

СРАВНЕНИЕ ИМИТАЦИОННОЙ И АНАЛИТИЧЕСКОЙ МОДЕЛЕЙ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ГРУППЫ АГЕНТОВ ПО СЛУЧАЙНЫМ НАПРАВЛЕНИЯМ

А. В. Кузнецов, Э. Л. Шишкина (Воронеж)

Введение

Проблема случайных блужданий интересует исследователей очень давно. Случайное блуждание одновременно является фундаментальным объектом теории вероятностей, уравнений математической физики и чрезвычайно важной прикладной моделью. Первая работа Пирсона о применении случайных блужданий к описанию моделей миграции и физических процессов была написана в конце 19 – начале 20 века [1]. С момента постановки этой проблемы Пирсоном появилось много работ в этой области. Модели случайных блужданий нашли применение в физике, химии, биологии, механике, социологии и др. В 1880 году британским физиком-теоретиком лордом Релеем была исследована задача теории звука, которая математически эквивалентна проблеме случайного блуждания. Он рассмотрел совокупность из n колебаний, каждое с единичной амплитудой, одинаковой частотой и произвольной фазой, и поставил задачу о поиске распределения результирующей интенсивности [2]. В сентябре 1904 года нобелевский лауреат Рональд Росс представил диффузионную модель случайной миграции комаров [3]. Последние известные авторам работы, посвященные данной тематике, – это статьи [4, 5].

Однако исторические и современные работы этой тематики в основном касаются дискретного случая случайного блуждания, в частности, например, когда блуждание происходит по решетке, ориентированной параллельно прямоугольным координатным осям k -мерного евклидова пространства. Сравнительно мало внимания уделяется непрерывному случаю случайного блуждания, в котором направление блуждающего объекта может непрерывно меняться от одного шага к другому. Почему так происходит? Принципиальное отличие математической модели случайного блуждания с произвольным, непрерывно меняющимся углом направления перемещающегося объекта, от блуждания по сетке состоит в использовании обобщенного сдвига вместо обычного. Обобщенный сдвиг представляет собой сингулярный интегральный оператор, а соответствующие ему дифференциальные уравнения содержат оператор Бесселя вместо обычной производной. Поэтому причиной того, что предложенная Релеем и Пирсоном модель не получила развития, являлось отсутствие подходящего математического аппарата, направленного на работу с обобщенным сдвигом. В этой работе мы представим математическое описание модели непрерывного случайного блуждания, в которой направление блуждающего объекта может непрерывно меняться от одного шага к другому и покажем, что она подтверждается экспериментальными данными.

Описание модели

Пусть агенты $A = \{a_1, \dots, a_s\}$ сконцентрированы в начале координат. В момент времени t_0 агент a_i , $i = 1, \dots, s$ находится в точке пространства $X_0 \in R^n$. Затем он начинает совершать скачки из центра в моменты времени t_1, t_2, \dots, t_n , при этом точки, в которые совершаются скачки в соответствующие моменты времени обозначены X_1, X_2, \dots, X_n . Сумма смещений в момент времени t_n будет равна $S_n = X_0 + \sum_{m=1}^n X_m$.

Предполагается, что смещения независимы. Нас интересует вопрос о нахождении плотности вероятности S_n .

Пусть l_m – длина m -го скачка, $m = 1, \dots, n$, t $Pr(|S_n| \leq r) = Pr(|S_n| \leq r; l_1, l_2, \dots, l_n)$ вероятность того, что S_n лежит внутри или на границе круга радиуса r с центром в начале координат имеет вид

$$Pr(|S_n| \leq r) = \left(\frac{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{\nu-1}{2}\right)} \right)^{n-1} \int_0^\pi \sin^{\nu-2} \theta_1 d\theta_1 \int_0^\pi \sin^{\nu-2} \theta_2 d\theta_2 \dots \int_0^\pi \sin^{\nu-2} \theta_{n-2} d\theta_{n-2} \int_0^\pi \sin^{\nu-2} \theta_{n-1} d\theta_{n-1}, \quad (1)$$

где интегрирование по θ_{n-1} производится по значениям, при которых $|S_n| \leq r$. Формула (1) обобщает формулу из [1].

При $\nu > 0$ используя формулу Вебера-Шафхейтлина из [6] вида

$$\chi(r) = \frac{r^{\frac{\nu}{2}}}{|S_n|^{\frac{\nu-1}{2}}} \int_0^\infty J_{\frac{\nu}{2}}(|S_n|t) J_{\frac{\nu}{2}}(rt) dt = \begin{cases} 1 & \text{при } |S_n| \leq r; \\ 0 & \text{при } |S_n| > r, \end{cases} \quad \chi(r) = \begin{cases} 1 & \text{при } r \neq |S_n|; \\ \frac{1}{2} & \text{при } r = |S_n|, \end{cases}$$

получим

$$Pr(|S_n| \leq r) = \chi(r) 2^{1-\frac{\nu}{2}} r^{\frac{\nu}{2}} \frac{\Gamma^{n-2}\left(\frac{\nu}{2}\right)}{\left(\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{\nu-1}{2}\right)\right)^{n-1}} \int_0^\pi \sin^{\nu-2} \theta_1 d\theta_1 \int_0^\pi \sin^{\nu-2} \theta_2 d\theta_2 \dots \int_0^\pi \sin^{\nu-2} \theta_{n-2} d\theta_{n-2} \times \\ \times \int_0^\infty J_{\frac{\nu}{2}}(rt) t^{\frac{\nu-1}{2}} dt \int_0^\pi j_{\frac{\nu}{2}-1}(|S_n|t) \sin^{\nu-2} \theta_{n-1} d\theta_{n-1},$$

где $j_\eta(x) = \frac{2^\eta \Gamma(\eta+1)}{x^\eta} J_\eta(x)$ ([7], формула 1.19). Учитывая, что

$|S_n| = \sqrt{|S_{n-1}|^2 - 2|S_{n-1}|l_n \cos \theta_{n-1} + l_n^2}$ для интеграла по θ_{n-1} получим

$$\int_0^\pi j_{\frac{\nu}{2}-1}(|S_n|t) \sin^{\nu-2} \theta_{n-1} d\theta_{n-1} = \\ = \int_0^\pi j_{\frac{\nu}{2}-1}(\sqrt{|S_{n-1}|^2 - 2|S_{n-1}|l_n \cos \theta_{n-1} + l_n^2} \cdot t) \sin^{\nu-2} \theta_{n-1} d\theta_{n-1} = \frac{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{\nu-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \nu^{-1} T_{l_n}^{|S_{n-1}|} j_{\frac{\nu}{2}-1}(l_n t)$$

где $({}^\nu T_x^\gamma f)(x)$ – обобщенный сдвиг вида

$$({}^\nu T_x^\gamma f)(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{\gamma}{2}\right)} \int_0^\pi f(\sqrt{x^2 + y^2 - 2xy \cos \theta}) \sin^{\gamma-1} \theta d\theta, \quad \gamma > 0.$$

$${}^\nu T_x^\gamma j_{\frac{\gamma-1}{2}}(x\xi) = j_{\frac{\gamma-1}{2}}(x\xi) j_{\frac{\gamma-1}{2}}(y\xi)$$

Известна формула (см. [7], формула 3.165). Следовательно,

$$\int_0^\pi j_{\frac{\nu}{2}-1}(\sqrt{|S_{n-1}|^2 - 2|S_{n-1}||l_n \cos \theta_{n-1} + l_n^2 \cdot t}) \sin^{\nu-2} \theta_{n-1} d\theta_{n-1} = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{\nu-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} j_{\frac{\nu}{2}-1}(l_n t) j_{\frac{\nu}{2}-1}(|S_{n-1}| t)$$

$$Pr(|S_n| \leq r) =$$

$$= \chi(r) 2^{1-\frac{\nu}{2}} r^{\frac{\nu}{2}} \frac{\Gamma^{n-3}\left(\frac{\nu}{2}\right)}{\left(\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{\nu-1}{2}\right)\right)^{n-2}} \int_0^\pi \sin^{\nu-2} \theta_1 d\theta_1 \int_0^\pi \sin^{\nu-2} \theta_2 d\theta_2 \dots \int_0^\pi \sin^{\nu-2} \theta_{n-2} d\theta_{n-2} \times$$

$$\times \int_0^\infty j_{\frac{\nu}{2}}(rt) j_{\frac{\nu}{2}-1}(l_n t) j_{\frac{\nu}{2}-1}(|S_{n-1}| t) t^{\frac{\nu}{2}-1} dt.$$

Повторяя этот процесс n раз, получим

$$Pr(|S_n| \leq r) = \chi(r) \frac{2^{1-\frac{\nu}{2}} r^{\frac{\nu}{2}}}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \int_0^\infty j_{\frac{\nu}{2}}(rt) \prod_{m=1}^n j_{\frac{\nu}{2}-1}(l_m t) t^{\frac{\nu}{2}-1} dt, \tag{2}$$

Дифференцируя $Pr(|S_n| \leq r)$ по r , получаем плотность вероятности

$$f_n(r) = \chi(r) \frac{2^{1-\frac{\nu}{2}} r^{\frac{\nu}{2}}}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \int_0^\infty t j_{\frac{\nu}{2}-1}(rt) \prod_{m=1}^n j_{\frac{\nu}{2}-1}(l_m t) t^{\frac{\nu}{2}-1} dt. \tag{3}$$

Полагая $l = vl_1$, получим

$$Pr(|S_n| \leq r) = \chi(r) r \int_0^\infty J_1(rt) J_0^n(vl_1 t) dt = \{vt = \tau\} = \chi(r) \frac{r}{v} \int_0^\infty J_1\left(\frac{r}{v} \tau\right) J_0^n(l_1 \tau) d\tau. \tag{4}$$

Далее будет показано, что $v > 0$ имеет смысл модуля скорости агента.

Многоагентное моделирование

Имитационные многоагентные или клеточно-автоматные модели распространения эпидемии, распространения лесного пожара, миграций животных в настоящее время хорошо известны [8]. Поскольку для работы многоагентной модели необходимо просчитывать перемещения и взаимодействия каждого агента, то при значительном количестве агентов требования к вычислительной мощности у такой модели могут быть очень велики. Например, для моделирования пандемии может оказаться необходимым учитывать взаимодействия сотен миллионов агентов. В этом случае представляется целесообразным использовать модели на основе формул (2) и (3). А с помощью имитационного моделирования можно выяснить довольно неочевидный смысл параметров в этих формулах.

Пусть задано множество агентов $Ag = \{ag_1, \dots, ag_m\}$, каждый агент ag_i имеет параметры (x_i, y_i) – координаты, l_i – длина прыжка, v_i – скорость, φ_i – направление движения относительно оси ординат, ψ_i – направление движения относительно плоскости xOy (в трехмерном случае), $i = \overline{1, m}$. Все агенты первоначально находятся в начале координат и далее начинают движение по прямой в направлении, определяемом углами φ_i и (в трехмерном случае) ψ_i .

Для того, чтобы понять смысл параметра ν теоретической модели, было построено две имитационные модели движения агентов. В первой, соответствующей четным ν , угол направления агента $\varphi \in [0, 2\pi)$ относительно оси Oy и угол наклона агента $\psi \in [0, 2\pi)$ относительно плоскости xOy в трехмерном случае являлись равномерно распределенными случайными величинами, которые вычислялись каждый такт дискретного времени. Назовем модель такого типа *изотропной* (рис. 1а). Во второй модели, соответствующей нечетным ν , агент выбирал в одномерном случае угол $\varphi_0 = 0$ или $\varphi_0 = \pi$ с равными вероятностями, а потом выбирал дополнительно добавлял к нему $\varphi_1 \in [-\alpha, \alpha)$, $\alpha \leq \pi$, в итоге совершая движение под углом $\varphi = \varphi_0 + \varphi_1$. А в двумерном случае агент выбирал угол направления агента $\varphi \in [0, 2\pi)$ относительно оси Oy как равномерно распределенную случайную величину, а угол наклона агента относительно плоскости xOy – как равномерно распределенную случайную величину $\psi \in [-\alpha, \alpha)$. Таковую модель будем называть *анизотропной* (рис. 1б).



а) движение агентов при равной вероятности выбора любого направления движения

б) движение агентов, предпочитающих движение вдоль оси Oy , $\alpha = 45^\circ$

Рис. 1. Движение агентов в изотропной (а) и анизотропной (б) моделях

В качестве среды многоагентного моделирования была использована свободно распространяемая система NetLogo, а для обработки полученных данных – Wolfram Mathematica 12. В ходе экспериментов подсчитывалась величина $\rho(t, r) = N(t, r)/m$, где $N(t, r)$ – количество агентов в круге радиуса r с центром в начале координат в момент времени t . Величина $\rho(t, r)$ сравнивалась с плотностью распределения агентов в непрерывной модели, описанной в разделах 2–4.

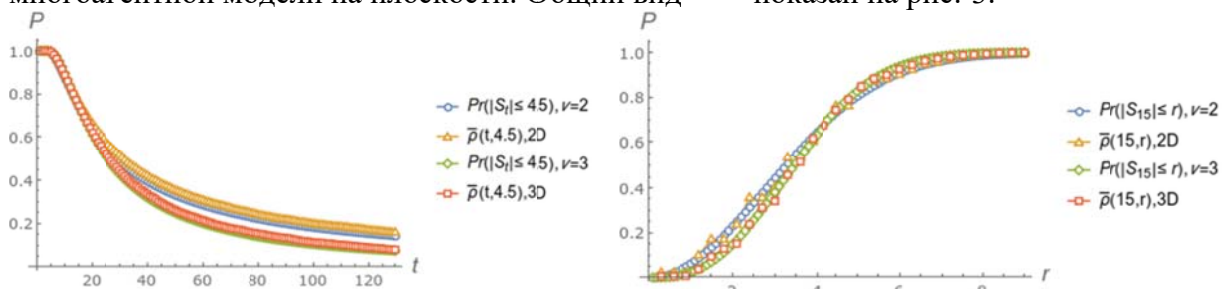
Для размерностей $n = 2$ и $n = 3$ и для различных видов движения агентов были проведены несколько вычислительных экспериментов, по 51 эксперименту по движению агентов из начала координат в каждом. По значениям функции ρ в моменты времени n и для радиусов r в этих экспериментах было вычислено среднее значение $\bar{\rho}(n, r)$, которое сравнивалось с $Pr(|S_n| \leq r)$, $\nu = 2$ и $\nu = 3$ соответственно. В качестве

меры оценки качества предсказания использовалась величина R^2 , определенная для выборки $\{y_1, \dots, y_l\}$ со средним значением \bar{y} и для предсказанных значений $\{f_1, \dots, f_l\}$

$$R^2 = 1 - \frac{SS_{res}}{SS_{tot}}, \quad SS_{tot} = \sum_{i=1}^l (y_i - \bar{y})^2, \quad SS_{res} = \sum_{i=1}^l (y_i - f_i)^2.$$

как

Пусть $m=1000$, $l_i=1$, $v_i=1$, $i=\overline{1,m}$, агенты движутся по плоскости по изотропной модели. В качестве примера можно привести зависимости, приведенные на Рис. 2а и 2б. Для $\bar{\rho}(n, 4.5)$ коэффициент детерминации $R^2 = 0.993696$ (первые 150 моментов времени), для $\bar{\rho}(15, r)$ коэффициент детерминации $R^2 = 0.9967$ (r от 0.3 до 9 с шагом 0.3), близкие значения получались и при других значениях параметров. Таким образом, непрерывная модель с $v=2$ хорошо предсказывает поведение многоагентной модели на плоскости. Общий вид $m\bar{\rho}$ показан на рис. 3.



а) фиксированный радиус $r = 4.5$, двумерный (2D) и трехмерный (3D) случаи

б) фиксированное время $n = 15$, двумерный (2D) и трехмерный (3D) случаи

Рис. 2. Сравнение теоретической и многоагентной моделей

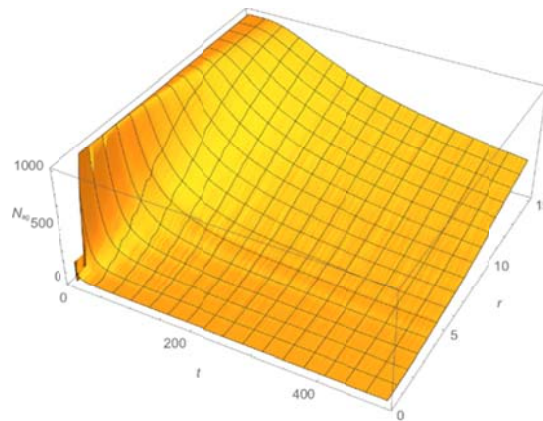


Рис. 3. Общий вид функции $N_{ag} = m\bar{\rho}$ среднего количества агентов в круге радиуса r в момент времени t для многоагентной модели

Параметр v из соотношения (4) имеет смысл скорости, что подтверждается экспериментами с $v = v_i = 0.5$ и $v = v_i = 0.25$, $i = \overline{1,m}$ (Рис. 4а и 4б). Для $\bar{\rho}(n, 4.5)$ коэффициент детерминации $R^2 = 0.982718$ для $v = 0.25$, а для $v = 0.5$ $R^2 = 0.99165$ (первые 400 моментов времени).

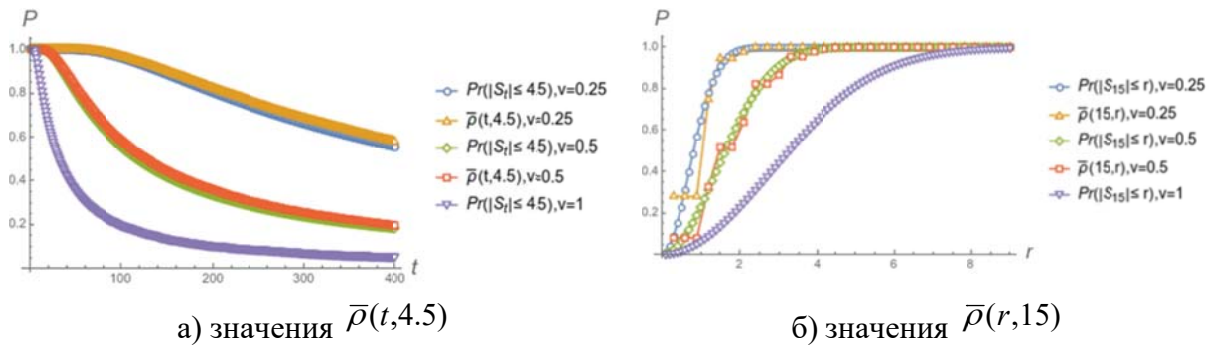


Рис. 4. Сравнение значений $\bar{\rho}(t, 4.5)$, $\bar{\rho}(r, 15)$ и непрерывной модели при различных скоростях v движения агентов

Пусть теперь агенты перемещаются в трехмерном пространстве по изотропной модели. И в этом случае непрерывная модель с $v = 3$ хорошо предсказывает поведение многоагентной. Например, для $\rho(t, 4.5)$ $R^2 = 0.998016$ (первые 130 моментов времени), для $\rho(15, r)$ $R^2 = 0.999029$ (r от 0.3 до 9 с шагом 0.3).

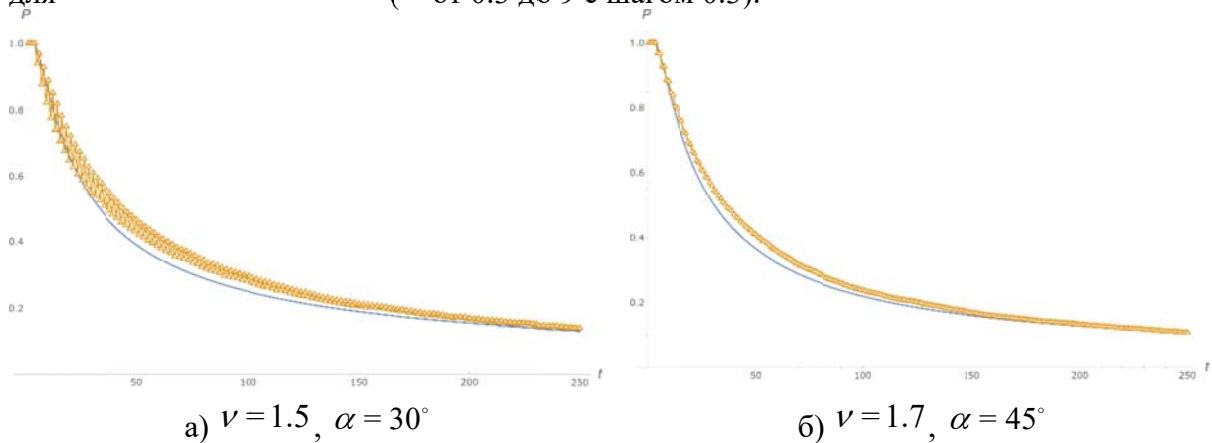


Рис. 5. Значения $\bar{\rho}(t, 4.5)$ (маркеры) и $Pr(|S_t| \leq 4.5)$ (линия) для анизотропной модели

Нецелые значения параметра $v > 1$ позволяют применять теоретическую модель и к движению агентов по анизотропной модели. Движению агентов на плоскости вдоль выбранного направления с отклонением $0 < \alpha < \pi$ от него будут соответствовать значения $1 < v < 2$ (Рис. 5 и 6).

Движению в пространстве вдоль выбранной плоскости с отклонением $-\pi < \alpha < \pi$ будут соответствовать значения $2 < v < 3$.

Точное соответствие v и α не изучалось, однако можно сказать, что, например, в двумерном случае $\bar{\rho}(t, 4.5)$ с $\alpha = 30^\circ$ и $Pr(|S_t| \leq 4.5)$ с $v = 1.5$ соответствуют друг другу с коэффициентом детерминации $R^2 = 0.967881$, $\bar{\rho}(t, 4.5)$ с $\alpha = 45^\circ$ и $Pr(|S_t| \leq 4.5)$ с $v = 1.7$ соответствуют друг другу с коэффициентом детерминации $R^2 = 0.988073$ для первых 250 моментов времени.

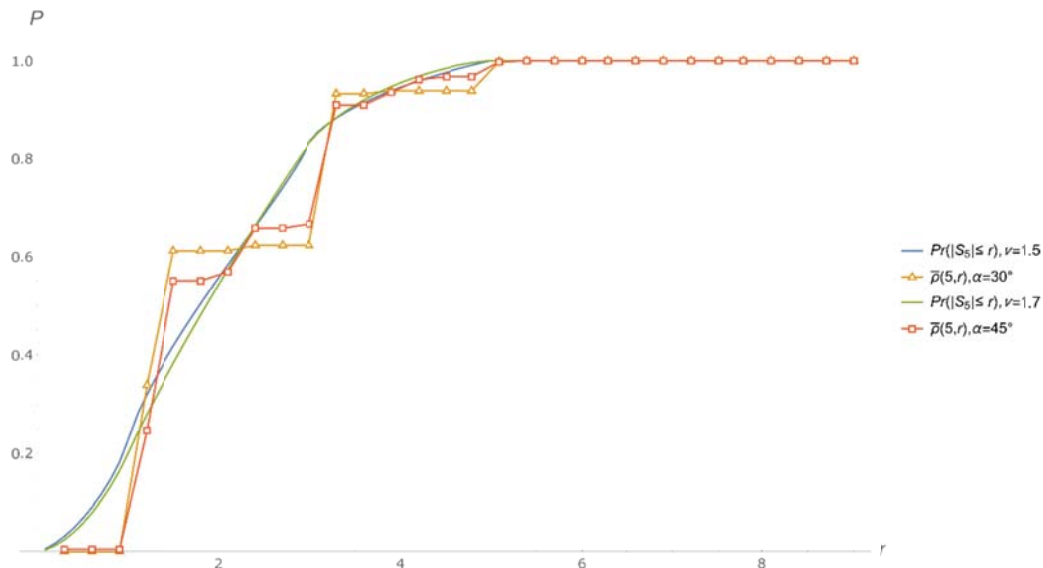


Рис. 6. Значения $\bar{\rho}(5, r)$ (маркеры) и $Pr(|S_5| \leq r)$ (линия) для анизотропной модели

Заключение

С помощью имитационного моделирования нами установлена взаимосвязь параметров теоретической модели перемещения агентов, скорости движения агентов и предпочитаемых направлений движения агентов. В результате этого стало возможно применить теоретическую модель к конкретным ситуациям, в которых агентов слишком много и применение имитационной модели нерационально. Практическое применение полученных результатов лежит в области моделирования процессов типа диффузии, например, в распространении эпидемии, механических колебаний, лесного пожара, миграции, информации по социальной сети, а также и по компьютерным сетям, вибраций в грунтах и т.п.

Литература

1. **Pearson K.A., Bakeman John.** Mathematical theory of random migration. London: Dulau and Co., 1906. 54 p., VI pl.
2. **John Strutt, 3rd Baron Rayleigh.** On the Problem of Random Vibrations, and of Random Flights in, one, two, or three Dimensions // Scientific Papers (Cambridge Library Collection - Mathematics). Cambridge: Cambridge University Press, 2009. Pp. 604-626. doi:10.1017/CBO9780511704017.094
3. **Ross Ronald.** On the logical basis of the sanitary policy of mosquito reduction // Proceedings of the Congress of Arts and Sciences, USA, St Louis. 1904. V. 6. P. 89.
4. **Dutka J.** On the problem of random flights // Arch. Hist. Exact Sci. 1985, V. 32. Pp. 351–375. <https://doi.org/10.1007/BF00348451>
5. **Chandrasekhar S.** Stochastic problems in physics and astronomy // Rev. Mod. Phys. 1943. V. 15. Pp. 1-89.
6. **Watson G.N.** A Treatise on the Theory of Bessel Functions, 2nd ed., Cambridge: Cambridge University Press, 1952. 804 p.
7. **Shishkina E.L., Sitnik S.M.** Transmutations, singular and fractional differential equations with applications to mathematical physics. Amsterdam: Elsevier, 2020. 592 p.
8. **Кузнецов А.В.** Краткий обзор многоагентных моделей // УБС, 2018. Т. 71. С. 6-44.