# МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И МЕТОДЫ РАСЧЁТА РАСПРЕДЕЛЕННОЙ СИСТЕМЫ МОНИТОРИНГА СЕТИ ПЕРЕДАЧИ ДАННЫХ

**В.П. Бубнов, К.С. Шардаков (Санкт-Петербург)**

## Введение

Автоматизированные системы мониторинга являются важной частью любой информационной системы. Мониторинг – это непрерывный процесс наблюдения и регистрации параметров объекта, их обработка, сравнение с пороговыми значениями. Эта система мониторинга должна справляться с возрастающей нагрузкой. Наиболее популярной и легко масштабируемой для адаптации к нагрузке свободно распространяемой системой мониторинга для информационных систем является Zabbix [1].

Многие авторов используют для исследования вероятностно-временных характеристик процессов, протекающих в информационных системах стационарные модели теории массового обслуживания [2–4]. Однако наибольший интерес представляют модели нестационарных системы обслуживания (НСО). Они позволяют исследовать информационные системы в условиях критических (пиковых) нагрузок. Примерами работ, посвященных нестационарному режиму, являются [5-8]. Недостатком работ [5-8] является то, что в них рассматривается только классический численный метод решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) – метод Рунге-Кутты. Это накладывало значительное ограничение на размерность рассматриваемых моделей НСО.

В работах [9-11], представлен численно-аналитический метод, скорость и точность которого, при решении системы ОДУ, описывающей НСО, превосходят наиболее распространенный, при решении данного рода задач, метод Рунге-Кутты. Преимуществом этого метода, также, является рекурсивный алгоритм генерации матрицы коэффициентов системы ОДУ без построения графа состояний и переходов НСО и выведения общего уравнения системы ОДУ как в работах [5-8]. Но этот алгоритм также имеет недостатки, описанные в [12]. Также в [12] предложен последовательный метод генерации матрицы коэффициентов, лишенный недостатков рекурсивного метода. Для расчета модели был использован описанный в [9] численно-аналитический метод, реализованный на Python3, но модифицированный в части формирования матрицы коэффициентов. Также, в связи с некоторыми ограничениями интерпретатора Python3, вычисления не были распараллелены на несколько потоков и проводились в один поток, что не позволило использовать все преимущества представленного в [9, 13] численно-аналитического метода, однако это является недостатком непосредственно интерпретатора, а не метода в целом.

## Параллельно-последовательная модель

Параллельно-последовательная НСО, учитывающая особенности распределенной системы мониторинга и представленная на рис. 1.

Такая система разделена на две подсистемы, в первой подсистеме находятся прокси-сервера, во второй – основной сервер. После того, как заявка обработана первой подсистемой, она попадает на обработку к основному серверу. После обработки заявки основным сервером, заявка считается обработанной. Каждый из серверов считается отдельным каналом обслуживания.

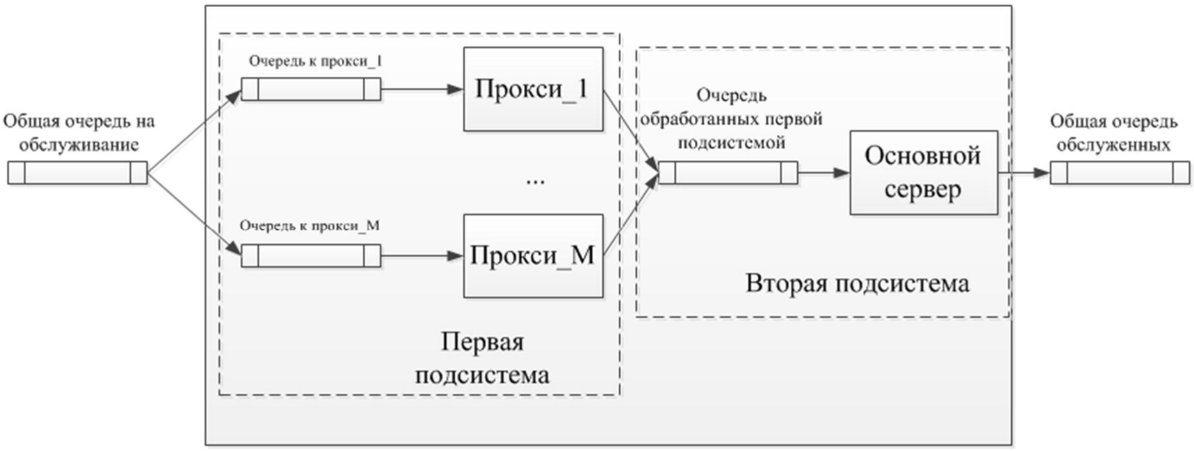


Рис.1. Упрощенная схема параллельно-последовательной НСО

В каждый момент времени такая НСО, в случае использования 2-х прокси-серверов, может быть описана векторами *in_system = [in_1, in_2, in_main]* и *served =[out_proxy, out_main]*. Вектор *in_system* состоит из трех значений. Каждое значение равно количеству заявок в канале с соответствующим номером (*in_1, in_2* – прокси-сервера, *in_main* – основной сервер), при этом $||in\_system|| = \overline{0, N}$. Вектор *served* состоит из двух значений, где каждое значение равно количеству заявок, обслуженных соответствующей подсистемой, при этом $||served|| = \overline{0, N - ||in\_system||}$. Где $N$ – общее число заявок, которые могут поступить в систему. На вход системе последовательно поступают заявки с интенсивностями $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N\}$, которые зависят от номера заявки. Заявки обслуживаются в первой подсистеме с интенсивностями $\{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_N\}$, а во второй подсистеме с интенсивностями $\{\mu\_main_1, \mu\_main_2, \dots, \mu\_main_N\}$, которые также зависят от номера заявки. Временные интервалы между поступлениями и обслуживанием заявок распределяются по экспоненциальному закону.

Если каждому состоянию системы соответствует дифференциальное уравнение Чепмена-Колмогорова, то процесс обслуживания всех заявок описывается системой однородных уравнений Чепмена-Колмогорова с постоянными коэффициентами. Система ОДУ может быть представлена в векторно-матричном виде:

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \tag{1}$$

где $x(t)$ – вектор вероятностей возможных состояний системы размерности $K$, а $A$ – квадратная матрица коэффициентов. Для системы ОДУ решается задача Коши при заданных начальных условиях. Для указанной системы существует явное аналитическое решение, если только известны собственные числа матрицы $A$. В случае треугольного вида матрицы $A$ её собственные числа выписаны в явном виде на диагонали. Таким образом, аналитическое решение системы вида (1) можно найти, только если матрица $A$ — треугольная. Вероятности состояний системы определяются по формуле:

$$x_i(t) = \sum_{j=1}^{i} k_{ij}\tilde{x}_j(t), \quad \tilde{x}_i(t) = t^{v_j-1}e^{a_{ii}t}, \tag{2}$$

где $x_i(t)$ – вероятность того, что система находится в состоянии $x_i$ в момент времени t, $k_{ij}$ находятся по формулам 3-5.

$$k_{ii_{v_i}} = \frac{b_{ii_{v_i-1}}}{v_i}, \qquad v_i > 1. \tag{3}$$

$$k_{ij} = \begin{cases} \dfrac{b_{ij} - k_{iw}(v_j - 1)}{a_{jj} - a_{ii}}, & v_j > 1, \\ & a_{ii} \neq a_{jj}, \\ \dfrac{b_{ij}}{a_{jj} - a_{ii}}, & v_j = 1. \end{cases} \quad (4)$$

где $b_{ij} = \sum_{w=j}^{i-1} a_{iw} k_{wj}$, $v_j$ – кратность собственного числа $a_{jj}$ в системе первых $j$ уравнений.

После нахождения всех коэффициентов (3) и (4) через начальные данные, оставшиеся находятся по формуле:

$$k_{ii_1} = x_i(0) - \sum_{\substack{j=1 \\ v_j=0}}^{i-1} k_{ij}. \quad (5)$$

Для составления и решения системы ОДУ Чепмена-Колмогорова необходимо составить полный список всех возможных состояний системы, выявить правила переходов между ними и заполнить матрицу коэффициентов. Существующий рекурсивный алгоритм тратит на эту процедуру довольно большое количество времени, в связи с этим был разработан модифицированный рекурсивный с группировкой алгоритм без потери в точности вычислений. В предложенном алгоритме все состояния хранятся в следующей структуре:

Все состояния [
  Группа [ // *out_main - константа*
    Подгруппа [ // *out_proxy - константа*
   Подгруппа 2-го уровня { // ||*in_system*|| - *константа*
// пары «ключ»: «значение», ключи уникальны в рамках подгруппы 2-го уровня
   *in_system: Состояние(in_system, served)*
     }
    ]
  ]
].

Существует три события, инициирующих переход системы из текущего состояния в следующее: заявка поступает в систему и продвигается на один из прокси-серверов; заявка обслужена на прокси-сервере и поступает на основной сервер; заявка обслужена на основном сервере и покидает систему. На вход алгоритм принимает стартовое состояние, вызывает эти события последовательно для него, формирует возможные следующие состояния системы и добавляет их в структуру хранения. Такой подход позволяет сгенерировать только состояния, в которые система может перейти из текущего. После того, как все состояния сгенерированы, выполняется простейшая сквозная нумерация.

Далее выявляются правила переходов и заполняется матрица коэффициентов системы ОДУ Чепмена-Колмогорова. Обозначим матрицу коэффициентов как *A*, номер текущего состояния как *Num*. Номер состояния, из которого можно перейти в текущее как *From_Num*. Интенсивности поступления и обслуживания заявки с номером *Num* на прокси и на основном сервере – $\lambda_{Num}$, $\mu_{Num}$, и $\mu\_main_{Num}$. Для каждого состояния применим следующие правила для заполнения матрицы коэффициентов *A*:

1) Если текущее состояние находится **не** в последней непустой подгруппе второго уровня, заявка может поступить на обслуживание, и возможен переход в следующее состояние:

$A_{Num,Num} = A_{Num,Num} - \lambda_{Num}$;

2) Если текущее состояние находится **не** в последней подгруппе И **не** в первой непустой подгруппе второго уровня внутри своей группы, возможен переход:

а) в текущее состояние из предыдущего при поступлении новой заявки в систему:

$A_{Num,From\_Num} = A_{Num,From\_Num} + l_{From\_Num}$;

б) из текущего состояния в следующее при обработке заявки одним из прокси:

$A_{Num,Num} = A_{Num,Num} - m_{Num}$;

3) Если это **не** первая непустая подгруппа в своей группе, возможен переход:

   а) в текущее состояние из предыдущего при обработке заявки на одном из прокси:

$A_{Num,From\_Num} = A_{Num,From\_Num} + m_{From\_Num}$;

   б) из текущего состояния в следующее при обработке заявки основным сервером:

$A_{Num,Num} = A_{Num,Num} - m\_main_{Num}$;

4) Если текущее состояние находится **не** в первой группе И **не** в первой непустой подгруппе внутри своей группы, возможен переход в текущее состояние из предыдущего при обработке заявки на основном сервере:

$A_{Num,From\_Num} = A_{Num,From\_Num} + m\_main_{From\_Num}$.

Применяя выявленные правила к каждому состоянию, одновременно заполняется матрица коэффициентов в нижнетреугольном виде. Когда матрица коэффициентов заполнена, остается только решить полученную систему ОДУ Чепмена-Колмогорова при заданных начальных условиях численно-аналитическим методом.

**Программная реализация метода**

Выполнена программная реализация аналитической и имитационной модели системы мониторинга в виде комплекса программ. Численно-аналитическая модель предназначена для генерирования списка возможных состояний НСО с конечным числом заявок и расчета их вероятностей в заданный момент времени.

Основным результатом работы модели является два списка:

1. общее количество сгенерированных состояний и полная упорядоченная структура хранения списка сгенерированных состояний, описанная во второй главе. Каждое состояние имеет свой номер и описано двумя векторами in_system и served;

2. последовательно пронумерованные в том же порядке, что и список состояний, вероятности нахождения системы в состоянии с указанным номером в заданный момент времени.

Дополнительно модель возвращает: время, затраченное на генерацию списка состояний; время, затраченное на заполнение матрицы коэффициентов A и приведения ее к треугольному виду, включая время, затраченное на генерацию списка состояний; общее время расчета модели; способ округления чисел, используемый при расчетах; результаты проверки итоговой матрицы коэффициентов A на то, что она является нижнетреугольной; результаты проверки расчета вероятностей в виде суммы вероятностей всех состояний, эта сумма должна быть равна единице.

Присутствует возможность запускать расчеты для нескольких моментов времени и сохранять их результаты в отдельные файлы. Сохраненные результаты удобны для последующих анализа и визуализации в виде графиков.

Пример полученного графика распределения вероятностей по состояниям представлен на рис. 2.

Имитационная модель предназначена для имитации прохождения заявок через НСО с конечным числом заявок. Основным результатом работы модели являются: полный путь, который прошла система по графу состояний в виде списка состояний;

номер каждой обработанной заявки и ее временные характеристики в единицах модельного времени; временные характеристики НСО в конце работы в единицах модельного времени.

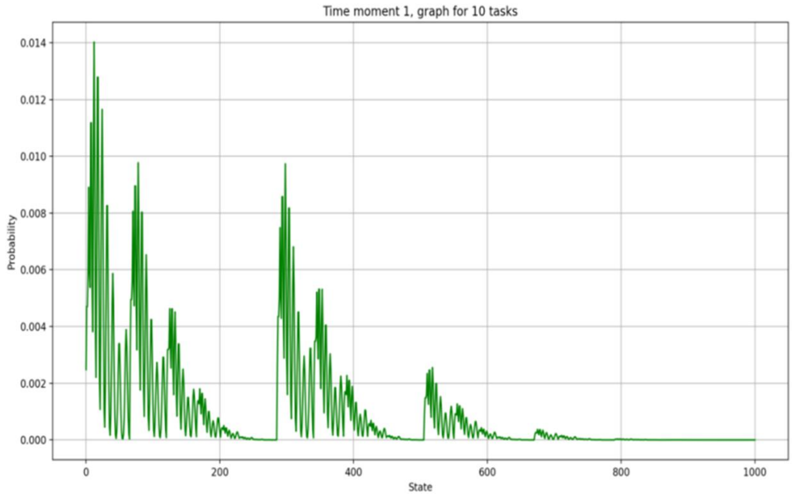


Рис. 2. Распределение вероятностей в момент времени 1

Присутствует возможность автоматически строить графики из собранных характеристик:

- составной график размера очередей к подсистемам и количество обслуженных подсистемами заявок (рис. 3);
- составной график времени обработки заявок, включающий время, проведенное заявкой в очередях и на обслуживании;
- график полного времени в системе (рис. 4).

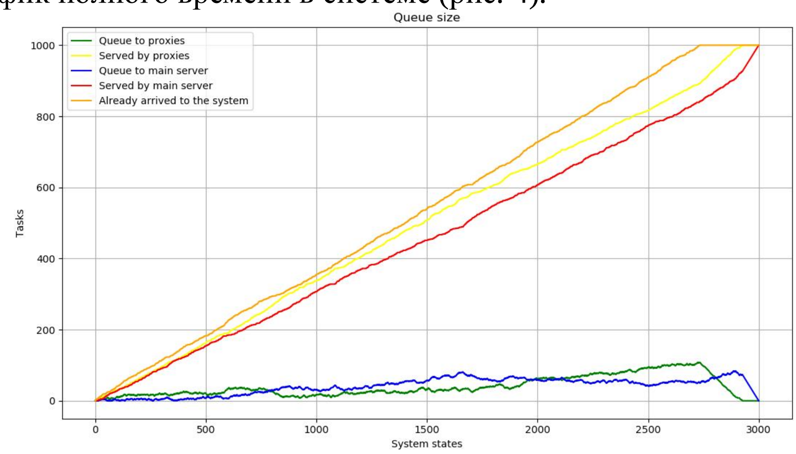


Рис. 3. Размеры очередей к подсистемам и обслуженных заявок

Численно-аналитическая модель может быть использована для моделей с ограниченным числом состояний, поскольку объем вычислений с повышенной точностью возрастает вместе с количеством состояний и уравнений в системе ОДУ Чепмена-Колмогорова. Модель предоставляет вероятностные характеристики состояний системы. Имитационная модель позволяет моделировать поведение системы при большем количестве поступающих заявок и контролировать временные характеристики заявок и размеры очередей

**Методика выбора аппаратно-программной платформы**

Методика выбора необходимой аппаратно-программной конфигурации распределенной системы мониторинга сети передачи данных с использованием разработанных моделей, алгоритмов и программного комплекса. Основной алгоритм этой методики приведен на рис. 5.

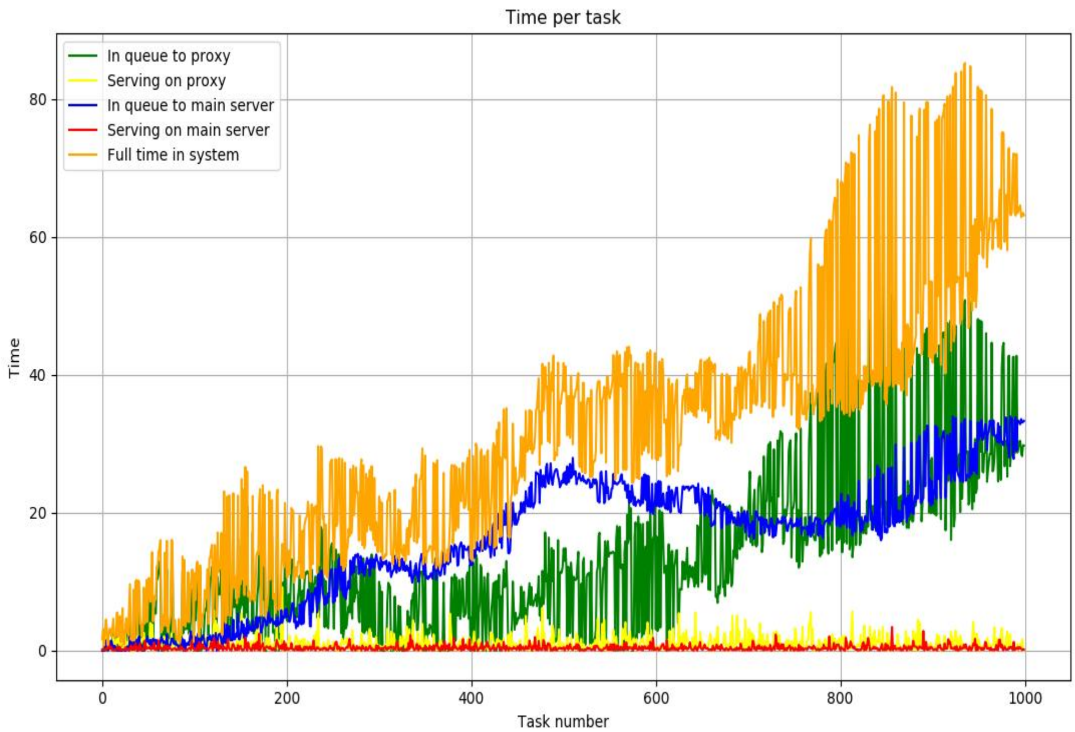


Рис. 4. Время в очереди к подсистемам и время нахождения в системе

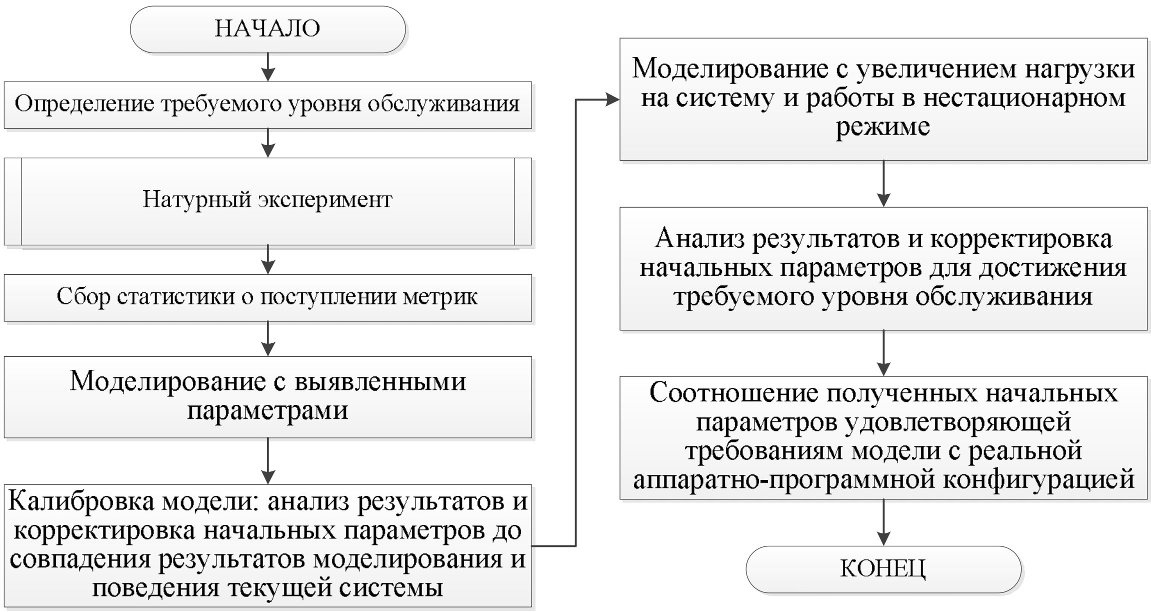


Рис. 5. Алгоритм методики выбора конфигурации распределенной системы

**Заключение**

Практическая значимость исследования состоит в следующем:

1) Использование модификации численно-аналитического метода с применением рекурсивного с группировкой алгоритма генерации списка состояний НСО и матрицы коэффициентов для расчёта систем уравнений Чепмена-Колмогорова (модели НСО) повышает скорость расчёта вероятностно-временных характеристик НСО по сравнению с существующими методами без потери точности.

2) Реализация последовательно-параллельной модели НСО, учитывающей особенности распределенной архитектуры исследуемой системы мониторинга.

3) Предложенные модели и методы реализованы в виде программного комплекса, состоящего из аналитической и имитационной моделей для расчёта вероятностно-временных характеристик НСО.

4) Применение методики выбора оптимальной аппаратно-программной конфигурации распределенной системы мониторинга позволяет на разных этапах жизненного цикла системы решать различные задачи, на этапе проектирования – выбор аппаратно-программных характеристик для серверов в системе, на этапе эксплуатации – принятие решения о горизонтальном или вертикальном масштабировании системы либо о полной ее модернизации до необходимого для поддержки требуемого уровня обслуживания состояния.

*Исследования, выполненные по данной тематике, проводились в рамках бюджетной темы №№0073–2019–0004.*

**Литература**

1. **Шардаков К.С.** Сравнительный анализ наиболее популярных существующих систем мониторинга сетевого оборудования, распространяемых по лицензии GPL / К.С. Шардаков // Интеллектуальные технологии на транспорте. 2018. №1. С. 44-48.
2. **Zegzhda P.D.** Using graph theory for cloud system security modeling. Lecture Notes in Computer Science (including subseries Lecture Notes in Artificial Intelligence and Lecture Notes in Bioinformatics) / P.D. Zegzhda, A.V. Nikolskiy. 2012. pp. 309-318.
3. **Osogami T.** Analysis of transient queues with semidefinite optimization. / T. Osogami, R. Raymond // Queueing Systems. 2013. №73. pp. 195-234.
4. **Upadhyaya S.** Queueing systems with vacation: an overview / S. Upadhyaya // International journal of mathematics in operational research. 2016. Vol9, №2. pp. 167-213.
5. **Бубнов В.П.** О загрузке вычислительной системы с изменяющейся интенсивностью поступления заданий / В.П. Бубнов, В.И. Сафонов В.А., Смагин В.А. // Автоматика и вычислительная техника. 1987. №6. С. 19-22.
6. **Бубнов В.П.** Разработка динамических моделей нестационарных систем обслуживания / В.П. Бубнов, В.И. Сафонов // СПб.: Издат-во «Лань», 1999. 64 с.
7. **Bubnov V.P.** Software reliability model with coxian distribution of length of intervals between errors detection and fixing moments. / V.P. Bubnov, A.D. Khomonenko, A.V. Tyrva // International Computer Software and Applications Conf. 2011. pp. 310-314.
8. **Bubnov V.P.** Model of reliability of the software with coxian distribution of length of intervals between the moments of detection of errors / V.P. Bubnov, A.V. Tyrva, A.D. Khomonenko // International Computer Software and Applications Conference. 34th Annual IEEE International Computer Software and Applications Conference, COMPSAC 2010. 2010. pp. 238-243.
9. **Бубнов В.П.,** Особенности программной реализации численно-аналитического метода расчёта моделей нестационарных систем обслуживания / В.П. Бубнов, А.С. Еремин, С.А. Сергеев // Труды СПИИРАН. 2015. №38. С. 218-232.
10. **Бубнов В.П.** Рекурсивный метод генерации матрицы коэффициентов системы однородных дифференциальных уравнений, описывающих нестационарную систему обслуживания. / В.П. Бубнов, А.Д. Хомоненко, С.А. Сергеев // XVIII Международная конф. по мягким вычислениям и измерениям. SCM 2015. С. 75-77.
11. **Сергеев С.А.** Метод составления систем однородных дифференциальных уравнений для расчёта вероятностно-временных характеристик нестационарных систем обслуживания / С.А. Сергеев // Интеллектуальные технологии на транспорте. 2015. №2. С. 32-42.

12. **Shardakov K.S.** Generating of the Coefficient Matrix of the System of Homogeneous Differential Equations / K.S. Shardakov, V.P. Bubnov, A.N. Pavlov // Workshop Computer Science and Engineering in the framework of the 5th International Scientific-Methodical Conference «Problems of Mathematical and Natural-Scientific Training in Engineering Education». 2018. pp. 42-47.
13. **Сергеев С.А.** Программный комплекс аналитико-имитационных моделей для расчёта вероятностно-временных характеристик нестационарных систем обслуживания / С.А. Сергеев, В.П Бубнов., В.В. Бубнов // Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ RU 2015617625, 16.07.2015. Заявка № 2015614100 от 19.05.2015.