ОЦЕНКА ПЛОТНОСТИ ТРАНСПОРТНОГО ПОТОКА НА ОСНОВЕ ИМИТАЦИОННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ПУНКТА ВЗИМАНИЯ ПЛАТЫ

М.Б. Ласкин, А.Ю. Талавиря (Санкт-Петербург)

В последнее десятилетие в Российской Федерации отмечается рост количества инфраструктурных объектов дорожной сети, в частности, платных автомобильных дорог. Преимуществом платных дорог является скорость перемещения, достигаемая за счет более высокого скоростного режима по сравнению с бесплатными дорогами-дублерами, а также отсутствие пересечений с другими дорогами (как следствие, отсутствие светофорных объектов) на пути следования, что позволяет сокращать время в пути при пассажирских и грузовых перевозках. На сегодняшний день на стадии эксплуатации находятся платные автомобильные дороги М-4 «Дон», М-1 «Беларусь», М-3 «Украина», М-11 «Нева», Центральная кольцевая автомобильная дорога Московской области и Западный скоростной диаметр (Санкт-Петербург). На стадиях проектирования и строительства находятся проекты М-12 «Москва-Казань», трасса «Казань-Екатеринбург», Северный дублер Кутузовского проспекта (Москва), широтная магистраль скоростного движения (Санкт-Петербург) и Обход (Хабаровск).

Ожидается непрерывный рост данного сегмента транспортной отрасли, который будет наблюдаться на протяжении ближайших десятилетий. Важно отметить, что расширение отечественной дорожной сети оказывает положительное влияние не только на развитие транспортной сети страны, но также на социально-экономическое развитие окружающих территорий. Платные дороги в значительной степени оснащены передовыми цифровыми технологиями, интеллектуальными транспортными системами (далее – ИТС), направленными на повышение безопасности и качества дорожного сервиса. Следует отметить, что наличие ИТС является обязательным и закреплено постановлением правительства РФ [1]. ИТС дают возможность накапливать и собирать большое количество измеряемых эксплуатационных данных, обладающих высокой степенью достоверности. Наличие такой информации позволяет применять высокоэффективные методы анализа и прогнозирования показателей функционирования платных дорог.

Даже хорошо оснащенные современными ИТС платные дороги, направленные на обеспечение скоростного проезда транспортных средств (далее – ТС) на значительных расстояниях, могут иметь ограничения, связанные с заложенными проектными решениями, ширины дорожного полотна, количества пропускных шлюзов на пунктах взимания платы (далее – ПВП), выбором технологических решений системы взимания платы (далее – СВП). Дорожная инфраструктура неотделима от общей социально-экономической среды, в которую она встроена. Территории развиваются, застраиваются, увеличивается количество зарегистрированного транспорта, из-за чего неизменно меняется объем дорожного трафика и его состав. Поэтому важно на стадии проектирования, а затем и на стадии эксплуатации иметь возможность оценить предельные параметры функционирования платной автомобильной дороги в условиях прогнозируемой пропускной способности. Очевидно, что ПВП всегда имеют предельную пропускную способность и важно как на стадии проектирования, так и на стадии эксплуатации предвидеть возможные изменения трафика, которые могут привести к возникновению транспортных заторов, приводящих к снижению безопасности и пользовательского сервиса для пользователей платной дороги. Имитационное моделирование представляется высокоэффективным и относительно недорогим (по сравнению с исправлением проектных ошибок) инструментом для оценки транспортных потоков и качества функционирования элементов дороги в условиях прогнозируемого дорожного трафика. Отметим, что особое значение имеет изучение мест присоединения платных дорог к улично-дорожной сети через регулируемые (оснащенные светофорами) перекрестки.

Построение имитационных моделей ПВП рассматривалось авторами в статьях [2], [3]. В частности, на имитационных моделях наблюдался следующий эффект: если интенсивность входящего в зону ПВП потока значительно превышает интенсивность исходящего потока, то:

1 перед зоной ПВП начинает формироваться транспортный затор;

2 независимо от того, сколько ручных и автоматических полос находится на ПВП, весь пропускной пункт можно рассматривать как один прибор массового обслуживания (под ним понимается вся зона ПВП от места расширения основного полотна трассы, до места схождения полос ПВП опять в основное полотно). При этом (см. [2], [3]) время прохождения всей зоны ПВП одним ТС является случайной величиной, эмпирическое распределение которой хорошо аппроксимируется гамма-законом распределения (на рис. 1 показан пример эмпирического распределения времени прохода ТС участка дороги от начала зоны подъезда к ПВП до окончания зоны выезда с ПВП, полученный при численном экспериментировании по имитационной модели в условиях высокой входной интенсивности и существования дорожного затора).

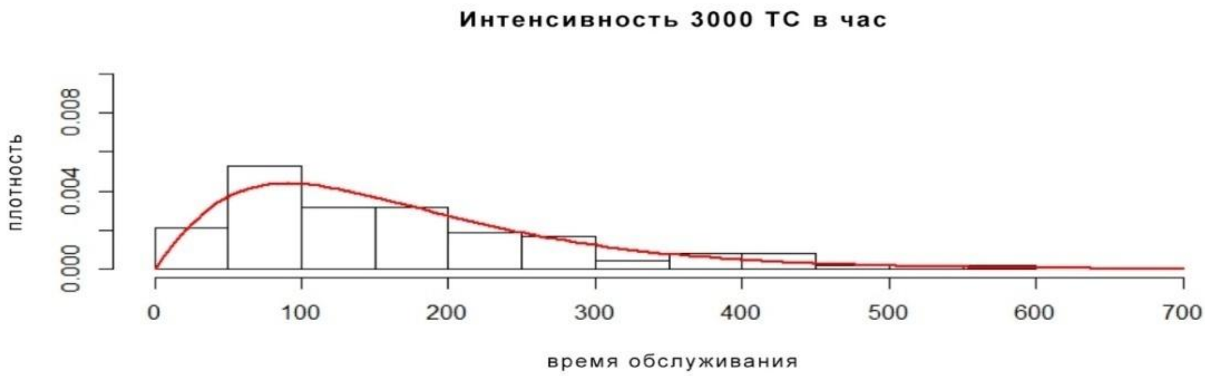

Рис. 1. Эмпирическое распределение времени прохода ТС участка дороги от начала зоны подъезда к ПВП до окончания зоны выезда с ПВП и плотность модельного гамма-распределения.

Существует хорошо развитая теория транспортных потоков, основанная на моделях, заимствованных из гидродинамики и описанная в [4]. Одним из основных показателей потока в таких моделях является плотность потока, выраженная в количестве ТС на единицу длины (например, километр) и зависящая от скорости движения. Обратим внимание, что наличие ПВП на платной дороге позволяет произвести оценку такой плотности потока. Для этого могут быть использованы либо данные ИТС оператора дороги, либо результаты имитационного моделирования. Результаты имитационного моделирования даже наиболее предпочтительны, т.к. данные оператора дороги – это всего лишь результат наблюдений в текущих условиях, а имитационное моделирование позволяет просматривать еще несуществующие режимы и оценивать риски возникновения пробок, возможных финансовых потерь для изменяемых параметров ПВП и потока, ошибок водителей и т.п. В настоящей статье рассматривается способ расчета плотности потока, основанный на наблюдениях за количеством ТС проходящих через зону ПВП за случайное время t, распределенное по гамма закону с параметрами k, μ.

Следуя [5], найдем распределение случайной величины X – количества ТС, приходящих на ПВП или уходящих из зоны ПВП за случайное время t.

Предположим, что входящий поток ТС подчиняется закону Пуассона, с параметром λ. Под λ^{exit} будем понимать интенсивность исходящего из зоны ПВП пуассоновского потока ТС в условиях существующей пробки (т.е. $\lambda > \lambda^{exit}$). Наблюдения за транспортными потоками на платной дороги показывают, что допущение о пуассоновости указанных потоков достаточно обоснованно, несмотря на существование нескольких полос на основном полотне дороги: в качестве события рассматривается пересечение передним бампером ТС линии начала зоны подъезда к ПВП или конца зоны выезда с ПВП (показано на рис. 2).

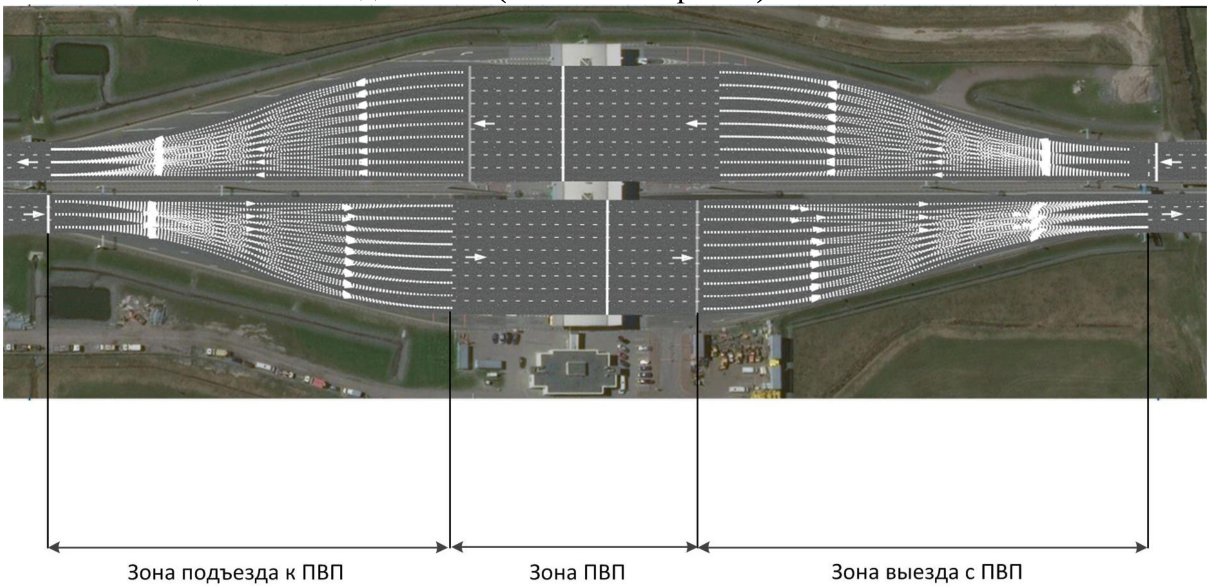

Рис. 2. Пример из разработанной имитационной модели ПВП на прямом ходу Западного скоростного диаметра (Санкт-Петербург).

Начало зоны подъезда к ПВП слева, конец зоны выезда с ПВП – справа

Промежутки времени между такими событиями хорошо аппроксимируются экспоненциальным законом распределения. Рассмотрим вероятность p_m того, что за случайное время t, распределенного по гамма закону с параметрами k, μ, к началу зоны ПВП придет ровно m ТС. Так как плотность гамма-закона распределения равна:

$f(t) = \frac{\mu^k e^{-\mu t}}{\Gamma(k)} t^{k-1}$, где Г(.)–гамма-функция Эйлера

то:

$$p_m = \int_0^{+\infty} \frac{(\lambda t)^m}{m!} e^{-\lambda t} \frac{\mu^k e^{-\mu t}}{\Gamma(k)} t^{k-1} dt = \frac{\lambda^m}{m!} \times \frac{\mu^k}{\Gamma(k)} \times \int_0^{+\infty} t^m e^{-\lambda t} e^{-\mu t} t^{k-1} dt$$

$$= \frac{\lambda^m}{m!} \times \frac{\mu^k}{\Gamma(k)} \times \int_0^{+\infty} t^{m+k-1} e^{-(\lambda+\mu)t} dt$$

Выполним замену переменных: $(\lambda + \mu)t = u; t = \frac{u}{\lambda+\mu}; dt = \frac{1}{\lambda+\mu} du$

и учтем, что по определению: $\Gamma(m + k) = \int_0^{+\infty} u^{m+k-1} e^{-u} du$

$$p_m = \frac{\lambda^m}{m!} \times \frac{\mu^k}{\Gamma(k)} \times \int_0^{+\infty} t^{m+k-1} e^{-(\lambda+\mu)t} dt = \frac{\lambda^m}{m!} \times \frac{\mu^k}{\Gamma(k)} \times \int_0^{+\infty} \frac{u^{m+k-1} e^{-u}}{(\lambda + \mu)^{m+k-1} \times (\lambda + \mu)} du =$$

$$= \frac{\lambda^m}{(\lambda + \mu)^{m+k}} \times \frac{\mu^k}{m!} \times \frac{\Gamma(m+k)}{\Gamma(k)} = \frac{\lambda^m}{(\lambda + \mu)^{m+k}} \times \frac{\mu^k}{m!} \times \frac{(m+k-1)!}{(k-1)!} \times \frac{\Gamma(k)}{\Gamma(k)} =$$
$$= \frac{\lambda^m}{(\lambda + \mu)^{m+k}} \times \frac{\mu^k}{m!} \times \frac{(m+k-1)!}{(k-1)!}$$

Так как $\Gamma(m+k) = \frac{(m+k-1)!}{(k-1)!}\Gamma(k)$, а также учитывая, что $p_0 = \frac{\mu^k}{(\lambda+\mu)^k}$, окончательно получим:

$$p_m = \frac{\lambda^m}{(\lambda + \mu)^m} \times \frac{1}{m!} \times \frac{(m+k-1)!}{(k-1)!} \times p_0$$

Проверка (сумма всех вероятностей должна равняться единице):

$$\sum_{m=0}^{+\infty} p_m = \sum_{m=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{(\lambda t)^m}{m!} e^{-\lambda t} \frac{\mu^k e^{-\mu t}}{\Gamma(k)} t^{k-1} dt = 1$$

Математическое ожидание числа поступивших требований (ТС) (X) за случайное время t, распределенное по гамма закону с параметрами k, μ будет равно:

$$E(X) = \sum_{m=0}^{+\infty} m \times p_m$$
$$= \sum_{m=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} m \times \frac{(\lambda t)^m}{m!} e^{-\lambda t} \frac{\mu^k e^{-\mu t}}{\Gamma(k)} t^{k-1} dt = \lambda \int_0^{+\infty} t$$
$$\times \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{(\lambda t)^i}{i!} e^{-\lambda t} \frac{\mu^k e^{-\mu t}}{\Gamma(k)} t^{k-1} dt = \lambda \int_0^{+\infty} t \times \frac{\mu^k e^{-\mu t}}{\Gamma(k)} t^{k-1} dt$$

Выполняем замену переменных: $\mu t = u$; $t = \frac{u}{\mu}$; $dt = \frac{1}{\mu} du$

$$E(X) = \sum_{m=0}^{+\infty} m \times p_m = \lambda \int_0^{+\infty} t \times \frac{\mu^k e^{-\mu t}}{\Gamma(k)} t^{k-1} dt = \lambda \int_0^{+\infty} t \times \frac{\mu^k e^{-\mu t}}{\Gamma(k)} t^{k-1} dt$$
$$= \frac{\lambda}{\mu \Gamma(k)} \int_0^{+\infty} t^k e^{-u} du = \frac{\lambda k \Gamma(k)}{\mu \Gamma(k)} = \frac{\lambda k}{\mu}$$

Дисперсия и стандартное отклонение числа поступивших требований (ТС) за случайное время, распределенное по гамма закону с параметрами k, μ $(D(X) = E(X^2) - E(X)^2)$ будет равно:

$$E(X^2) = \sum_{m=0}^{+\infty} m^2 \times p_m$$
$$= \sum_{m=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} m^2 \times \frac{(\lambda t)^m}{m!} e^{-\lambda t} \frac{\mu^k e^{-\mu t}}{\Gamma(k)} t^{k-1} dt$$
$$= \int_0^{+\infty} \lambda t \left(\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{(\lambda t)^i}{i!} + \lambda t \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(\lambda t)^J}{J!} \right) e^{-\lambda t} \frac{\mu^k e^{-\mu t}}{\Gamma(k)} t^{k-1} dt$$
$$= \int_0^{+\infty} \lambda t (1 + \lambda t) \frac{\mu^k e^{-\mu t}}{\Gamma(k)} t^{k-1} dt = \frac{\lambda k}{\mu} + \frac{\lambda^2}{\Gamma(k)} \int_0^{+\infty} \mu^k t^{k+1} e^{-\mu t} dt$$

Выполняем замену переменных: $\mu t = u$; $t = \frac{u}{\mu}$; $dt = \frac{1}{\mu} du$

$$E(X^2) = \frac{\lambda k}{\mu} + \frac{\lambda^2}{\Gamma(k)} \int_0^{+\infty} \mu^k t^{k+1} e^{-\mu t} dt = \frac{\lambda k}{\mu} + \frac{\lambda^2}{\mu^2 \Gamma(k)} \int_0^{+\infty} u^{k+1} e^{-u} du$$

$$= \frac{\lambda k}{\mu} + \frac{\lambda^2}{\mu^2 \Gamma(k)} \times \Gamma(k+2) = \frac{\lambda k}{\mu} + \frac{\lambda^2}{\mu^2}(k+1)k$$

Таким образом, дисперсия будет равна:

$$D(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{\lambda k}{\mu} + \frac{\lambda^2}{\mu^2}(k+1)k - (\frac{\lambda k}{\mu})^2 = \frac{\lambda k}{\mu}(1 + \frac{\lambda}{\mu})$$

Стандартное отклонение равно:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{\frac{\lambda k}{\mu}\left(1 + \frac{\lambda}{\mu}\right)} = \frac{\lambda}{\mu}\sqrt{k(1 + \frac{\mu}{\lambda})}.$$

Таким образом, случайная величина X – количество ТС, приходящих на ПВП за случайное времяt распределенное по гамма закону с параметрами k, μ имеет полный набор вероятностей:

$$p_m = \frac{\lambda^m}{(\lambda + \mu)^m} \times \frac{1}{m!} \times \frac{(m+k-1)!}{(k-1)!} \times p_0$$

Её математическое ожидание равно:

$$E(X) = \frac{\lambda k}{\mu}$$

Стандартное отклонение равно:

$$\sigma(X) = \frac{\lambda}{\mu}\sqrt{k(1 + \frac{\mu}{\lambda})}.$$

Из полученного результата вытекают два следствия.

Следствие 1.

Количество ТС, выезжающих из зоны ПВП (предшествующих транспортному средству, для которого начат отсчет случайного времени прохождения через зону ПВП), имеет аналогичный закон распределения с параметром λ^{exit}:

$$p_m = \frac{{\lambda^{exit}}^m}{(\lambda^{exit} + \mu)^m} \times \frac{1}{m!} \times \frac{(m+k-1)!}{(k-1)!} \times p_0 \quad (1)$$

его математическое ожидание равно:

$$\mathrm{E}(\mathrm{X}) = \frac{\lambda^{exit}\mathrm{k}}{\mu} \quad (2)$$

дисперсия равна:

$$\mathrm{D}(\mathrm{X}) = \frac{\lambda^{exit}\mathrm{k}}{\mu}(1 + \frac{\lambda^{exit}}{\mu}) \quad (3)$$

стандартное отклонение равно:

$$\sigma(\mathrm{X}) = \frac{\lambda^{exit}}{\mu}\sqrt{\mathrm{k}(1 + \frac{\mu}{\lambda^{exit}})} \quad (4)$$

Следствие 2.

Если время прохода t транспортного средства через зону ПВП случайно и распределено по гамма закону с параметрами k, μ, то обратная величина $v = \frac{1}{t}$ распределена по закону обратной гаммы (в англоязычной литературе inverse-gammadistribution) с плотностью:

$$g(v) = \frac{\mu^k e^{-\frac{\mu}{v}}}{\Gamma(k)} v^{-k-1}.$$

Математическое ожидание случайной величины v:

$$E(v) = \frac{\mu}{k-1} \quad (5)$$

Мода:

$$Mode(v) = \frac{\mu}{(k+1)} \tag{6}$$

Дисперсия:

$$D(v) = \frac{\mu^2}{(k-1)^2(k-2)} \tag{7}$$

Стандартное отклонение (для $k>2$):

$$\sigma(v) = \frac{\mu}{(k-1)\sqrt{k-2}} \tag{8}$$

Физический смысл случайной величины $v = \frac{1}{t}$ – скорость, с которой ТС проходит зону ПВП. В данной формуле длина зоны ПВП выглядит как единица длины. Пусть L –длина зоны ПВП в метрах (или километрах в виде десятичной дроби). Тогда для случайной величины $v = \frac{L}{t}$ формулы (5)-(8) примут вид:

$$E(v) = \frac{L\times\mu}{k-1} \tag{9}$$

$$Mode(v) = \frac{L\times\mu}{(k+1)} \tag{10}$$

(для $k>2$) $$D(v) = \frac{L^2\times\mu^2}{(k-1)^2(k-2)} \tag{11}$$

(для $k>2$) $$\sigma(v) = \frac{L\times\mu}{(k-1)\sqrt{k-2}} \tag{12}$$

Таким образом, анализ работы ПВП по имитационной модели позволяет определить количество ТС, проходящих через зону ПВП за случайное, гамма распределенное время и определить скорость движения в зоне ПВП длиной L в привычной размерности «км/час». Фактически это дает возможность оценить количество ТС на участке длиной L при скорости движения, распределенной по закону обратной гаммы. Параметр плотности потока играет важную роль в моделях транспортных потоков, опирающихся на модели, заимствованные из гидродинамических задач.

Например, на рис. 1 представлено распределение случайного времени прохода ТС через зону ПВП в режиме существующей очереди, полученное в результате имитационного моделирования пропускного пункта на съезде с платной дороги. Было получено значение λ^{exit}, при котором начинается устойчивое формирование очереди, равное 1250 ТС/час. Значения параметров гамма закона распределения (рис. 1) времени прохода зоны ПВП shape = 2.1510 *(k);* rate = 0.0126 *(μ).* За случайное время *t*, равное времени прохода зоны ПВП одним транспортным средством, зону ПВП покинет, в среднем, $E(X) = \frac{\lambda^{exit}k}{\mu} = \frac{1250\text{ТС/час}\times 2.1510}{0.0126} = \frac{0.35\text{ ТС/сек}\times 2.1510}{0.0126} = 60$ ТС. Среднее время прохода зоны ПВП (математическое ожидание гамма закона распределения *t*) равно $\frac{k}{\mu} = \frac{2.1510}{0.0126} = 170$ сек. Длина зоны ПВП составляет 285 метров. Может показаться, что средняя скорость движения составляет $\frac{285\text{ метров}}{170\text{ секунд}} = \frac{285\times 60\times 60}{1000\times 170} = 6{,}03$ *км/час*. Однако, это не так. Следует отметить, что для гамма закон распределения в данном случае имеет выраженную асимметрию, например, на рис. 1 видно, что мода закона распределения *t* (аналитическое выражение не определено) в этом примере меньше 100 секунд и значительно меньше математического ожидания. Поэтому среднюю скорость движения следует определить, опираясь на математическое ожидание inverse-gamma закона распределения величины v. Скорость движения составит в среднем $E(v) = \frac{\mu}{k-1} = \frac{0.0126\times 285\text{ метров}}{2.1510-1} = 3.2$ *м/сек,* что составляет $\frac{3.2\times 60\times 60}{1000} = 11{,}52$ *км/час.* Плотность исходящего с данного ПВП потока в условиях существующей перед ним пробки, при движении со скоростью 11,52 км/час составит 60 ТС на 285 метров или $\frac{60}{0.285} = 211$ ТС на 1 километр дороги. При расстоянии между бамперами следующих друг за другом машин в 10 метров, это составит 2110 метров, т.е. 1 километр плотного потока на двухполосной дороге.

Полученные формулы позволяют оценить плотность потока, проходящего по платной дороге на основе изучения процесса прохождения потока через ПВП и, таким образом, получить начальные условия для дифференциальных уравнений, заимствованных в теории транспортных потоков из гидродинамических задач. Подобный подход может быть положен в основу расчетов при изучении транспортных потоков, проходящих через систему последовательно расположенных препятствий, которые могут возникнуть в местах прикрепления платных дорог с СВП барьерного типа к улично-дорожной сети, образующие регулируемые перекрестки.

Литература

1. Об утверждении правил оказания услуг по организации проезда транспортных средств по платным автомобильным дорогам общего пользования федерального значения, платным участкам таких автомобильных дорог: Постановление правительства РФ от 19 января 2010г. №18 // Собрание законодательства. 2010. № 18.
2. **Talavirya A., Laskin M.** (2020). Using of discrete-event modeling in throughput capacity analysis of a toll plaza at the exit of the interurban toll road // Proceedings of the 32nd European Modeling & Simulation Symposium (EMSS 2020), pp. 227-234. DOI: https://doi.org/10.46354/i3m.2020.emss.032.
3. **Талавиря А.Ю., Ласкин М.Б.** Имитационное моделирование работы пункта взимания платы на основном ходу внутригородской платной дороги // Научно-практический журнал «Информатизация и связь». 2020. №5. Стр. 67-77.
4. Введение в математическое моделирование транспортных потоков // М.:МФТИ, 2010.
5. **Рыжиков Ю.И.** Теория очередей и управление запасами, СПб, Питер, 2001.