КОНСТРУИРОВАНИЕ И МОДЕЛИРОВАНИЕ РЕКУРРЕНТНЫХ АЛГОРИТМОВ ОБОБЩЕННОЙ СТОХАСТИЧЕСКОЙ АППРОКСИМАЦИИ

К.Р. Чернышев (Москва)

В идентификации динамических систем широко используется параметризованное описание их моделей как прогноза $\hat{y}(t,\theta)$ будущих значений выходного процесса $y(t)$ [1]. Здесь θ – вектор параметров. Случай, когда $\hat{y}(t,\theta)$ представляет собой линейную функцию параметров, $\hat{y}(t,\theta)=\theta^T\varphi(t)$, где $\varphi(t)$ – вектор наблюдений, известен как линейная регрессия, на основе которой, тем не менее, может описываться и широкий класс нелинейных систем.

Естественным практическим ограничением в задачах идентификации является неизвестность модели ненаблюдаемых внешних возмущений, в то время как использование оптимальных алгоритмов обусловливает знание такой модели. При этом в одних приложениях может требоваться определение модели возмущений, в других требуется только идентификация параметров системы. В последнем случае применение оптимальных алгоритмов не представляется необходимым, и достаточно использование алгоритмов, не требующих знания или определения модели внешних возмущений [2].

При неизвестной структуре внешних возмущений единственным методом получения состоятельных оценок параметров моделей остается применение метода инструментальных переменных. При этом по сравнению с традиционным, расширенный метод инструментальных переменных Стойки и Седерстрема [2, 3] позволяет получить более общие условия состоятельности оценки, особенно в случае многомерных систем, и повысить точность оценивания.

Известные подходы к оцениванию линейных по параметром систем [2-15], включая и методы инструментальных переменных, могут в общем случае выражены как оптимизационная задача

$$
\begin{aligned}
&\min_{\theta} E^T(t)Q(t)E(t),\\
&E(t)=\left(\lambda\left(\varepsilon(1)\right),\ldots,\lambda\left(\varepsilon(t)\right)\right)^T,\\
&\varepsilon(k)=y(k)-\hat{y}(k,\theta),\ k=1,\ldots,t,
\end{aligned}
\tag{1}
$$

где $\Omega(t)$ – некоторая $t\times t$-матрица, элементы которой могут зависеть от наблюдаемых переменных системы, $\lambda(\cdot)$ – некоторый скалярный линейный фильтр.

Соответствующий выбор $\Omega(t)$ и $\lambda(\cdot)$ приводит к тому или иному методу параметрической идентификации, основанному на квадратичном критерии качества, и характеризуемым спецификой постановки конкретной задачи идентификации.

Традиционные рекуррентные алгоритмы метода инструментальных переменных строятся аналогично соответствующим алгоритмам метода наименьших квадратов и, соответственно, наследуют их определенные особенности. Как хорошо известно, основная идея построения оценок методом наименьших квадратов состоит в минимизации суммы квадратов расхождения между наблюдаемыми и предсказываемыми выходами значениями выходной переменной системы. При этом при построении рекуррентной последовательности оценок надлежащим образом должно строиться приближение матрицы Гессе критерия идентификации для обеспечения существования всех оценок в данной последовательности.

Особую роль здесь играют как степень обусловленности матрицы Гессе критерия идентификации, так и уровень коррелированности наблюдений. Хорошо известно, что данные обстоятельства существенно влияют на процесс сходимости традиционных рекуррентных оценок, и, следовательно, их применение может приводить к неудовлетворительным результатам.

Обращение матрицы Гессе критерия идентификации исключается при представлении рекуррентных алгоритмов идентификации на основе стохастической аппроксимации вида

$$\begin{aligned} &q(t) = q(t-1) + \mathrm{F}(t)\gamma(t)\left(y(t) - q^T(t-1)j(t)\right),\\ &\mathrm{F}(t) = \left(j(t) \quad \mathrm{K} \quad j(t-m+1)\right), \quad m < \dim q, \end{aligned} \tag{2}$$

с выбором векторнозначного коэффициента усиления $\gamma(t)$ из условия критерия (1).

При идентификации динамических систем с аддитивными помехами, которые в общем случае не являются белым шумом, и структура которых не предполагается известной, выбор коэффициента усиления $\gamma(t)$ в (2) осуществляется из условия, основанного на применении расширенного метода инструментальных переменных. Такой подход позволяет строить сильно состоятельные, то есть сходящиеся с вероятностью 1, рекуррентные алгоритмы идентификации в условиях большой общности параметрического описания исследуемых систем, обеспечивая при этом устойчивость текущих оценок к наблюдаемым данным.

Вообще говоря, необходимость использования матрицы, обратной к матрице Гессе квадратичного критерия идентификации, не обязательно является препятствием для сходимости рекуррентных алгоритмов, построенных на его непосредственной минимизации. При этом в случае плохой обусловленности матрицы Гессе в качестве существенного фактора, принципиально ухудшающего свойства сходимости традиционных алгоритмов, следует рассматривать автокоррелированность внешних возмущений, сказывающуюся на характере выборочных ковариаций, на основе которых формируются компоненты матрицы Гессе критерия идентификации.

Так, на рис. 1-3 представлены примеры, демонстрирующие сравнение свойств сходимости алгоритмов, полученных в соответствии с данным подходом (кривые $h^{N2}{}_t$ -$h^{N7}{}_t$, при этом цифра в наименовании соответствует использованному значению $m = \dim\gamma(t)$ в формуле (2)), и рекуррентного варианта расширенного метода инструментальных переменных, в дальнейшем – $RExIV$ –алгоритм (кривая $h^{R}{}_t$). По оси ординат при этом показывается квадрат эвклидовой нормы текущей ошибки идентификации.

Как видно, для традиционного рекуррентного представления ($RExIV$-алгоритм) свойства сходимости могут существенно варьироваться: от хороших результатов (рис. 1, степень обусловленности матрицы Гессе имеет порядок 10^{2}) до отсутствия сходимости вообще (рис. 2 и 3, степень обусловленности матрицы Гессе имеет порядок 10^{7}).

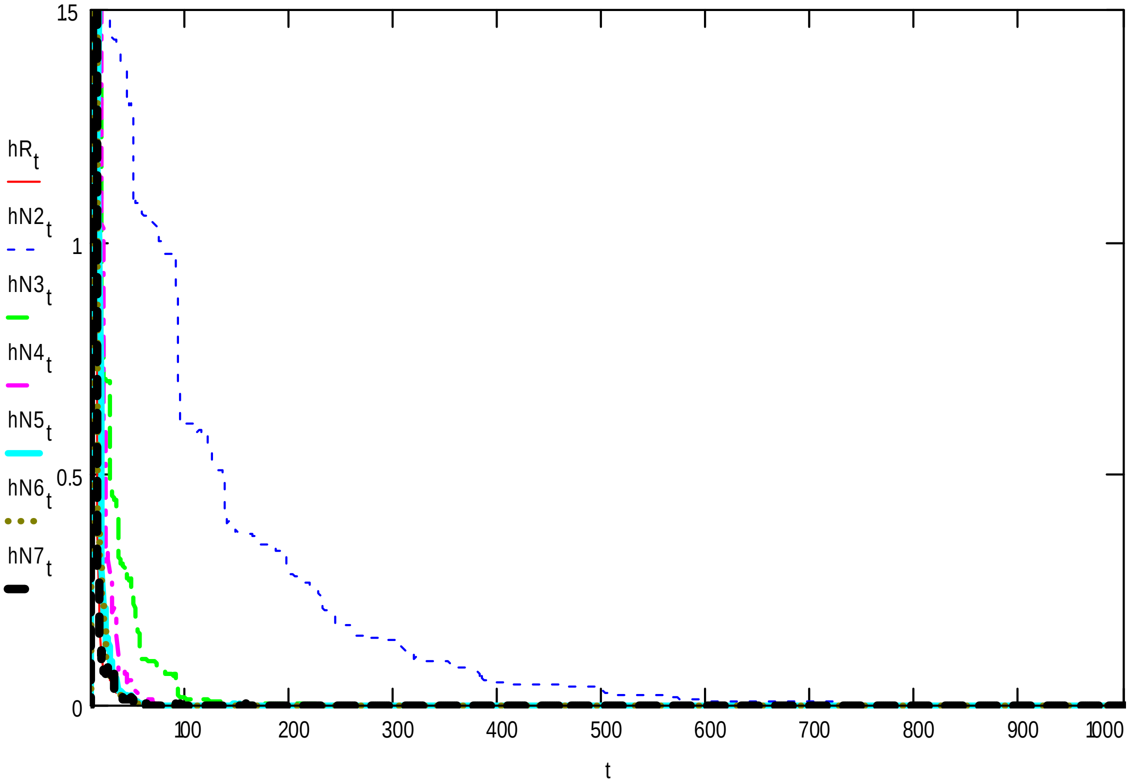

Рис. 1. Сравнение свойств сходимости полученных алгоритмов (цифра в наименовании соответствует использованному значению m в формуле (2)) и рекуррентного варианта расширенного метода инструментальных переменных. Степень обусловленности матрицы Гессе имеет порядок 10^2

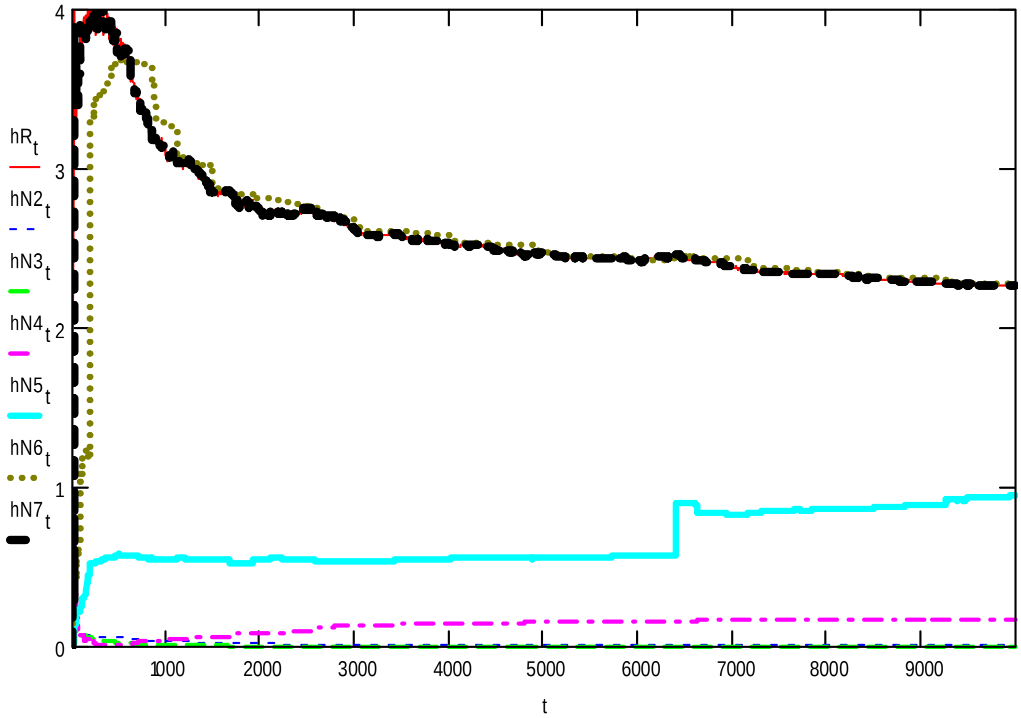

Рис. 2. Сравнение свойств сходимости полученных алгоритмов (цифра в наименовании соответствует использованному значению m в формуле (2)) и рекуррентного варианта расширенного метода инструментальных переменных. Степень обусловленности матрицы Гессе имеет порядок 10^7

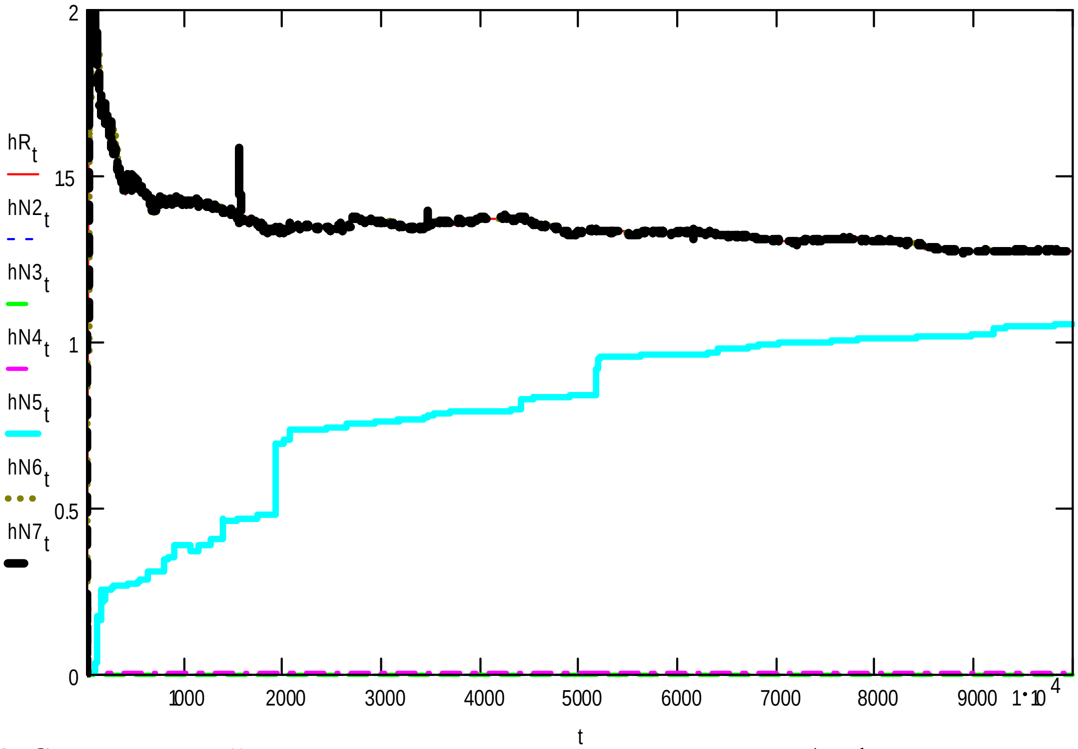

Рис. 3. Сравнение свойств сходимости полученных алгоритмов (цифра в наименовании соответствует использованному значению m в формуле (2)) и рекуррентного варианта расширенного метода инструментальных переменных.Степень обусловленности матрицы Гессе имеет порядок 10^7

Детализацией рисунков 2 и 3 являются рисунки 4 и 5 соответственно.

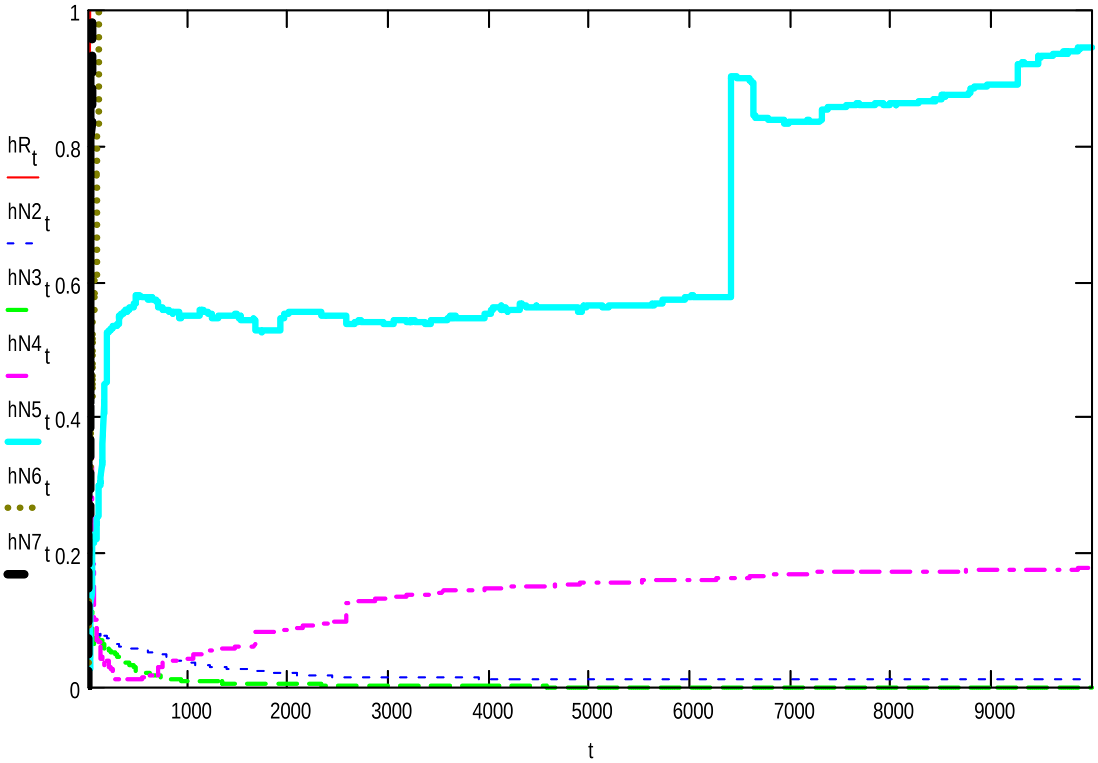

Рис. 4. Детализация рисунка 2: сравнение свойств сходимости полученных алгоритмов (цифра в наименовании соответствует использованному значению m в формуле (2)) и рекуррентного варианта расширенного метода инструментальных переменных

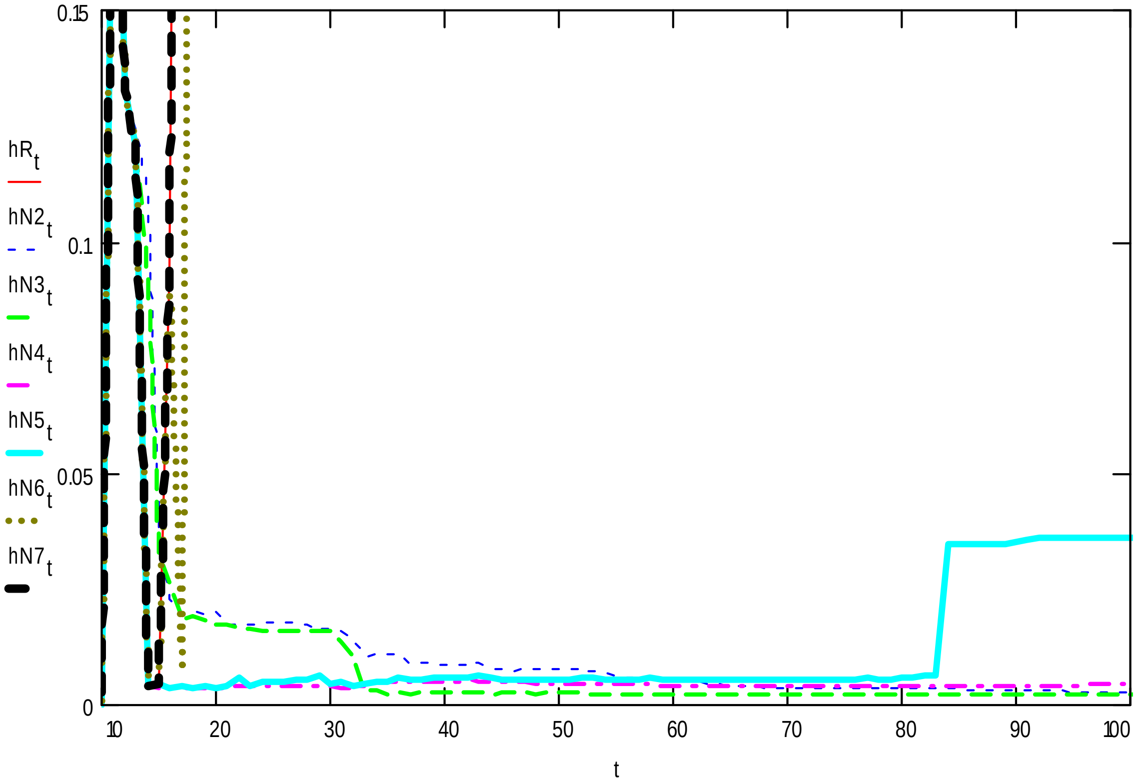

Рис. 5. Детализация рисунка 3: сравнение свойств сходимости полученных алгоритмов (цифра в наименовании соответствует использованному значению m в формуле (2)) и рекуррентного варианта расширенного метода инструментальных переменных

С теоретической точки зрения, чем больше значение m, тем больше поведение алгоритма (2) должно «напоминать» поведение $RExIV$ –алгоритма, причем при $m = \dim q$ должно наступать совпадение. Такой характер поведения рассматриваемых алгоритмов наглядно подтверждается представленными рисунками. При этом если в случае, представленном на рис. 1, скорость сходимости возрастает с ростом m, то в «плохих» случаях (рис. 2 и 3) рост m ведет к потере сходимости алгоритмов.

Для системы, результаты идентификации которой отражены на рис. 1, наивысшую скорость сходимости имеет рекуррентный алгоритм расширенного метода инструментальных переменных. К нему последовательно приближаются алгоритмы (2) по мере увеличения m от 2 до 7. В случаях, представленных на рис. 2 и 3, отчасти (и с «обратным знаком») сохраняется рассмотренное соответствие значений m и качества сходимости: с увеличением m (от 4 до 7) нарушение сходимости алгоритмов (2) становится все сильнее, и их поведение все более приближается к поведению RE-алгоритма. В то же время для относительно небольших значений m (2 и 3) алгоритм (2) демонстрирует хорошие свойства сходимости, причем скорость сходимости при $m = 3$ оказывается наилучшей.

В рассматриваемых случаях это значение m соответствует наибольшему целому числу из интервала $[2,\ (\dim\ q\ -\ 1)/2]$, что может служить рекомендацией по выбору конкретного вида алгоритма класса (2) при их практическом использовании для решения задач идентификации.

Литература

1. **Ljung L.** System Identification: Theory for the User, 2nd Edition, Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 1999, 609 p.
2. **Söderström T. and P. Stoica.** System Identification, Prentice-Hall International, Hemel Hempstead, U.K., 1989.
3. **Söderstrom T. and P.G. Stoica.** Instrumental variable methods for system identification, Springer, New York, 1983, 243 p.
4. **Da-Zheng Feng and Wei Xing Zheng.** Recursive total instrumental-variable algorithm for solving over-determined normal equations and its applications, Signal Processing, 2007, vol. 87, no. 5, pp. 918-936.
5. **Mercère G. and M. Lovera.** Convergence analysis of instrumental variable recursive subspace identification algorithms, Automatica, 2007, vol. 43, no. 8, pp. 1377-1386.
6. **Vidal R.** Recursive identification of switched ARX systems, Automatica, 2008, vol. 44, no. 9, pp. 2274-2287.
7. **Söderström T.** A generalized instrumental variable estimation method for errors-in-variables identification problems, Automatica, 2011, vol. 47, no. 8, pp. 1656-1666.
8. **Wen-Xiao Zhao and Tong Zhou.** Weighted least squares based recursive parametric identification for the submodels of a PWARX system, Automatica, 2012, vol. 48, no. 6, pp. 1190-1196.
9. **Jianshu Li, Yuanjin Zheng, and Zhiping Lin.** Recursive identification of time-varying systems: Self-tuning and matrix RLS algorithms, Systems & Control Letters, 2014, vol. 66, pp. 104-110.
10. **Dankers A., Van den Hof P.M.J., Bombois X. and P.S.C. Heuberger.** Errors-in-variables identification in dynamic networks – Consistency results for an instrumental variable approach, Automatica, 2015, vol. 62, pp. 39-50.
11. **Filipovic V.Z.** Recursive identification of multivariable ARX models in the presence of a priori information: Robustness and regularization, Signal Processing, 2015, vol. 116, pp. 68-77.
12. **Zhu Wang, Qibing Jin and Xiaoping Liu.** Recursive least squares identification of hybrid Box–Jenkins model structure in open-loop and closed-loop, Journal of the Franklin Institute, 2016, vol. 353, no. 2, pp. 265-278.
13. **Brunot M., Janot A., Young P.C., and F. Carrillo.** An improved instrumental variable method for industrial robot model identification, Control Engineering Practice, 2018, vol. 74, pp 107-117.
14. **Kai Wang, Junghui Chen, and Zhihuan Song.** A new excitation scheme for closed-loop subspace identification using additional sampling outputs and its extension to instrumental variable method, Journal of the Franklin Institute, 2018, vol. 355, no. 14, pp. 6675-6692.
15. **Vau B. and H. Bourlès.** Generalized convergence conditions of the parameter adaptation algorithm in discrete-time recursive identification and adaptive control, Automatica, 2018, vol. 92, no. 1, pp. 109-114.