

## ИМИТАЦИЯ И ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ: СОВМЕСТНАЯ РАБОТА ДВУХ МЕТОДОВ НА ПРИМЕРЕ ОПТИМИЗАЦИИ ЦЕПЕЙ ПОСТАВОК

А.А. Жеребцов, А.В. Борщёв (Санкт-Петербург)

### Об оптимизации проблем реального мира

В общем случае оптимизация – это поиск значений параметров системы, при котором достигается наилучшее значение целевой функции при заданных ограничениях. Например, целевой функцией при оптимизации цепи поставок может быть прибыль, целью оптимизации – её максимизация, а параметрами оптимизации – количество и расположение складов, входящих в структуру сети, размеры потоков товаров между узлами сети.

### Модель цепи поставок

В рамках данной статьи мы рассмотрим задачу выбора оптимальной структуры сети и потоков продукции при заданных ограничениях (рис. 1).

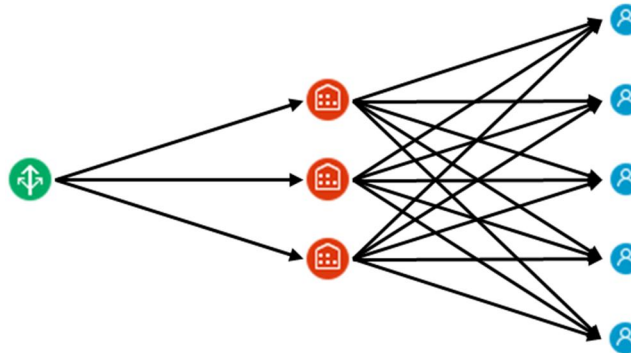


Рис. 1. Постановка задачи выбора оптимальной структуры цепи поставок

В постановку задачи входят узлы (поставщик, склады), которые потенциально могут входить в состав сети, и клиенты, которым должен быть доставлен товар в соответствии с их спросом. Поставщик может снабжать любой склад, а каждый склад может снабжать любого клиента. Для каждой пары поставщик-склад и склад-клиент задана стоимость перевозки товаров и время, необходимое для осуществления доставки.

В зависимости от постановки задачи, целью может являться нахождение конфигурации сети, дающей максимальную прибыль либо дающей минимальные затраты.

### Постановка задачи линейного программирования (ЛП)

Модели цепей поставок можно разделить на аналитические, которые моделируют систему с помощью формул, уравнений и неравенств, и имитационные, в которых динамика системы задается с помощью правил, позволяющих получить состояние системы в следующий момент модельного времени из состояния в текущий момент времени.

Построение аналитических моделей требует формализации поведения системы в терминах, соответствующих тому или иному виду аналитических моделей, таких как линейные, нелинейные или смешанные целочисленно-линейные модели. Линейная модель задается в виде системы линейных неравенств (ограничений), описывающих требования к поведению системы.

Оптимизация линейной модели, или задача линейного программирования (ЛП), состоит в максимизации или минимизации линейной целевой функции для построенной линейной модели

Так, для приведенной выше задачи ЛП постановка будет содержать следующие переменные:

$S_i$  – значение потока с поставщика на склад  $i$ ,

$F_{ij}$  – значение потока со склада  $i$  к клиенту  $j$ .

Уравнения и неравенства, входящие в постановку:

$\forall j, \sum_i F_{ij} \leq D_j$ , где коэффициент  $D_j$  – спрос клиента  $j$ , определяет необходимость удовлетворить спрос клиентов;

$\forall i, S_i \geq \sum_j F_{ij}$ , обеспечивает доступность товаров на складе для удовлетворения спроса клиентов;

$\forall ij, C_{ij} = CT_{ij} \times F_{ij}$ , стоимость доставки товара со склада  $i$  клиенту  $j$ . Коэффициент  $CT_{ij}$  – стоимость доставки единицы товара;

$\forall i, C_i = CT_i \times S_i$ , стоимость доставки товара от поставщика на склад  $i$ . Коэффициент  $CT_i$  – стоимость доставки единицы товара.

Целевая функция выражает суммарные затраты на доставку товаров клиентам:

$$Objective = \forall ij, \sum_{ij} C_{ij} + \sum_i C_i \quad (1)$$

Целью оптимизации является минимизация значения целевой функции.

#### Смешанно-целочисленная постановка задачи

Смешанные целочисленно-линейные модели могут содержать дополнительные требования на целочисленность некоторых параметров модели. Так, в случае если постановка задачи включает стоимость открытия складов, модель должна отражать затраты на открытие тогда и только тогда, когда склад включается в итоговую структуру сети.

В нашем случае такая постановка будет расширением ЛП задачи.

Дополнительно введем переменные  $X_i \in \{0, 1\}$ . Если переменная  $X_i$  равна нулю, склад не включается в решение. Это означает, что все потоки через этот склад должны так же равняться нулю, равно как и затраты на открытие склада. В случае, когда переменная  $X_i$  равна 1, потоки через склад могут быть ненулевыми, а целевая функция должна включать затраты на открытие склада. Можно задать эти ограничения в терминах big-M [1]:

$\forall i, \sum_{ij} F_{ij} + \sum_i S_i \leq M_i \times X_i$ , где  $M$  – коэффициент, заведомо больший, чем возможная сумма всех потоков через склад  $i$ .

$O_i$  – стоимость открытия склада  $i$ .

$$Objective = \forall ij, \sum_{ij} C_{ij} + \sum_i C_i + \sum_i O_i \times X_i \quad (2)$$

#### Имитационная модель

Имитационная модель – это логико-математическое описание системы, в котором применение заданных правил позволяет получить состояние системы в следующий момент модельного времени на основании текущего состояния. Сама технология позволяет выбрать допустимый уровень абстракции, позволяющий соблюсти баланс между сложностью модели и детальностью, а значит и точностью, описания системы. Зачастую, имитационное моделирование применяется в случаях, когда невозможно создать аналитическую модель требуемой точности.

Несомненными преимуществами имитационных моделей (ИМ) являются возможность построения модели с требуемым уровнем детальности и учетом всех значимых процессов и их характеристик и возможность наблюдения и исследования динамики моделируемой системы при продвижении модельного времени. Особенно стоит отметить возможность учета стохастических факторов за счет использования

случайных величин, соответствующих заданным распределениям. Зачастую, имитационное моделирование применяется в случаях, когда невозможно создать аналитическую модель требуемой точности. В случае моделирования цепи поставок имеет смысл применять подход агентного моделирования [2] [3].

Модель цепочки поставок может быть описана набором объектов, обладающих собственным поведением и способов их взаимодействия друг с другом (рис. 2).

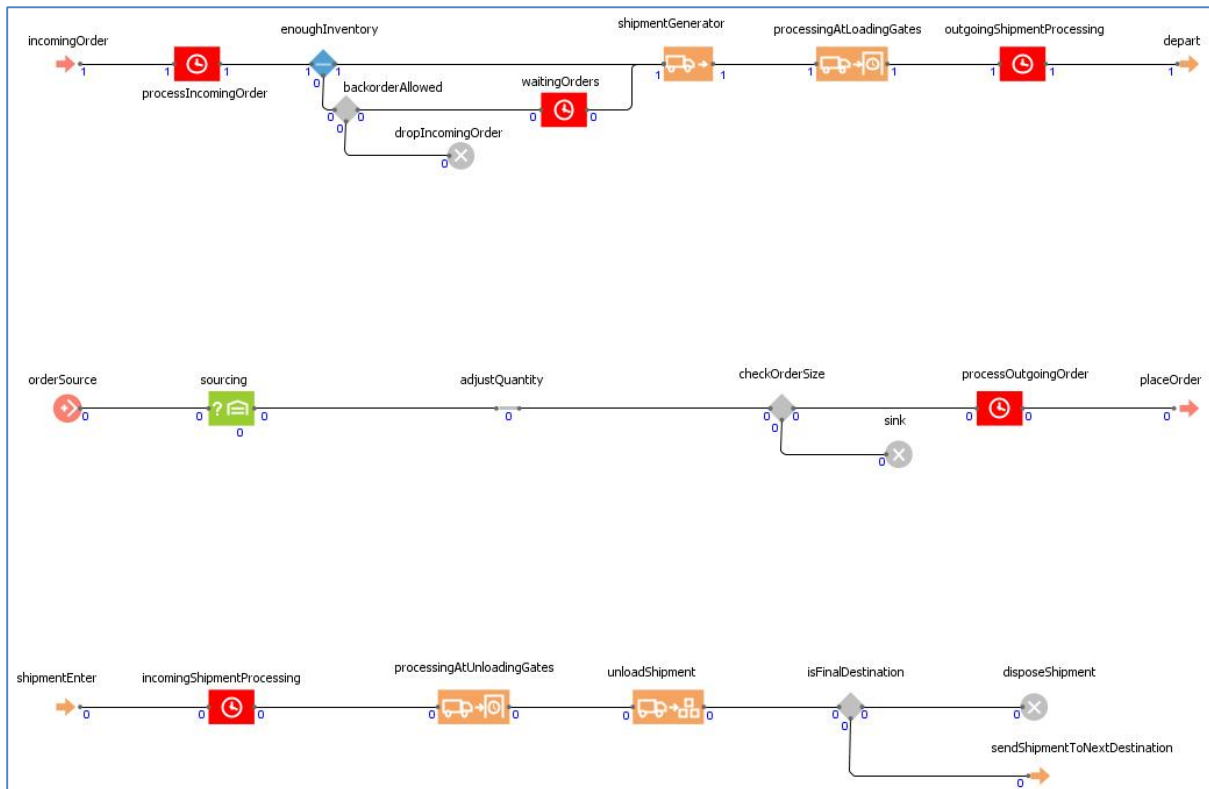


Рис. 2. Реализация поведения объекта, реализующего склад в агентной ИМ

Склад может быть представлен объектом, который реализует следующие процессы: прием заказов от клиентов и отправка товаров клиентам, отправка заказов поставщику на пополнение запасов, прием товаров от поставщика и хранение товаров.

Клиент может быть представлен объектом, реализующим выбор склада, от отправку заказов на основании заданного спроса и получение товара.

Поставщик реализует получение заказов и от отправку товаров.

Взаимодействие объектов происходит путем обмена заказами и транспортными средствами, перевозящими товары.

В процессе выполнения модели может собираться статистика по затратам по различным категориям, например, стоимость открытия складов или стоимость перевозки.

### Решение задач линейного программирования и смешанного целочисленно-линейного программирования

Для задач линейного программирования разработаны алгоритмические методы решения. Наиболее известным и достаточно эффективным алгоритмом, несмотря на экспоненциальную сложность, является симплекс-метод, однако существуют и другие методы с полиномиальной сложностью, такие как метод барьерных функций или метод внутренней точки [4]. Эти методы позволяют находить оптимальное решение задачи за приемлемое время.

Задачи целочисленно-линейного программирования по своей сути являются комбинаторными, однако применение метода ветвей и границ и секущих плоскостей [5] позволяет значительно ускорить получение решения без потери точности. Сам алгоритм гарантирует оптимальность полученного результата, а в случае досрочного прекращения поиска решения дает оценку оптимальности полученного решения относительно теоретически достижимого результата.

### Оптимизация имитационных моделей

Описанные преимущества имитационных моделей являются серьезным недостатком при их оптимизации. Оптимизация ИМ выполняется внешним оптимизатором, который устанавливает входные параметры модели, выполняет множество прогонов и анализирует выходные параметры (рис. 3).

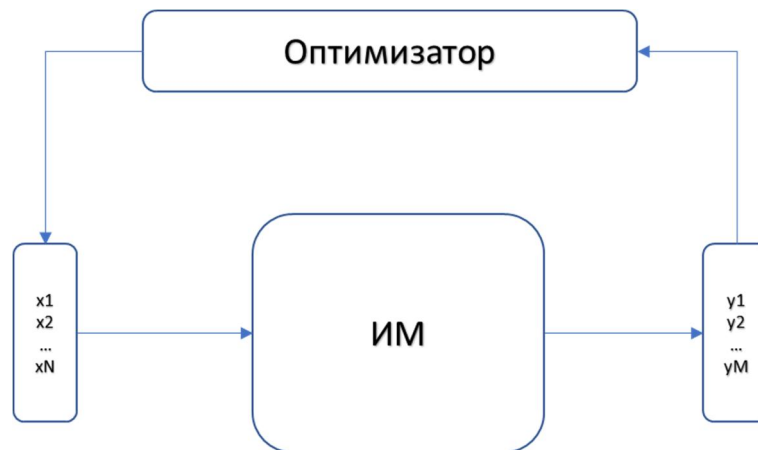


Рис. 3. Оптимизация ИМ моделей

Модель является «черным ящиком» для оптимизатора и нахождение оптимального решения требует полного перебора всех возможных комбинаций значений параметров. В большинстве случаев полный перебор невозможен ввиду размера пространства решений времени, необходимого для выполнения всех прогонов модели. Задача усложняется в случае стохастических моделей, поскольку для каждого набора значений входных параметров необходимо производить серию прогонов и оценивать распределения выходных параметров. Поэтому поиск оптимального решения осуществляется различными эвристическими методами, такими, как генетические алгоритмы, метод имитации отжига, табу-поиск и другие [6], [7].

Эвристики этих методов сокращают пространство поиска, однако это может приводить к отбрасыванию оптимальных решений, и результаты работы не гарантируют оптимальность найденного решения.

### Комбинация аналитических и имитационных моделей

Как мы уже сказали, преимущество аналитических моделей состоит в наличии алгоритмических методов, позволяющих находить оптимальное решение за приемлемое время. Недостатком является необходимость упрощения исходной постановки задачи путем отбрасывания деталей, не поддающихся формализации с помощью аналитических формул. Имитационные же модели позволяют учитывать все значимые детали реальной системы, однако оптимизация с использованием ИМ зачастую невозможна ввиду большого количества прогонов модели, необходимого для нахождения решения. Кроме того, оптимальность решения можно гарантировать только рассмотрев все возможные комбинации значений параметров.

В связи с этим возникают идеи использования гибридной оптимизации – применения различных типов моделей для решения одной и той же задачи [8]. Например, такой подход возможен в ПО anyLogistix – инструменте для оптимизации и анализа цепей поставок (рис. 4).

Этот инструмент позволяет задать параметры задачи в табличной форме и поддерживает различные типы задач, в частности смешанный, целочисленно-линейный и имитационный. Например, в инструменте можно сконструировать линейную задачу максимизации прибыли (сценарий), соответствующую постановке задачи, данной выше.

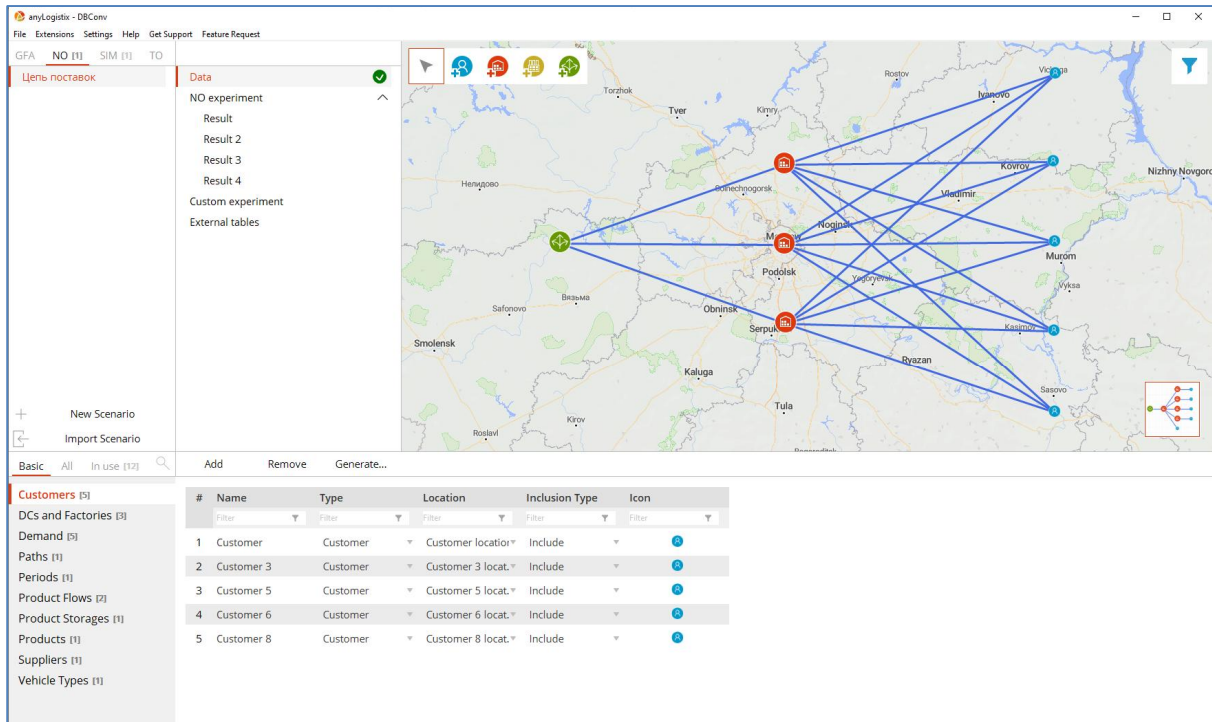


Рис. 4. Постановка задачи в anyLogistix

Результатом выполнения оптимизационного эксперимента является оптимальная с точки зрения затрат структура цепи (рис. 5).

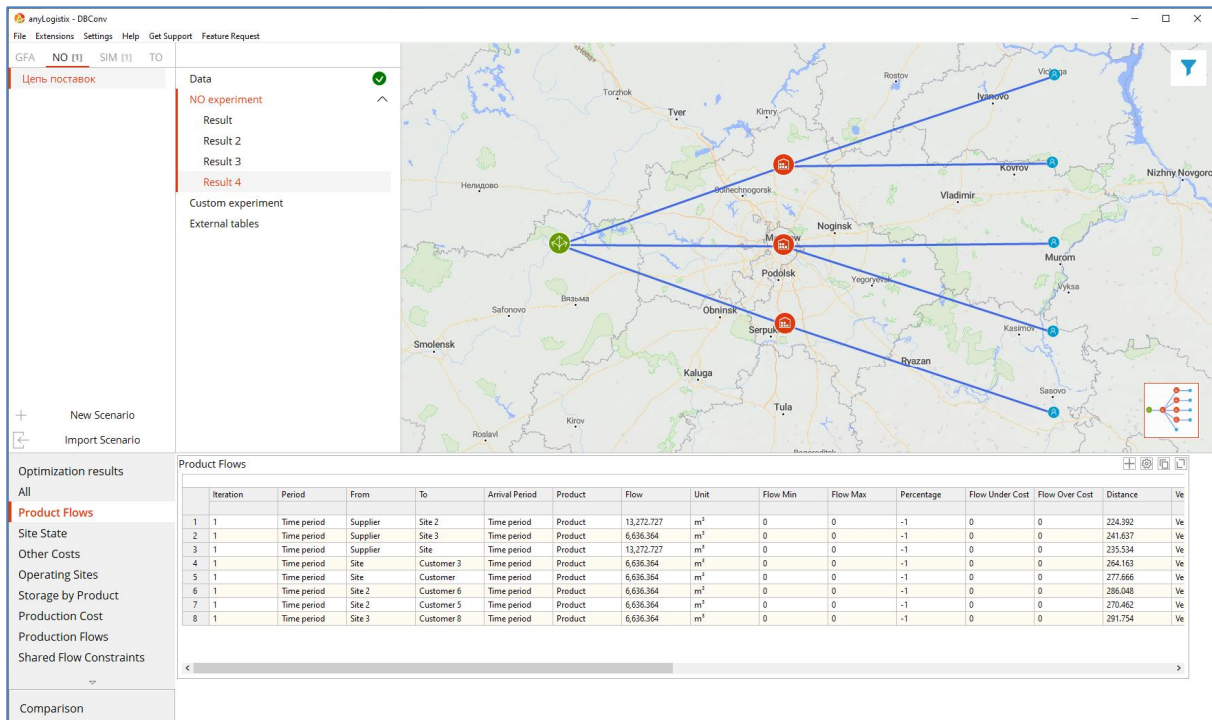


Рис. 5. Оптимальная структура цепи в результате решения ЛП задачи

Линейные модели цепей поставок оперируют агрегированными величинами. В частности, по ним можно оценить размер потока товаров за период моделирования, однако по ним невозможно отследить индивидуальные заказы и отправки. Соответственно, по полученному решению невозможно отследить динамику движения товаров или динамику товарных запасов на конкретном узле сети в течение периода моделирования. Кроме того, некоторые аспекты работы цепи поставок могут иметь нелинейную природу и плохо аппроксимироваться линейными зависимостями либо вообще могут быть неизвестны до проведения имитационного моделирования.

Ключевой особенностью ПО anyLogistix является конвертация сценариев и результатов одного типа в другие типы. Так, можно сконvertировать полученный результат в постановку задачи для имитационной модели и проверить применимость такого решения на практике (рис. 6).

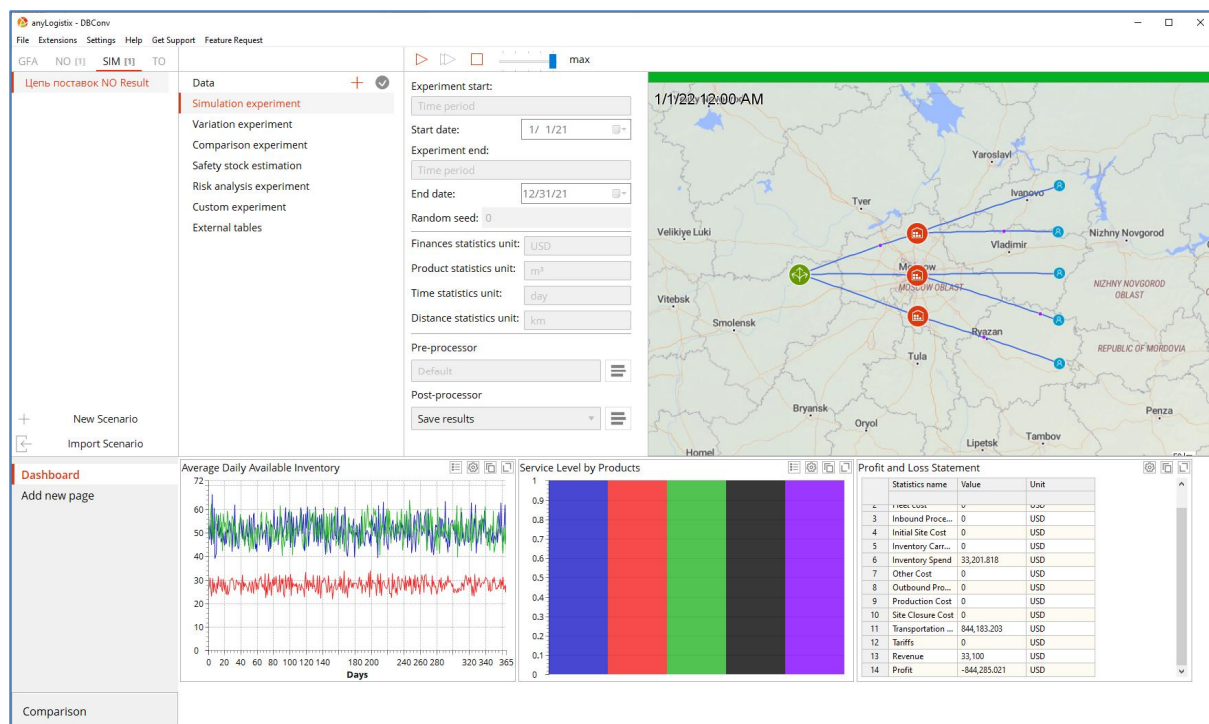


Рис.6. Проверка полученного решения с помощью имитационной модели

При конвертации входящие потоки, присутствующие в итоговом решении, конвертируются в политики снабжения для каждого из объектов цепи. На основании значений величин потоков, времени доставки и характеристик спроса (частота и размеры заказов) определяются политики пополнения запасов и характеристики их параметров. Это позволяет перейти к динамической имитационной модели, в которой на основании спроса генерируются заказы на товар, определяется склад (или поставщик), с которого будет осуществляться отправка и на основании параметров политик пополнения определяются размеры заказов на пополнение.

Имитационные сценарии в anyLogistix позволяют задавать множество данных для детализации работы цепи поставок, которые сложно учесть напрямую в линейной модели. Например, это могут быть ограничения на окна доставки, отправки товаров по расписанию, сложные политики выбора поставщика с динамическими условиями и другие. Помимо этого, встроенный в продукт редактор расширений позволяет реализовать специфичное для конкретного узла сети поведение – задать топологию склада, дополнительные процессы обработки товаров, совместное использование общих ресурсов (например, оборудования или персонала), расписание работы и другие аспекты, влияющие на взаимодействие узла и цепи в целом.

Несмотря на то, что такое поведение крайне сложно, а иногда и невозможно, учесть в линейной модели напрямую, по результатам имитационного моделирования можно определить метрики, на которые это поведение может накладывать ограничения. Например, если неравномерность спроса или стохастичность времени доставки при проверке на имитационной модели приводят к нехватке товара на складе, можно определить величину необходимого страхового запаса и ввести соответствующее требование в линейную модель. В случае, когда внутренние процессы узла сети не позволяют достичь пропускной способности, соответствующей решению линейной задачи, определяется максимальная пропускная способность узла и эту величину можно ввести в линейную модель в качестве ограничения. Естественно, полученное ранее решение уже может не удовлетворять новым ограничениям, поэтому требуется заново выполнить оптимизационный эксперимент с учетом новых ограничений.

Такой подход позволяет не только проверять применимость решений, полученных с помощью оптимизации аналитических моделей, но и итеративно накладывать дополнительные ограничения на аналитическую модель с последующей проверкой до тех пор, пока не будет достигнута применимость решения на практике.

### **Заключение**

Использование аналитической модели для цепи поставок позволяет производить эффективную оптимизацию математически формализованной модели с меньшим уровнем детализации, а использование эквивалентной имитационной модели позволяет производить проверку применимости полученного решения с требуемым уровнем детализации. Также этот подход позволяет итеративно добавлять ограничения в аналитическую модель на основании результатов проверки, за счет чего добиваться получения оптимального решения, применимого на практике.

### **Литература**

1. **Griva Igor; Nash Stephan G.; Sofer Ariela** (26 March 2009). *Linear and Nonlinear Optimization* (2nd ed.). Society for Industrial Mathematics. ISBN 978-0-89871-661-0.
2. **A.V. Borshchev, and A.E. Filippov**. From System Dynamics and Discrete Event to Practical Agent Based Modeling: Reasons, Techniques, Tools. The 22nd International Conference of the System Dynamics Society, 2004 (ISDC'04), Oxford, UK.
3. **Swaminathan J.M., Smith S.F., Sadeh N.M.** Modeling supply chain dynamics: A multiagent approach. *Decis. Sci.* 1998, 29, pp. 607-632.
4. **Karmarkar, N.** Proceedings of the sixteenth annual ACM symposium on Theory of computing - STOC '84: journal. 1984. P. 302. ISBN 0-89791-133-4.
5. **Marchand Hugues, Martin Alexander, Weismantel Robert, Wolsey Laurence** (2002). «Cutting planes in integer and mixed integer programming». *Discrete Applied Mathematics*. 123 (1–3): 387–446. doi:10.1016/s0166-218x(01)00348-1.
6. **Amaran S., Sahinidis N.V., Sharda B. et al.** Simulation optimization: a review of algorithms and applications. *4OR-Q J Oper Res* 12, pp. 301-333 (2014). <https://doi.org/10.1007/s10288-014-0275-2>.
7. **Y.Carson**. Simulation optimization: methods and applications, in *Winter Simulation Conference Proceedings* (1997), pp. 118-126.
8. **Figueira G., Almada-Lobo B.** Hybrid simulation–optimization methods: A taxonomy and discussion. *Simul. Model. Pract. Theory* 2014, 46, 118-134.