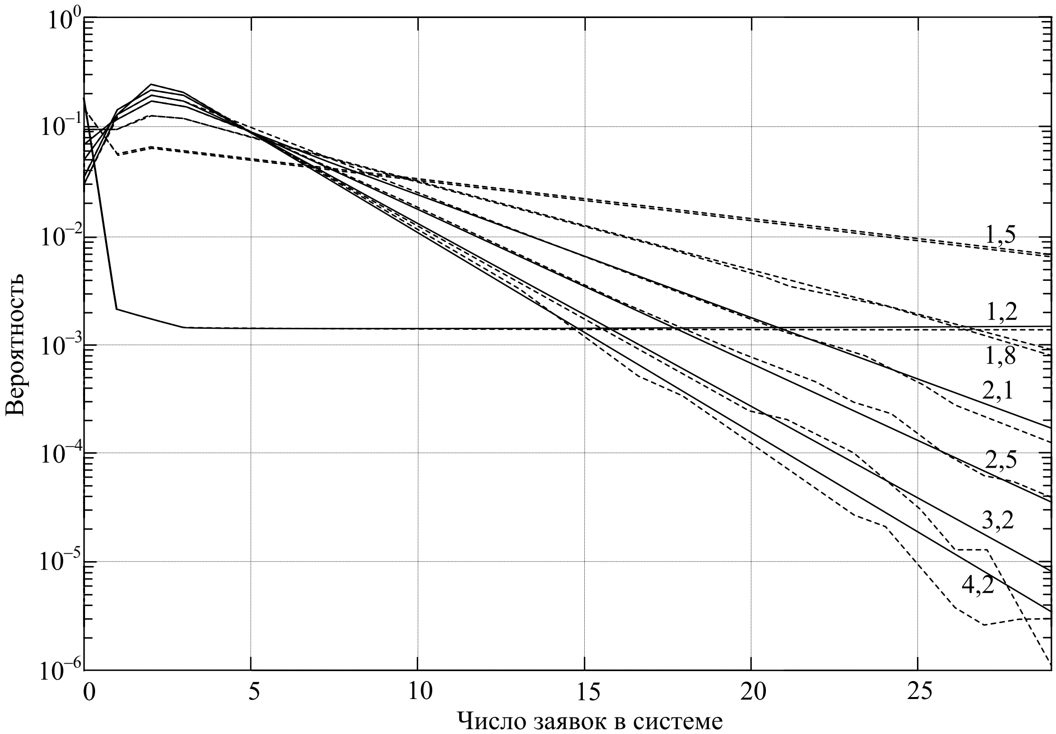


Рис. 1. Распределение числа заявок в системе $Pa/M/3$

Из представленного графика видно хорошее согласие результатов имитации и численного расчета стационарного распределения числа заявок. До достижения порядка $10^{-3}$ они практически не отличаются, что позволяет говорить о корректности метода расчета. Дальнейшее увеличение расхождения результатов на «хвостах» распределений можно объяснить малым числом наблюдений длинных очередей при имитации.

Особый интерес случай $\alpha = 1{,}2$. Здесь максимальное значение имеет вероятность свободного состояния системы $p_0$, затем начиная с $p_1$ идет уменьшение вероятности практически на два порядка и далее крайне медленное ее убывание. Данный эффект можно объяснить тем, что при таком значении параметра $\alpha$ второй начальный момент распределения интервалов между заявками входящего потока не сходится (равен бесконечности) и наиболее сильно проявляется «фрактальность» потока. Это приводит к тому, что приходящие в систему заявки группируются в пачки, причем интервалы между пачками могут принимать достаточно большие значения. После обслуживания всех заявок из пачки система может оставаться свободной на длительное время.

При тех же исходных данных был проведен расчет трех начальных моментов времени ожидания $\{w_j\}$, $j=\overline{1,3}$. Результаты численного расчета (Числ.) – по формуле (9) и имитационного моделирования (ИМ) приведены в таблице 1.

Здесь также видно хорошее согласие результатов численного расчета и имитационного моделирования. При этом прослеживается тенденция – с увеличением параметра $\alpha$ его влияние на время обслуживания ослабевает.

Рассмотрим влияние числа каналов на среднее время ожидания посредством дробления производительности. Под дроблением производительности понимается увеличение числа каналов при сохранении коэффициента загрузки и интенсивности входящего потока. Результаты расчетов для коэффициента загрузки ρ = 0,9 представлены в таблице 2.

Таблица 1 – Моменты времени ожидания

| α | $w_1$ | | $w_2$ | | $w_3$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | Числ. | ИМ | Числ. | ИМ | Числ. | ИМ |
| 1,2 | 444,9 | 419,4 | $3975\cdot10^2$ | $3792\cdot10^2$ | $5327\cdot10^5$ | $5499\cdot10^5$ |
| 1,5 | 8,411 | 8,047 | 166,6 | 147,8 | 4952 | 3874 |
| 1,8 | 3,274 | 3,211 | 30,37 | 29,08 | 422,7 | 388,8 |
| 2,1 | 2,144 | 2,137 | 14,77 | 14,60 | 152,7 | 148,1 |
| 2,5 | 1,607 | 1,625 | 9,194 | 9,350 | 78,92 | 80,66 |
| 3,2 | 1,279 | 1,277 | 6,382 | 6,257 | 47,77 | 45,36 |
| 4,2 | 1,127 | 1,121 | 5,231 | 5,104 | 36,41 | 34,30 |

Таблица 2. Среднее ожидание при дроблении производительности

| α / *n* | 1,2 | 1,5 | 1,8 | 2,1 | 2,5 | 3,2 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 13430 | 41,77 | 12,29 | 7,497 | 5,488 | 4,370 |
| 3 | 13430 | 41,37 | 11,97 | 7,215 | 5,233 | 4,136 |
| 5 | 13430 | 40,70 | 11,46 | 6,773 | 4,840 | 3,781 |
| 10 | 13430 | 39,36 | 10,51 | 5,992 | 4,165 | 3,183 |
| 30 | 13430 | 37,36 | 9,224 | 4,987 | 3,326 | 2,458 |

Из представленных результатов следует, что при малых значениях параметра α, когда поток приобретает все более выраженные фрактальные свойства, увеличение числа каналов от 2 до 30 практически не влияет на время ожидания.

## Заключение

Представленный метод расчета системы с Парето-входящим потоком позволяет получить распределение числа заявок, распределение времени ожидания и времени пребывания в системе.

Наибольший интерес представляет случай, когда параметры распределения Парето $\alpha \in (1, 2)$. В данном диапазоне наблюдается медленное убывание распределения числа заявок в системе, причем чем ближе параметр к единице, тем более выражен данный эффект.

Предложенный метод может помочь при разработке и исследовании математических моделей информационно-телекоммуникационных сетей, учитывающих фрактальную природу трафика.

## Литература

1. Задорожный В. Н. Аналитико-имитационные исследования Больших Сетевых структур: монография. Омск: Изд-во Омского ГТУ, 2011. – 208 с.

2. Ушанев К. В. Имитационные модели системы массового обслуживания типа Pa/M/1, $H_2$/M/1 и исследование на их основе качества обслуживания

трафика со сложной структурой // Системы управления, связи и безопасности. 2015. № 4. С. 217-251.

3. Кутузов О. И., Татарникова Т. М. К оцениванию и сопоставлению очередей классических и фрактальных систем массового обслуживания // Информационно-управляющие системы. 2016. № 2. С. 48-55. DOI: 10.15217/issn1684-8853.2016.2.48.

4. Рыжиков Ю. И. Теория очередей и распределение Парето // Труды Военно-космической академии имени А.Ф. Можайского. 2015. № 648. С. 28-43.

5. Рыжиков Ю. И., Уланов А. В., Хабаров Р. С. Потоки Парето и их обслуживание // XIII Всероссийское совещание по проблемам управления ВСПУ-2019: Сборник трудов XIII Всероссийского совещания по проблемам управления ВСПУ-2019, 17–20 июня 2019 года. – Москва: Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, 2019. – С. 2995-3001. DOI: 10.25728/vspu.2019.2995.

6. Takacs L. Introduction to the Theory of Queues. New York: Oxford University Press, 1962.

## References

1. Zadorozhny V. N. *Analytical and simulation studies of Large Network structures*. Omsk, Omsk State Technical University Publ., 2011, 208 p. (in Russian).

2. Ushanev K. V. Simulation models of queuing systems of type Pa/M/1, $H_2$/M/1 and research on the basis of their quality of service traffic with a complicated structure. *Systems of Control, Communication and Security*, 2015, no. 4, pp. 217-251 (in Russian).

3. Kutuzov O. I., Tatarnikova T. M. Evaluation and comparison of queues in classical and fractal queuing systems. *Information and Control Systems*, 2016, vol. 81, no. 2, pp. 48-55 (in Russian). DOI: 10.15217/issn1684-8853.2016.2.48.

4. Ryzhikov Yu. I. Queuing theory and Pareto distribution. *Proceedings of the Mozhaisky Military Space Academy*, 2015, vol. 648, pp. 28-43 (in Russian).

5. Ryzhikov Yu. I., Ulanov A. V., Khabarov R. S. Potoki Pareto i ikh obsluzhivaniye [Pareto flows and their servicing]. *XIII Vserossiyskoye soveshchaniye po problemam upravleniya VSPU-2019: Sbornik trudov XIII Vserossiyskogo soveshchaniya po problemam upravleniya VSPU-2019* [XIII All-Russian Meeting on Control Sciences «VSPU-2019»: Proceedings of the XIII All-Russian Meeting on Control Sciences «VSPU-2019»]. Moscow, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of Russian Academy of Science, 2019, pp. 2995-3001 (in Russian). DOI: 10.25728/vspu.2019.2995.

6. Takacs L. *Introduction to the Theory of Queues*. New York, Oxford University Press, 1962.

**Статья поступила 15 марта 2021 г.**

## Информация об авторах

*Рыжиков Юрий Иванович* – доктор технических наук, профессор, Заслуженный деятель науки Российской Федерации. Ведущий научный сотрудник лаборатории информационных технологий в системном анализе и моделировании. Санкт-Петербургский институт информатики и автоматизации РАН. Область научных интересов: теория управления запасами; численные методы теории очередей; науковедение; педагогика высшей школы. E-mail: ryzhbox@yandex.ru

*Уланов Александр Викторович* – кандидат технических наук. ООО «Корпорация «Интел групп». Область научных интересов: численные методы теории очередей; прикладная теория вероятностей; моделирование организационно-технических систем. E-mail: ulanov246@rambler.ru

Адрес: 199178, Россия, г. Санкт-Петербург, 14-я линия В.О., д. 39.

---

## Numerical Method for Calculating Multichannel Queuing Systems with Pareto Distribution of Incoming Flow

Yu. I. Ryzhikov, A. V. Ulanov

***Purpose.*** *Analysis of communication networks traffic shows that it has a self-similar structure. Such traffic may be described by using Pareto distribution. A method of modeling queuing systems with such type of incoming flow is proposed.* ***The main aim*** *is development more precision numerical method for calculation queuing systems Pa/M/n in comparison with simulation.* ***Methods.*** *There has been proposed to use embedded Markov chain for evaluation of distribution of number of customers. Laplace–Stieltjes transform distribution of waiting time is shown.* ***Novelty.*** *Presented method allows for the first time to calculate probabilistic characteristics of queue length and waiting time in multichannel queuing systems with Pareto distribution of incoming flow.* ***Results.*** *Software implementation of presented method was developed. It presents a comparison of the results of application of numerical method and simulation modeling.* ***Practical relevance.*** *The presented method (especially its software implementation) may be useful in the development of mathematical models for processing traffic with a complex structure to support the requirements for the bandwidth of communication channels and the characteristics of network equipment.*

***Key words:*** *self-similar traffic, queuing systems, numerical methods, Pareto distribution.*

### Information about Authors

*Yuriy Ivanovich Ryzhikov* – Dr. habil. of Engineering Sciences, Full Professor, Honoured Scientist of the Russian Federation. Lead researcher of Laboratory of Information Technologies in System Analysis and Modeling. Saint Petersburg Institute for Informatics and Automation of the Russian Academy of Sciences. Field of research: theory of inventory management, numerical methods of queuing theory; pedagogy of higher education. E–mail: ryzhbox@yandex.ru

*Alexander Viktorovich Ulanov* – Ph.D. of Engineering Sciences. Intel Group Corporation. Field of research: numerical methods of queuing theory; applied probability theory, organizational and technical systems modeling. E–mail: ulanov246@rambler.ru

Address: Russia, 199178, Saint-Petersburg, 14-th Linia, VI, No. 39.