

УДК 623.615

## Аналитическая модель обслуживания мультимедийного трафика с распределением Парето на основе аппроксимации результатов имитационного моделирования

Одоевский С. М., Бусыгин А. В.

**Постановка задачи:** Мультимедийный трафик в современных телекоммуникационных сетях обладает свойством самоподобия, которое существенно осложняет обеспечение качества обслуживания в сетевых устройствах коммутации. Для описания реального самоподобного трафика часто используется распределение Парето (распределение интервалов времени между поступлением пакетов входящего трафика). Выбор и настройка подходящих механизмов обеспечения качества обслуживания предполагает оперативный прогноз ожидаемых показателей качества, который для самоподобного трафика с распределением Парето можно выполнить только с помощью имитационного моделирования процесса обслуживания, поскольку точных аналитических моделей не существует. **Целью работы** является разработка аналитической модели обслуживания мультимедийного трафика с распределением Парето, позволяющей рассчитывать показатели своевременности обслуживания трафика в сетевом устройстве коммутации с помощью аналитических выражений, полученных на основе аппроксимации результатов имитационного моделирования. **Используемые методы:** Для моделирования обслуживания самоподобного трафика в сетевом устройстве коммутации использовалась модель системы массового обслуживания P/M/1. В качестве показателя своевременности обслуживания трафика рассматривалось относительное среднее время ожидания (относительно среднего времени обслуживания). При выводе аналитических выражений для зависимости данного показателя от нагрузки и показателя Хёрста использовалась двухэтапная аппроксимация на основе показательных и дробно-рациональных функций результатов имитационного моделирования в программной среде AnyLogic. **Новизной** работы является аналитическое выражение на основе показательных и дробно-рациональных функций для расчета относительного среднего времени ожидания во всем диапазоне возможных значений нагрузки и показателя Хёрста входного трафика с распределением Парето. **Результат.** С помощью имитационной модели обслуживания трафика типа P/M/1 были получены статистические зависимости относительного среднего времени ожидания от нагрузки и показателя Хёрста практически во всем диапазоне возможных значений. Сравнительный анализ данных статистических зависимостей и известных аналитических зависимостей на основе показательных функций для FBM/M/1 позволил сделать предположение о возможном использовании подобных функций для аппроксимации статистических зависимостей для P/M/1. Представлен способ аппроксимации на первом этапе статистических зависимостей при разных фиксированных значениях показателя Хёрста на основе показательных функций с тремя параметрами (зависящими от показателя Хёрста) в трех выбранных точках интерполяции. Описана вычислительная процедура определения параметров аппроксимации на первом этапе для заданных статистических зависимостей, соответствующих конкретным значениям показателя Хёрста, перебираемым с фиксированным шагом во всем диапазоне возможных значений. Полученные табличные зависимости трёх указанных параметров от показателя Хёрста были аппроксимированы на втором этапе дробно-рациональными выражениями, подобными аналогичным выражениям в известной формуле для FBM/M/1. В отличие от других известных результатов аппроксимации статистической зависимости относительного среднего времени ожидания от нагрузки и показателя Хёрста, которые или являются слишком приближёнными, или справедливыми в ограниченном диапазоне значений нагрузки и показателя Хёрста, полученные результаты аппроксимации охватывают весь диапазон возможных значений указанных параметров трафика и с высокой точностью. **Практическая значимость:** полученное аналитическое выражение может быть использовано при выборе и настройке механизмов обеспечения качества обслуживания мультимедийного трафика в сетевых устройствах коммутации для оперативного прогноза ожидаемых показателей качества обслуживания.

**Ключевые слова:** самоподобный трафик, распределение Парето, аналитическая модель, качество обслуживания.

### Библиографическая ссылка на статью:

Одоевский С. М., Бусыгин А. В. Аналитическая модель обслуживания мультимедийного трафика с распределением Парето на основе аппроксимации результатов имитационного моделирования // Системы управления, связи и безопасности. 2020. № 1. С. 74-108. DOI: 10.24411/2410-9916-2020-10104.

### Reference for citation:

Odoevsky S. M., Busygin A. V. Approximation of statistical characteristics of the multimedia traffic service process based on the Pareto distribution. *Systems of Control, Communication and Security*, 2020, no. 1, pp. 74-108. DOI: 10.24411/2410-9916-2020-10104 (in Russian).

### Актуальность

Мультимедийный трафик в современных телекоммуникационных сетях имеет сложную структуру, одним из признаков которой является свойство самоподобия [1, 2], из-за чего в сети на различных случайных интервалах времени возникают пульсации нагрузки, которые могут приводить к большим задержкам и потерям пакетов, если в сети заранее не будут предприняты определенные меры обеспечения качества обслуживания [3, 4].

В сетевых устройствах коммутации в качестве таких мер могут использоваться различные механизмы обеспечения качества обслуживания как отдельных составляющих, так и всего трафика [5, 6]. При выборе и настройке указанных механизмов обеспечения качества обслуживания мультимедийного трафика важное значение имеет прогноз ожидаемых показателей качества обслуживания [7] при тех или иных наблюдаемых параметрах трафика [8].

Как показано в [7], в качестве основного показателя качества обслуживания наиболее удобно в вычислительном смысле использовать среднюю задержку пакетов  $\tau_{\text{зад}}$ , выступающую в роли одного из показателей своевременности обслуживания трафика. При оценке качества обслуживания трафика в отдельном устройстве коммутации данная задержка является суммой среднего времени ожидания  $\tau_{\text{ож}}$  и среднего времени обслуживания  $\tau_{\text{об}}$  (передачи) пакетов. При этом оба слагаемых задержки зависят от пропускной способности используемого канала связи  $\mu$ . Среднее время обслуживания  $\tau_{\text{об}}$  является обратной величиной пропускной способности  $\tau_{\text{об}} = 1/\mu$ , а время ожидания  $\tau_{\text{ож}}$  связано с  $\mu$  более сложным образом в зависимости от статистических характеристик входного потока, распределения времени обслуживания и механизмов обслуживания трафика в устройстве коммутации.

В общем случае время передачи (обслуживания) может иметь произвольное распределение, в том числе, «с длинным хвостом», характерным для самоподобных случайных процессов. Однако на практике в связи с подведомственной (внутрисистемной) ролью данного параметра в конкретной телекоммуникационной сети, которая может им управлять или, по крайней мере, достаточно точно его прогнозировать, в большинстве математических моделей даже с самоподобным входным трафиком допускается время обслуживания считать детерминированным ( $D$  – Deterministic) или распределенным по экспоненциальному (характерному для пуассоновского или марковского случайного процесса) закону ( $M$  – Markovian).

Другая составная часть времени задержки – время ожидания начала обслуживания  $\tau_{\text{ож}}$ , с одной стороны, зависит от указанного выше времени обслуживания  $\tau_{\text{об}}$  (обратно пропорционального пропускной способности  $\mu$ ), а с другой стороны, непосредственно связана с характеристиками входного потока пакетов (в частности, с его интенсивностью  $\lambda$ ), а, следовательно, в первую очередь «ощущает на себе» влияние всех проявлений его свойства самоподобия. В настоящей работе для большей общности в качестве основного показателя своевременности рассматривается нормированное к среднему времени обслуживания относительное среднее время ожидания  $T_q = \tau_{\text{ож}}/\tau_{\text{об}}$ .

Основной мерой степени самоподобия сложного мультимедийного трафика является показатель Хёрста  $H$  [1], который может принимать значения в интервале от 0,5 (минимальная степень самоподобия или фактически его отсутствие) до 1 (максимальная степень самоподобия, которая на практике не встречается).

Реальный трафик, обладающий свойствами самоподобия с определенным значением показателя Хёрста  $H$ , может быть представлен различными математическими моделями. Одной из самых популярных моделей самоподобного трафика является модель типа  $FBM$  (от англ. Fractal Brownian Motion – фрактальное броуновское движение) [9]. Для данной модели известны аналитические функциональные зависимости  $T_q(\rho, H)$  относительного среднего времени ожидания  $T_q$  от нагрузки  $\rho = \lambda/\mu$  и показателя Хёрста  $H$  при детерминированном ( $D$ ) и экспоненциальном ( $M$ ) распределении времени обслуживания в одноканальных системах массового обслуживания (СМО) вида  $FBM/D/1$  и  $FBM/M/1$  [1, 10-12].

Для моделирования самоподобного трафика кроме модели  $FBM$  могут использоваться многие другие распределения с «длинными хвостами». Наиболее популярными являются распределения Парето ( $P$  – Pareto) и Вейбулла ( $W$  – Weibull) [10-13]. Однако точные аналитические функциональные зависимости  $T_q(\rho, H)$  для СМО типа  $P/M/1$  или  $P/D/1$ , а также  $W/M/1$  или  $W/D/1$ , т.е. при поступлении на вход устройства коммутации потоков данных, описываемых распределениями Парето ( $P$ ) и Вейбулла ( $W$ ), неизвестны. Поэтому для расчета показателей обслуживания в таких СМО широко используется имитационное моделирование [7, 11, 14-16]. Однако довольно большие затраты времени на получение результатов имитационного моделирования (с необходимой точностью) затрудняют их использование для оперативного прогнозирования качества обслуживания самоподобного трафика при выборе и настройке подходящих механизмов управления трафиком.

В настоящее время известны некоторые приближённые аналитические модели обслуживания самоподобного трафика с распределением Парето, основанные на аппроксимации результатов имитационного моделирования экспоненциальными функциями [17] или на использовании общих (для разных СМО) аналитических зависимостей с подходящими параметрами [18].

Однако указанные аналитические модели являются или слишком приближёнными [18] (противоречащими результатам имитационного моделирования), или справедливыми (достаточно точными) лишь в ограниченном диапазоне значений нагрузки и показателя Хёрста [17]. Поэтому, как уже отмечалось в работах [19, 20] в настоящее время остается актуальной проблема поиска и/или разработки других (новых) достаточно точных и удобных в вычислительном смысле аналитических моделей, применимых во всем диапазоне возможных значений параметров самоподобного трафика с распределением Парето.

### Постановка задачи

Из приведенного выше обоснования актуальности разработки аналитической модели обслуживания мультимедийного трафика с распределением Парето

то, необходимой для оперативного прогноза ожидаемых показателей качества при выборе и настройке подходящих механизмов обеспечения качества, вытекает следующая постановка задачи.

В качестве модели самоподобного трафика рассматривается поток, в котором время между приходом заявок имеет распределение Парето:

$$F(\tau) = 1 - \left(\frac{k}{\tau}\right)^\alpha, \quad k > 0, \alpha > 0, \tau > k, \quad (1)$$

где  $\tau$  – интервал времени между поступлением очередных заявок в потоке с распределением Парето;  $k$  – коэффициент масштаба распределения Парето;  $\alpha$  – параметр формы распределения Парето.

Как показано в работах [1, 7, 8, 14-17], параметр формы распределения Парето  $\alpha$  зависит от показателя Хёрста следующим образом:

$$\alpha = 3 - 2 \cdot H. \quad (2)$$

При изменении показателя Хёрста в диапазоне  $H \in [0,5; 1)$  величина параметра формы изменяется в диапазоне  $\alpha \in (1; 2]$ .

Коэффициент масштаба распределения Парето  $k$  при заданном (фиксированном) значении  $\alpha$  (2) зависит от этого значения и от интенсивности трафика  $\lambda$ , являющейся обратной величиной математического ожидания  $m$  распределения Парето [7, 19]:

$$m = \frac{\alpha \cdot k}{\alpha - 1} = \frac{1}{\lambda} \rightarrow k = \frac{\alpha - 1}{\alpha \cdot \lambda}. \quad (3)$$

В качестве модели трафика на выходе сетевого устройства коммутации рассматривается поток, в котором длительность обслуживания заявок имеет экспоненциальное распределение с интенсивностью  $\mu$ , обратно пропорциональной среднему времени обслуживания  $\tau_{об} = 1/\mu$ .

Поскольку показатели качества обслуживания трафика, в частности, показатели своевременности, обычно зависят от отношения  $\lambda/\mu$ , представляющего собой нагрузку  $\rho$ , то можно ограничиться заданием единичного значения  $\mu=1$ . При этом диапазон изменения нагрузки  $\rho \in [0; 1)$  будет равен диапазону изменения интенсивности входного потока  $\lambda \in [0; 1)$ .

В качестве основного показателя качества обслуживания трафика рассматривается относительное среднее время ожидания  $T_q = \tau_{ож}/\tau_{об}$ .

Описанные выше параметры входного и выходного трафика составляют все необходимые исходные данные для имитационного моделирования СМО типа  $P/M/1$  и последующего решения задачи аппроксимации его результатов в рамках настоящей работы.

Цель работы – разработка аналитической модели обслуживания мультимедийного трафика с распределением Парето, позволяющей рассчитывать показатели своевременности обслуживания трафика в сетевом устройстве коммутации с помощью аналитических выражений, полученных на основе аппроксимации результатов имитационного моделирования во всем диапазоне возможных значений нагрузки и показателя Хёрста.

Достижение указанной цели обеспечивается последовательным решением частных задач:

- 1) проведением имитационного моделирования обслуживания самоподобного трафика с распределением Парето при различных значениях нагрузки  $\rho$  и показателя Хёрста  $H$ ;
- 2) анализом известных способов аппроксимации результатов имитационного моделирования в зависимости от нагрузки  $\rho$  при различных значениях показателя Хёрста  $H$ ;
- 3) поиском общих закономерностей и аппроксимацией результатов имитационного моделирования в зависимости от нагрузки  $\rho$  для каждого конкретного значения показателя Хёрста  $H$  (на первом этапе аппроксимации);
- 4) поиском общих закономерностей и аппроксимацией результатов имитационного моделирования в зависимости от нагрузки  $\rho$  и показателя Хёрста  $H$  (на втором этапе аппроксимации).

Для формализации задачи в работе введены следующие обозначения:

- $\tau$  – интервал времени между поступлением очередных заявок (пакетов);  
 $\alpha$  – параметр формы распределения Парето;  
 $k$  – коэффициент масштаба распределения Парето;  
 $H$  – показатель Хёрста, определяющий степень самоподобия трафика;  
 $m$  – математическое ожидание значений интервала времени  $\tau$  между поступлением очередных заявок;  
 $\lambda$  – интенсивность поступления потока заявок;  
 $\mu$  – интенсивность обслуживания потока заявок;  
 $\rho$  – нагрузка;  
 $\tau_{\text{зад}}$  – среднее время задержки (при обслуживании и ожидании);  
 $\tau_{\text{об}}$  – среднее время обслуживания пакетов (заявок);  
 $\tau_{\text{ож}}$  – среднее время ожидания (начала обслуживания);  
 $T_q$  – относительное среднее время ожидания;  
 $T_{\text{зад}}$  – относительное среднее время задержки;  
 $T_{q \text{ им}}$  – полученные результаты расчета величины  $T_q$  при имитационном моделировании;  
 $T_{q \text{ им.др}}$  – другие ранее известные результаты расчета величины  $T_q$  при имитационном моделировании;  
 $\Delta T_{q \text{ им}}$  – отличие полученных результатов имитационного моделирования от других ранее известных;  
 $N$  – объем выборки;  
 $T_{q \text{ ам}}$  – результаты расчета величины  $T_q$  при аналитическом моделировании;  
 $a, b, c$  – параметры аппроксимирующей функции  $T_{q \text{ ам}}(\rho)$  при фиксированных значениях показателя Хёрста  $H$  (на первом этапе аппроксимации);  
 $a(H), b(H), c(H)$  – функции, аппроксимирующие значения параметров  $a_i, b_i, c_i$  при различных значениях показателя Хёрста  $H_i$  (на втором этапе аппроксимации).

## Имитационное моделирование обслуживания трафика с распределением Парето

Для исследования зависимости относительного среднего времени ожидания  $T_q$  от нагрузки  $\rho$  при различных значениях показателя Хёрста  $H$  самоподобного трафика с распределением Парето была построена имитационная модель сетевого устройства коммутации в среде AnyLogic [23]. Среда имитационного моделирования AnyLogic была выбрана, поскольку она обладает рядом таких достоинств, как простота построения различных СМО, удобный интерфейс для ввода и корректировки исходных данных, наглядное отображение результатов имитационного и аналитического моделирования с возможностью их сравнения.

Построенная имитационная модель состоит из четырех объектов (рис. 1).

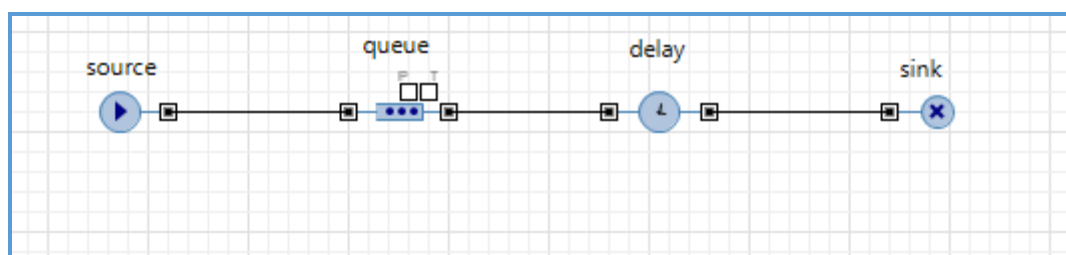


Рис. 1. Основные объекты имитационной модели

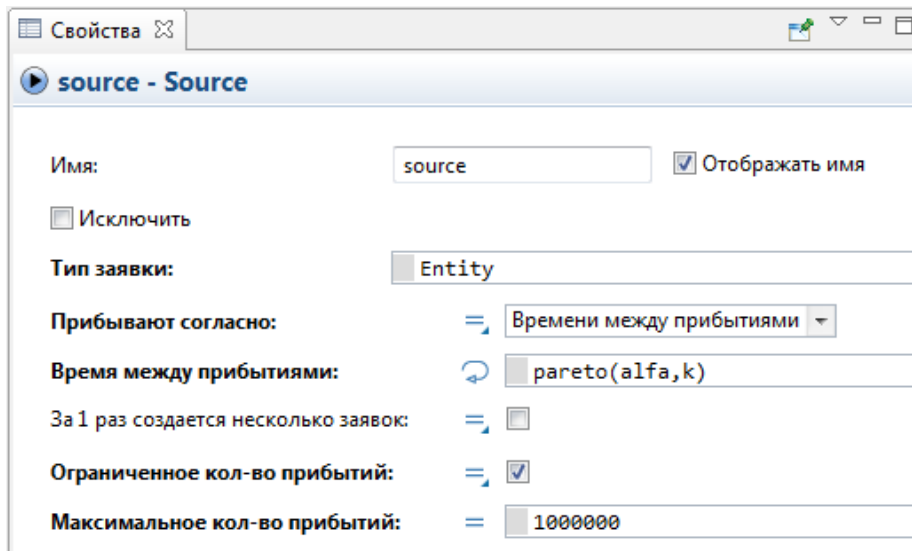
Объект Source создает заявки (рис. 2). Используется в качестве источника потока заявок, время между прибытиями которых распределено по закону Парето с параметрами  $\alpha$  и  $k$  (на рис. 2а – «**pareto(alfa,k)**»). Объем выборки (на рис. 2а – «**Максимальное кол-во прибытий**») задавался равным  $N=10^6$  (максимально возможное значение в используемой версии AnyLogic). Значение параметра  $\alpha$  задается в соответствии с выражением (2) (рис. 2б). Значение параметра  $k$  задается в соответствии с выражением (3) (рис. 2в).

Объект Sink уничтожает поступившие заявки. Используется в качестве конечной точки потока заявок.

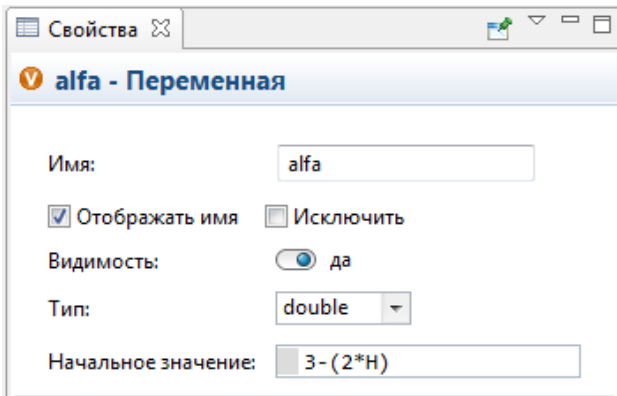
Объект Delay задерживает заявки на случайный период времени (соответствующий времени обслуживания), распределенный по экспоненциальному закону со средним временем обслуживания  $\tau_{об}=1$  (на рис. 3 – «**exponential(1)**»). Количество обслуживающих приборов в соответствии с моделью  $P/M/1$  задается равным 1 (на рис. 3 – «**Вместимость = 1**»)

Объект Queue моделирует очередь заявок, ожидающих обслуживания (рис. 4). Заявки поступают и покидают очередь согласно правилу *FIFO*. Размер очереди не ограничен (на рис. 4 – «**Максимальная вместимость**»).

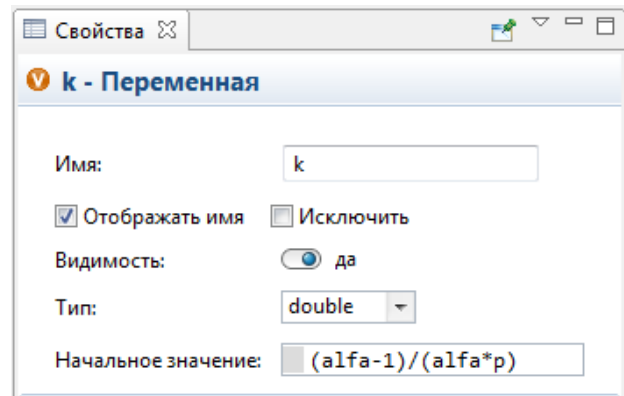
Среда имитационного моделирования AnyLogic позволяет проводить различные вычислительные эксперименты с имитационными и аналитическими моделями, параметры которых (свойства) можно задавать и изменять вручную или описывать правила автоматического перебора в заданном диапазоне с определенным шагом с целью получения как отдельных результатов, так и множества результатов, представленных в виде таблиц и/или графиков.



а)



б)



в)

Рис. 2. Свойства объекта Source

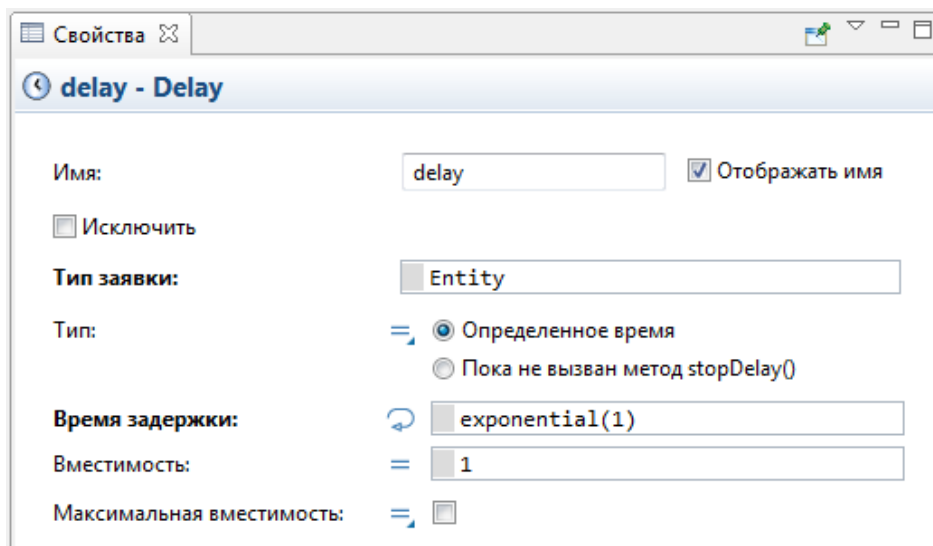


Рис. 3. Свойства объекта Delay

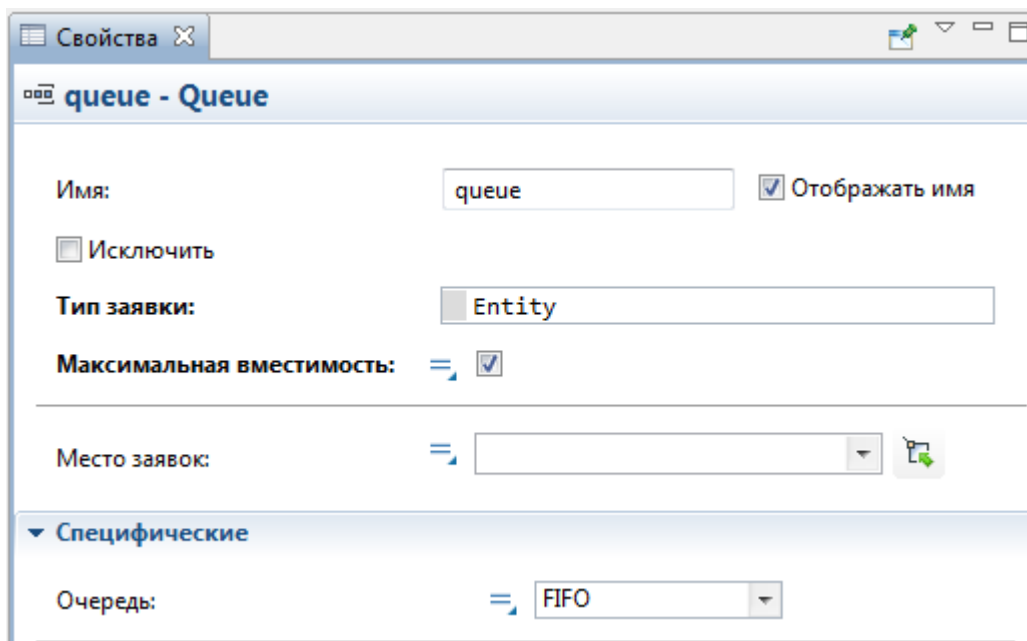
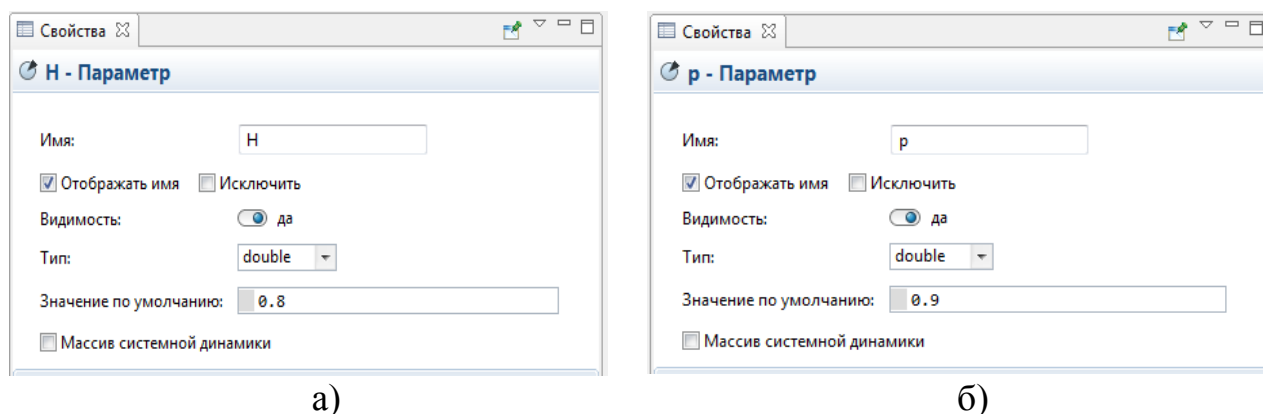


Рис. 4. Свойства объекта Queue

На рис. 5 показан пример ввода значений параметров  $H=0,8$  и  $\rho=0,9$  при выполнении отдельных расчетов.



а) б)  
Рис. 5. Пример ввода значений параметров  $H$  и  $\rho$  при выполнении отдельных расчетов

На рис. 6 представлен пример рабочего окна с отображением отдельного результата вычисления относительного среднего времени ожидания  $T_{q\text{им}}=113,151$  при введенных значениях параметров  $H=0,8$  и  $\rho=0,9$  и вычисленных значениях параметров  $\alpha=1,4$  и  $k=0,317$  по формулам (2), (3) (рис. 2б и 2в).

На рис. 7 приведено окно задания правила автоматического перебора значений параметров  $H$  и  $\rho$  в диапазонах  $[0,5; 0,95]$  и  $[0,05; 0,95]$ , соответственно, с одинаковым шагом  $0,05$  с целью получения множества результатов имитационного моделирования  $\{T_{q\text{им}}\}$ , представленного в виде таблицы.



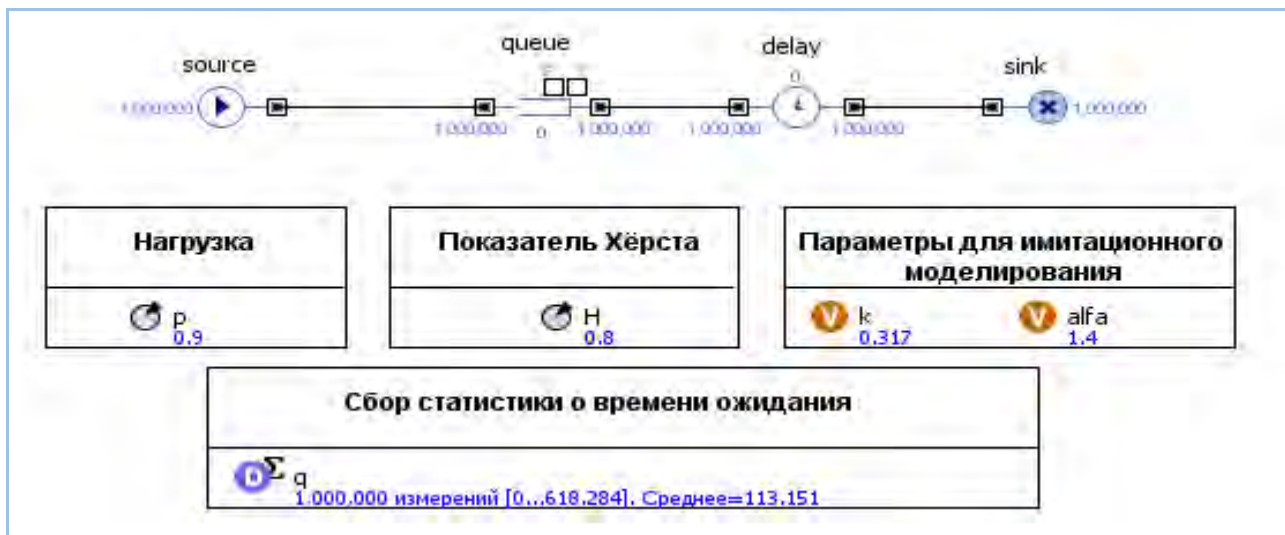


Рис. 6. Пример отображения отдельного результата имитационного моделирования

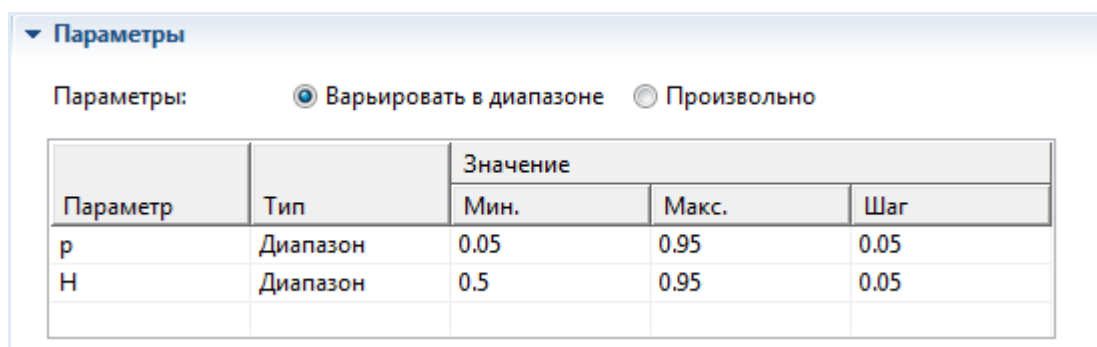


Рис. 7. Окно задания правила автоматического перебора значений нагрузки  $\rho$  и показателя Хёрста  $H$  для получения табличных результатов

Множество полученных результатов имитационного моделирования  $\{T_{q\text{им}}\}$  в заданных диапазонах изменения параметров  $\rho$  и  $H$  приведено в таблице 1. В указанной таблице для наглядности цветным фоном выделены рассчитанные очень большие значения относительного среднего времени ожидания  $T_{q\text{им}}$ , превышающие значения 20 (зеленый цвет), 100 (голубой цвет), 1000 (оранжевый цвет) и 10000 (розовый цвет).

Как видно из таблицы 1, отмеченные выше большие значения времени ожидания возникают в области сочетаний довольно больших значений нагрузки  $\rho$  и показателя Хёрста  $H$ , которых на практике (при выборе и настройке механизмов управления трафиком) стараются избегать независимо от точности прогноза ожидаемого качества обслуживания, которое, очевидно, при таких параметрах трафика будет низким.

Не исключая отмеченные цветом в таблице 1 области из охватываемого диапазона аппроксимации (см. далее), основное внимание при исследованиях результатов имитационного моделирования уделялось области изменения значений нагрузки  $\rho$  и показателя Хёрста  $H$ , при которых относительное среднее время ожидания  $T_{q\text{им}}$  не превышало величину 20.

Таблица 1 – Табличные результаты имитационного моделирования  
(результаты расчета  $T_{q\text{им}}$ )

		Показатель Хёрста $H$									
		0,5	0,55	0,6	0,65	0,7	0,75	0,8	0,85	0,9	0,95
Н а р у з к а  р	0,05	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,002	0,009	0,063
	0,1	0,002	0,002	0,003	0,005	0,007	0,011	0,018	0,036	0,087	0,349
	0,15	0,013	0,016	0,019	0,024	0,032	0,045	0,068	0,116	0,241	0,888
	0,2	0,038	0,044	0,052	0,063	0,080	0,106	0,150	0,239	0,474	1,833
	0,25	0,078	0,089	0,103	0,121	0,149	0,191	0,264	0,413	0,817	3,516
	0,3	0,134	0,15	0,171	0,200	0,241	0,304	0,418	0,648	1,309	6,826
	0,35	0,207	0,229	0,258	0,299	0,361	0,456	0,623	0,98	2,047	13,264
	0,4	0,298	0,33	0,374	0,432	0,515	0,653	0,894	1,422	3,164	27,48
	0,45	0,419	0,461	0,514	0,599	0,718	0,904	1,257	2,038	4,91	58,148
	0,5	0,567	0,626	0,703	0,816	0,975	1,246	1,735	2,937	7,833	129
	0,55	0,762	0,838	0,946	1,095	1,316	1,71	2,45	4,274	12,721	337
	0,6	1,017	1,127	1,266	1,467	1,781	2,36	3,489	6,427	22,966	1274
	0,65	1,366	1,494	1,684	1,996	2,505	3,256	4,924	9,942	41,907	3187
	0,7	1,845	2,049	2,356	2,755	3,423	4,628	7,44	15,411	81,37	16984
	0,75	2,531	2,894	3,218	3,882	5,001	7,029	12,147	30,239	203	18818
	0,8	3,571	4,103	4,692	5,905	7,766	11,155	21,004	64,153	557	42420
	0,85	5,641	6,320	7,531	9,319	12,858	21,126	43,75	157	1866	61224
0,9	9,786	11,211	13,404	19,064	25,113	50,658	113,1	433	11922	64752	
0,95	23,377	28,793	36,223	53,916	94,954	150	845	1851	20908	69008	

На рис. 8 приведены изображения основных окон задания правила построения графиков зависимости  $T_{q\text{им}}(\rho)$  при различных значениях показателя Хёрста. Правило автоматического перебора значений  $\rho$  задавалось с помощью окна, аналогичного, показанному на рис. 7, но в немного расширенном диапазоне  $[0,025; 0,95]$  и с более мелким шагом 0,025.

Полученные результаты имитационного моделирования в виде графиков, построенных в среде AnyLogic, приведены на рис. 9. Нетрудно видеть, что данные графики охватывают все значения результатов  $T_{q\text{им}}$ , приведенных в незакрашенной части таблицы 1, дополняя их промежуточными значениями при дополнительных (промежуточных) значениях нагрузки.

Приведенные на рис. 9 графические результаты имитационного моделирования, полученные для СМО  $P/M/1$  практически во всем возможном и актуальном для практики диапазоне значений нагрузки  $\rho$  и показателя Хёрста  $H$ , уточняют и дополняют ранее опубликованные результаты [7, 16], полученные в среде MathCad для отдельных значений показателя Хёрста с большим шагом перебора значений нагрузки  $\rho$  и с меньшей точностью расчетов (с меньшим объемом выборки).

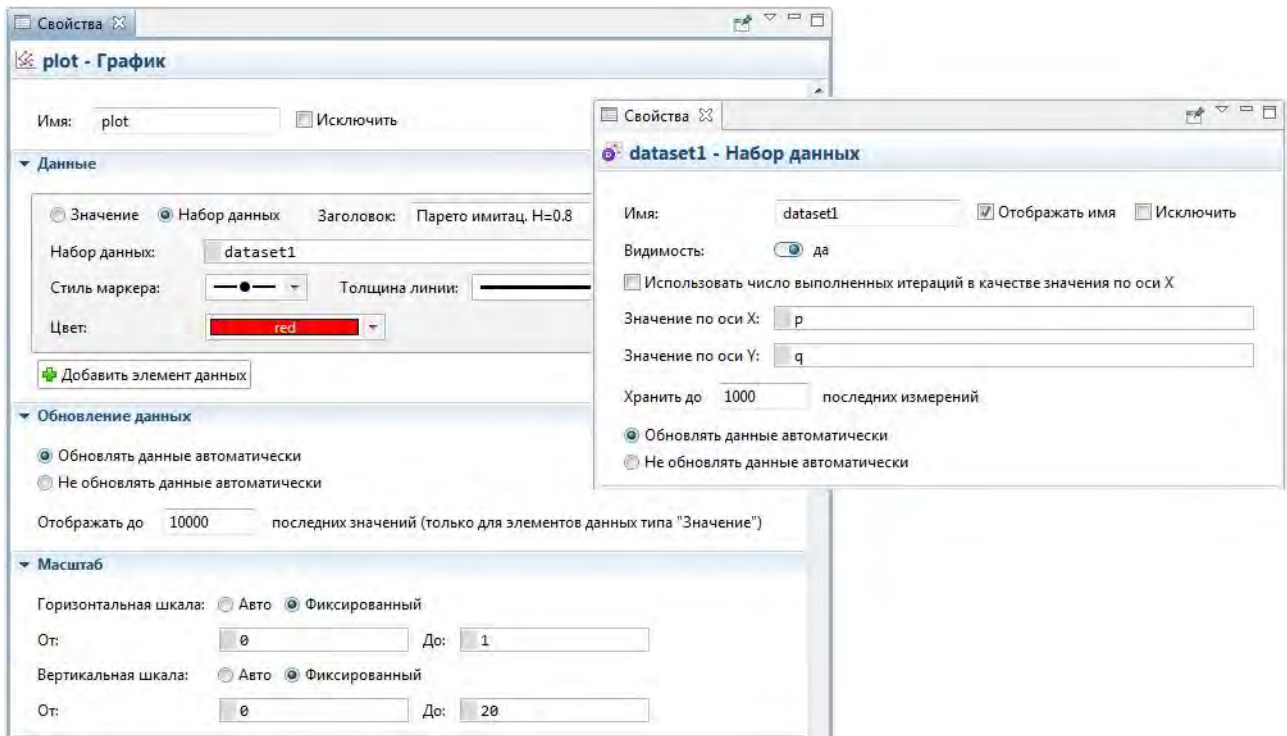


Рис. 8. Основные окна задания правила построения графиков зависимости  $T_{q \text{ им}}(\rho)$  при различных значениях показателя Хёрста

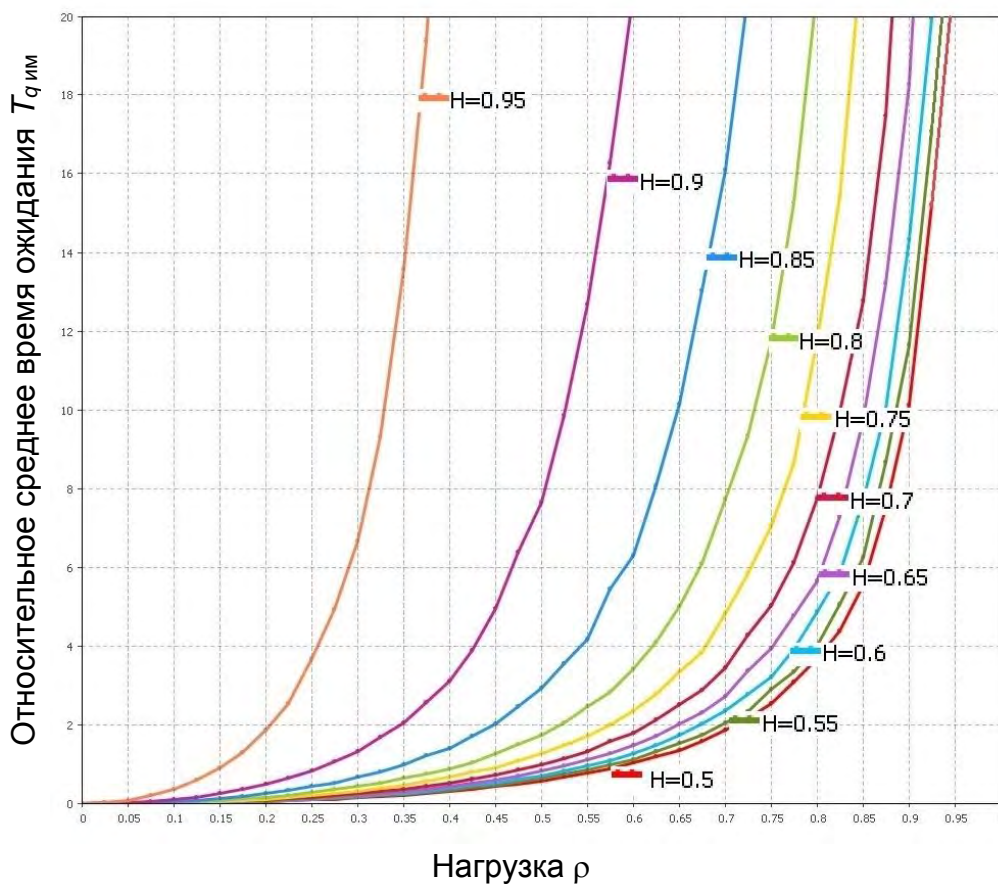


Рис. 9. Графические результаты имитационного моделирования (результаты расчета  $T_{q \text{ им}}$ )

Наиболее близкими к полученным результатам по полноте и точности являются результаты имитационного моделирования, приведенные в статье [17], полученные в среде GPSS World и представленные в указанной статье в табличном виде, подобном таблице 1 (после транспонирования), но с большим шагом по нагрузке (0,1) и не охватывая крайние значения  $\rho=0,05$ ,  $\rho=0,95$  и  $H=0,95$ .

Еще одним системным отличием результатов в [17] является то, что в качестве показателя своевременности там рассматривалось нормированное время задержки  $T_{\text{зад}}$ , а не ожидания, как в настоящей работе (с обозначением  $T_q$ ). Но нормировка выполнялась одинаковым образом – относительно времени обслуживания  $\tau_{\text{об}}$ , которое (как и обратная величина интенсивности обслуживания  $\mu$ ) принималось равным 1. Известно [10], что при такой нормировке указанных показателей своевременности справедливо равенство:

$$T_q = T_{\text{зад}} - 1. \quad (4)$$

В таблице 2 приведены значения разности  $\Delta T_{q \text{ им}} = T_{q \text{ им}} - T_{q \text{ им.др}}$  результатов  $T_{q \text{ им}}$ , полученных в настоящей работе (таблица 1) в совпадающей с [17] части значений нагрузки  $\rho$  и показателя Хёрста, и «других» результатов, приведенных в [17], пересчитанных по формуле (4) в  $T_{q \text{ им.др}}$ .

Таблица 2 – Разность  $\Delta T_{q \text{ им}}$  двух наборов (своих и других) результатов имитационного моделирования

		Показатель Хёрста $H$								
		0,5	0,55	0,6	0,65	0,7	0,75	0,8	0,85	0,9
Н а г р у з к а  $\rho$	0,1	0,002	0,001	0,001	0,002	0,002	0,001	0,002	0,003	0,007
	0,2	-0,002	0,002	0,002	0,002	0,003	0,006	0,000	-0,001	-0,006
	0,3	0,004	0,002	0,002	0,000	0,001	-0,006	-0,002	-0,002	-0,001
	0,4	0,002	0,000	0,002	0,002	0,002	0,003	0,014	0,022	0,064
	0,5	-0,003	0,002	0,003	0,006	0,007	0,016	0,005	0,057	0,233
	0,6	0,007	0,020	0,016	0,007	0,010	0,060	0,109	0,207	1,766
	0,7	0,035	0,049	0,070	0,045	0,056	0,018	0,150	-0,329	3,870
	0,8	0,011	0,088	0,046	0,235	0,226	0,255	0,914	3,173	94,4
	0,9	0,286	0,181	0,044	0,384	-1,397	3,048	-6,700	-141,4	-4619

Как видно из таблицы 2, отличие новых и ранее опубликованных результатов имитационного моделирования пренебрежимо мало – в незакрашенной (актуальной для практики) части результатов отличие не превышает десятых долей абсолютных значений рассчитанных показателей своевременности. Следовательно, можно полагать, что статистические зависимости, полученные в настоящей работе, в достаточной степени совпадают с результатами в [17], чтобы считаться одинаковыми для сравнения различных способов их аналитической аппроксимации (задача строгой статистической оценки близости новых и прежних результатов имитационного моделирования в настоящей работе не ставилась и не решалась, так как требует дополнительных исходных данных). Далее при анализе результатов аналитического моделирования именно такое

совпадение с результатами имитационного моделирования (с отличием не более десятых долей, визуально почти не различимым на приведенных далее графиках) будет считаться «достаточно точным».

Таким образом, полученные результаты имитационного моделирования позволили сформировать базис достаточно точных статистических данных  $T_{q\text{им}}(\rho, H)$  с целью проведения аппроксимации и получения аналитических выражений  $T_{q\text{ам}}(\rho, H)$  для оценки зависимости  $T_q(\rho, H)$  практически во всем диапазоне возможных значений нагрузки  $\rho$  и показателя Хёрста  $H$ .

### Анализ известных способов аппроксимации результатов имитационного моделирования в зависимости от нагрузки $\rho$ при различных значениях показателя Хёрста $H$

Существует довольно большое число способов аппроксимации таблично заданных зависимостей [21, 22], подобных рассматриваемым результатам имитационного моделирования. Отличительной особенностью полученных зависимостей  $T_{q\text{им}}(\rho, H)$  является, с одной стороны, медленный рост рассчитываемого показателя  $T_{q\text{им}}$  в области малых значений параметров  $\rho$  и  $H$ , а с другой стороны, резкое увеличение данного показателя в области больших значений указанных параметров. Эта особенность позволила авторам статьи [17] воспользоваться аппроксимацией результатов имитационного моделирования (относительного среднего времени задержки  $T_{\text{зад}}$ ) экспоненциальными функциями вида:

$$T_{\text{зад}} = a \cdot \exp(b \cdot \rho) + c, \quad (5)$$

где  $a, b, c$  – параметры аппроксимирующей экспоненциальной функции, зависящие от значения показателя Хёрста (точнее, от параметра формы  $\alpha$ , однозначно связанного с показателем Хёрста  $H$  выражением (2)). Причем для аппроксимации зависимостей каждого из данных параметров от параметра  $\alpha$  (связанного с показателем Хёрста  $H$ ) использовались аналогичные экспоненциальные функции с тремя дополнительными параметрами  $d, e, f$  (подбираемыми константами для каждого из трех параметров  $a, b, c$ ) – для параметров  $b$  и  $c$ , а для параметра  $a$  – в виде логистической функции (у которой экспоненциальная зависимость вида (5) в знаменателе).

Значения параметров  $a, b, c$  вычислялись в [17] на первом этапе аппроксимации для девяти значений параметра формы  $\alpha \in \{1,2; 1,3; \dots; 2\}$  (соответствующих в обратном порядке девяти значениям показателя Хёрста  $H \in \{0,5; 0,55; \dots; 0,9\}$ ) в программной среде MathCad с помощью встроенной функции `expfit` по критерию минимума среднеквадратичного отклонения (СКО) результатов, рассчитанных по формуле (5), от результатов имитационного моделирования.

Аналогичным образом по тому же критерию с помощью той же встроенной функции `expfit` и дополнительной (логистической) функции `lgsfit` в программной среде MathCad на втором этапе в [17] вычислялись параметры  $d, e, f$  для каждого из параметров  $a, b, c$  (заданных в виде рассчитанной на первом этапе табличной зависимости от параметра формы  $\alpha$ ). Причем для параметра  $a$  рассчитывался двойной набор параметров  $d, e, f$ , так как аппроксими-

рующая логистическая функция для минимизации погрешности вычисления данного параметра  $a$  во всем диапазоне изменения параметра формы  $\alpha$  была вынужденно разделена на две части.

Авторы статьи [17] не ставили перед собой задачу аппроксимации функции во всем диапазоне возможного изменения нагрузки и ограничились диапазоном  $0,6 \leq \rho \leq 0,9$ . Но даже в этом диапазоне относительная погрешность даже на первом этапе аппроксимации составляет десятки процентов (в нижней части значений нагрузки  $0,6 \leq \rho \leq 0,75$ ), а за пределами этого диапазона ещё больше.

На рис. 10 приведены графики зависимостей относительного среднего времени ожидания (с учетом пересчета по формуле (4)) от нагрузки (с шагом 0,1) при четырёх значениях показателя Хёрста, соответствующие результатам имитационного моделирования (пунктирные линии) и результатам аппроксимации экспоненциальной функцией (5) с численными значениями коэффициентов  $a, b, c$ , приведенными в [17] (сплошные линии).

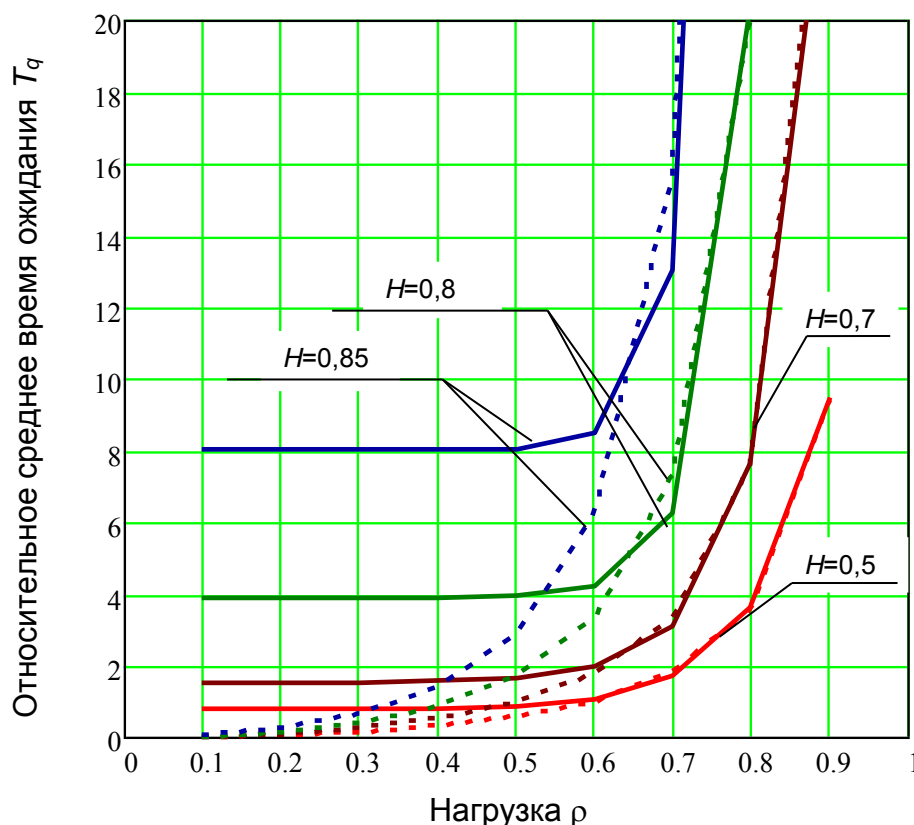


Рис. 10. Сравнение результатов имитационного моделирования и аналитической аппроксимации экспоненциальными функциями

Как видно из рис. 10, только в области больших значений нагрузки ( $\rho=0,8; 0,9$ ) результаты аппроксимации достаточно точно совпадают с результатами имитационного моделирования, как это и заявлено в [17]. Однако уже в средней области значений нагрузки ( $\rho=0,6; 0,7$ ) погрешность заметно возрастает, а в нижней области ( $\rho \leq 0,5$ ) аппроксимация в [17] не выполнялась.

Следует отметить, что во всем диапазоне изменения нагрузки  $\rho \in [0; 1)$  использование экспоненциальных функций (5) для аппроксимации рассматриваемых показателей своевременности принципиально невозможно, поскольку невозможно обеспечить сходимость результатов к известным предельным значениям:  $T_q=0$  при  $\rho=0$  и  $T_q \rightarrow \infty$  при  $\rho \rightarrow 1$ . В принципе первое предельное значение  $T_q=0$  при  $\rho=0$  можно обеспечить в формуле (5), если задать условие  $c = -a$ . Но при этом останется только два варьируемых параметра  $a$  и  $b$ , что в данном случае явно недостаточно для обеспечения необходимой точности аппроксимации. Второе же предельное значение  $T_q \rightarrow \infty$  при  $\rho \rightarrow 1$  никакими сочетаниями фиксированных значений параметров  $a, b, c$  обеспечить нельзя.

Совершенно другой подход к аналитическому моделированию СМО  $P/M/1$  использован в [11, 18]. Для расчета показателей своевременности в указанных источниках предложено использовать известную формулу Поллачека-Хинчина, предназначенную для расчета средней длины очереди  $L$  в СМО  $M/G/1$  (где  $G$  – выходной поток с неизвестным распределением, но с известным коэффициентом вариации  $C_{\text{ВЫХ}}^2$ ), обобщая её до СМО  $G/G/1$  (с неизвестным распределением на входе, но с известным коэффициентом вариации  $C_{\text{ВХ}}^2$ ):

$$L = \frac{\rho^2}{1-\rho} \cdot \frac{C_{\text{ВХ}}^2 + C_{\text{ВЫХ}}^2}{2}. \quad (6)$$

В рассматриваемом случае СМО  $P/M/1$  выходной поток имеет экспоненциальное распределение, для которого  $C_{\text{ВЫХ}}^2=1$  [10]. Коэффициент вариации  $C_{\text{ВХ}}^2 = \sigma^2/m^2$  для входного потока с распределением Парето при  $1 < \alpha < 2$  имеет неопределенное значение, поскольку неопределенное значение (формально отрицательное, а при крайних значениях  $\alpha=1$  и  $\alpha=2$  – бесконечное) имеет дисперсия  $\sigma^2$  [10]:

$$\sigma^2 = \frac{\alpha \cdot k^2}{(\alpha-1)^2 \cdot (\alpha-2)}. \quad (7)$$

Для получения невырожденных результатов расчета по формуле (6) в [18] предложено рассматривать в качестве входного потока ограниченное распределение Парето, у которого случайная величина  $\tau$  не может принимать значения больше некоторого максимального порога  $x$ . В этом случае функция распределения (1) принимает следующий вид:

$$F_0(\tau) = \frac{1 - \left(\frac{k}{\tau}\right)^\alpha}{1 - \left(\frac{k}{x}\right)^\alpha}, \quad 0 < k < x, \alpha > 0. \quad (8)$$

Формула расчета математического ожидания (2) для ограниченного распределения Парето заметно изменяется [11, 18]:

$$m_0 = \frac{\alpha}{\alpha-1} \cdot \frac{x^\alpha \cdot k - x \cdot k^\alpha}{x^\alpha - k^\alpha}. \quad (9)$$

Формулу (9) можно привести к другому виду, который позволяет более наглядно увидеть сходимость  $m_0$  (9) к  $m$  (2) при  $x \rightarrow \infty$ :

$$m_0 = \frac{\alpha \cdot k}{\alpha - 1} \cdot \frac{1 - \left(\frac{k}{x}\right)^{\alpha-1}}{1 - \left(\frac{k}{x}\right)^\alpha} = m \cdot \frac{1 - \left(\frac{k}{x}\right)^{\alpha-1}}{1 - \left(\frac{k}{x}\right)^\alpha}. \quad (10)$$

Формула расчета дисперсии для ограниченного распределения Парето имеет вид [11, 18] (после некоторых упрощающих преобразований):

$$\sigma_0^2 = \frac{\alpha}{2 - \alpha} \cdot \frac{x^2 \cdot k^\alpha - x^\alpha \cdot k^2}{x^\alpha - k^\alpha} - m_0^2. \quad (11)$$

Коэффициент вариации  $C_0^2$  для ограниченного распределения Парето с учетом (9) и (11) рассчитывается по формуле:

$$C_0^2 = \frac{\sigma_0^2}{m_0^2} = \frac{(\alpha - 1)^2}{\alpha \cdot (2 - \alpha)} \cdot \frac{(x^2 \cdot k^\alpha - x^\alpha \cdot k^2) \cdot (x^\alpha - k^\alpha)}{(x^\alpha \cdot k - x \cdot k^\alpha)^2} - 1. \quad (12)$$

При  $x \rightarrow \infty$  дисперсия  $\sigma_0^2$  (11), коэффициент вариации  $C_0^2$  (12) и средняя длина очереди  $L$  (6) стремятся к бесконечности при любых значениях  $\rho$  и  $\alpha(H)$ , но при конечных значениях верхнего предела  $x$  результаты расчета указанных параметров являются невырожденными и их можно сравнить с результатами имитационного моделирования.

Заметим, что среднюю длину очереди  $L$  несложно пересчитать в относительное среднее время ожидания  $T_q$  по формуле [10]:

$$T_q = \frac{L}{\rho}. \quad (13)$$

С учетом приведенных формул (6)-(13) итоговая формула расчета относительного среднего времени ожидания для СМО  $P/M/1$  с входным потоком, описываемым ограниченным распределением Парето (на основании [18]), будет иметь вид:

$$T_{q_0} = \frac{\rho}{1 - \rho} \cdot \frac{C_0^2 + 1}{2} = \frac{\rho}{1 - \rho} \cdot \frac{(\alpha - 1)^2}{2 \cdot \alpha \cdot (2 - \alpha)} \cdot \frac{(x^2 \cdot k^\alpha - x^\alpha \cdot k^2) \cdot (x^\alpha - k^\alpha)}{(x^\alpha \cdot k - x \cdot k^\alpha)^2}. \quad (14)$$

Как отмечается в [11], достоинством описанной выше аналитической модели СМО  $P/M/1$  является возможность интерпретации пределов области определения  $k$  и  $x$  как минимально возможного времени ( $k$ ) между приходами пакетов на вход устройства коммутации и максимально возможного интервала ( $x$ ) между приходами пакетов, на основании которого не принимается решение о нарушении соединения. Однако такое прикладное (субъективное) толкование формальных параметров ограниченного распределения Парето не позволяет выполнить объективное сравнение с результатами имитационного моделирования, приведенными в настоящей работе и в [17].

Заметим, что при выполнении имитационного моделирования СМО  $P/M/1$  на компьютерах с конечной точностью вычислений и хранения данных фактически, как раз, и используется ограниченное распределение Парето. Как показано в [19], конечность численного представления данных в компьютере не позволяет генерировать псевдослучайные числа  $u$  с равномерным распределением меньше некоторой величины  $y_{\min} = \varepsilon$ , в результате чего соответствующие случай-

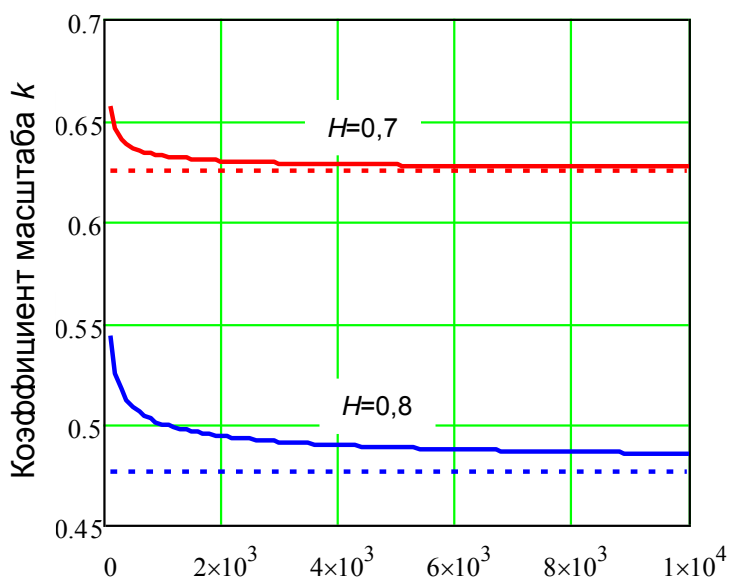


ные числа  $\tau$  с распределением Парето не могут быть больше некоторой величины  $x=k\varepsilon^{-1/\alpha}$ . В то же время, как показали численные эксперименты [19], даже при не очень высокой точности  $\varepsilon < 0,001$  ( $x \approx 316$  при  $k=1$  и  $\alpha=1,2$ ) результаты имитационного моделирования в рабочей области значений нагрузки и показателя Хёрста получаются достаточно устойчивыми и точными, несущественно отличаясь от результатов при меньших значениях  $\varepsilon \rightarrow 0$  и, соответственно, больших значениях  $x \rightarrow \infty$ .

Отмеченная слабая чувствительность результатов имитационного моделирования к конкретным значениям верхнего предела  $x$  генерируемых случайных интервалов времени между входными заявками противоречит высокой чувствительности результатов вычислений по формуле (14) к величине данного параметра (можно показать, что с ростом  $x$  значение  $T_{q0}$  увеличивается пропорционально  $x^{2-\alpha}$ ).

С другой стороны, несмотря на некоторое противоречие физическому смыслу, можно рассматривать формулу (14) как вариант аппроксимации результатов имитационного моделирования аналитическим выражением с одним настраиваемым параметром  $x$ , подбирая величину которого можно попытаться обеспечить приемлемое совпадение результатов расчета.

Однако использование формулы (14) в качестве аналитической модели результатов расчета показателя своевременности  $T_{q0}$  при заданной нагрузке  $\rho$  требует дополнительного согласования этой нагрузки с величиной коэффициента масштаба  $k$ . К сожалению, воспользоваться для этого формулой (3) без внесения погрешностей в расчеты не представляется возможным, так как математическое ожидание случайной величины с ограниченным распределением Парето  $m_0$  зависит от  $k$  более сложным образом (9), включая дополнительную зависимость от  $x$ .



Верхняя граница  $x$  ограниченного распределения Парето

Рис. 11. Зависимости коэффициента масштаба  $k$  от величины верхней границы  $x$  ограниченного распределения Парето

Выделить обратную зависимость  $k(m_0, x, \alpha)$  из нелинейного уравнения (9) не удалось. Но удалось получить численное решение с помощью процедуры  $\text{root}(F(k), k)$  в среде MathCad. На рис. 11 приведены примеры рассчитанных с помощью указанной процедуры графиков зависимости коэффициента масштаба  $k$  (непрерывные линии) от величины верхней границы  $x$  ограниченного распределения Парето при  $\rho=0,6$  при двух значениях показателя Хёрста  $H=0,7$  и  $H=0,8$ . Пунктирными линиями показаны предельные значения коэффициента  $k$  при  $x \rightarrow \infty$ , рассчитанные по формуле (2).

На рис. 12 приведены графики зависимостей относительного среднего времени ожидания  $T_q$  от нагрузки  $\rho$ , рассчитанные по формуле (14) (непрерывные линии) при тех же четырёх значениях показателя Хёрста, как на рис. 10, вместе с прежними результатами имитационного моделирования (пунктирные линии). Значения параметров  $x$  для каждой функциональной зависимости подбирались вручную, добиваясь совпадения с результатами имитационного моделирования в одной точке в области значений нагрузки  $0,6 \dots 0,8$ . Приведенные графики соответствуют подобранным значениям параметра  $x \in \{20; 80; 150; 200\}$  для каждого значения показателя Хёрста  $H \in \{0,5; 0,7; 0,8; 0,85\}$ .

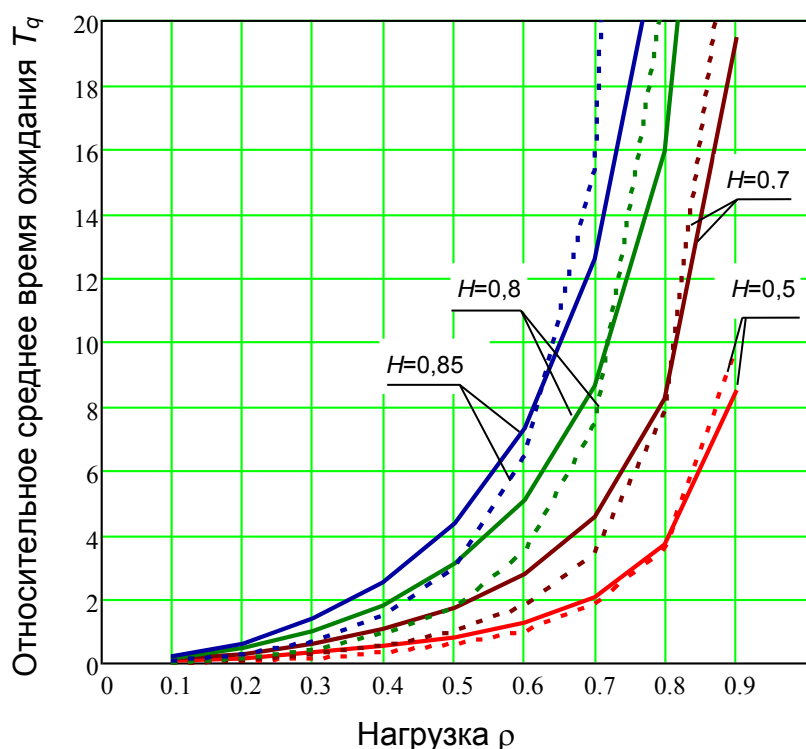


Рис. 12. Сравнение результатов имитационного моделирования и аналитической аппроксимации функцией Поллачека-Хинчина

Как видно из рис. 12, аппроксимация результатов имитационного моделирования функцией Поллачека-Хинчина обеспечивает невысокую точность в подавляющей области значений нагрузки, кроме области малых значений (близких к 0) и области средней нагрузки (или любой другой), в которой контролировалось точное совпадение в одной точке при подборе соответствующего значе-

ния единственного параметра аппроксимации  $x$ . В то же время данная аппроксимация позволяет получить относительно равномерное приближение к истинной зависимости во всей области возможных значений нагрузки  $\rho \in [0; 1)$ .

Достоинством аналитической аппроксимации с помощью формулы (14) является непосредственный учет показателя Хёрста  $H$  (через параметр  $\alpha$ ). Однако из-за выявленной сильной зависимости результатов расчета от величины параметра  $x$ , оптимальные значения которого зависят от показателя Хёрста, для обеспечения возможности использования данной формулы во всем возможном диапазоне значений  $H \in [0,5; 1)$  требуется проведение дополнительных исследований и поиск аналитической зависимости  $x(H)$  на втором этапе аппроксимации. В рамках настоящей работы указанные исследования не проводились, поскольку был найден другой более точный способ аппроксимации, рассмотренный далее.

### Предлагаемый способ аппроксимации результатов имитационного моделирования в зависимости от нагрузки $\rho$ при различных фиксированных значениях показателя Хёрста $H$

Кроме формулы Поллачека-Хинчина для представления функциональных зависимостей различных показателей качества обслуживания от параметров трафика и используемых сетевых механизмов используются многие другие приближённые или точные (для определённых условий) аналитические выражения [10-12]. Для условий поступления на вход устройств коммутации самоподобного трафика наиболее известной является формула расчета средней длины очереди, полученная Норросом [9] на основе представления самоподобного трафика моделью фрактального броуновского движения *FBM*. Различные варианты интерпретации данной формулы с пересчетом к различным показателям своевременности для СМО *FBM/M/1* и *FBM/D/1* приведены в [1, 2, 10-12]. Модификация указанной формулы для расчета относительного среднего времени задержки  $T_q$  в зависимости от нагрузки  $\rho$  и показателя Хёрста  $H$  имеет вид [7]:

$$T_q = \frac{c \cdot \rho^{\frac{1}{2(1-H)}}}{(1-\rho)^{1-H}}, \quad (15)$$

где  $c$  – дополнительный параметр, который принимает значение  $c=1$  для *FBM/M/1* и  $c=0,5$  для *FBM/D/1*.

В случае  $H=0,5$  (т.е. при отсутствии свойства самоподобия у входного трафика) формула (15) превращается в известную формулу для СМО *M/M/1* и *M/D/1*:

$$T_q = \frac{c \cdot \rho}{1-\rho}. \quad (16)$$

Отмеченное выше превращение формулы (15) в (16) за счет её чувствительности к показателю Хёрста подсказывает возможность использования подобных функциональных зависимостей для различных СМО, включая рассматриваемую в настоящей работе модель *P/M/1*. В итоге для аппроксимации функциональных зависимостей относительного среднего времени ожидания  $T_q$

от нагрузки  $\rho$  при различных значениях показателя Хёрста  $H$  предлагается использовать следующую формулу в виде отношения двух показательных функций:

$$T_{q \text{ ам}} = \frac{c \cdot \rho^a}{(1 - \rho)^b}, \quad (17)$$

где  $a, b, c$  – параметры аппроксимирующей функции, зависящие (в общем случае) от значения показателя Хёрста.

Следует отметить универсальность предложенной функциональной зависимости (17), которая при определенных значениях параметров  $a, b, c$  превращается во многие известные формулы, применяемые в определенных условиях. В частности, при задании параметра  $c$  таким же, как в формулах (15) и (16), и при задании других параметров  $a=1/(2(1-H))$  и  $b=H/(1-H)$  формула (17) превращается в (15), а при  $a=1$  и  $b=1$  – в формулу (16). Если же задать  $c=(C_0^2+1)/2$  и  $a=1$  и  $b=1$ , то формула (17) превратится в формулу (14).

Учитывая достаточно высокую точность (маленький разброс) результатов имитационного моделирования и поставленную цель аппроксимации искомой зависимости во всей области определения, было принято решение отказаться от подбора значений параметров  $a, b, c$  по критерию минимума СКО. Тем более, что готовых процедур аппроксимации показательными функциями вида (17) в среде MathCad нет, а разрабатывать собственную вычислительную процедуру довольно сложно. Оказалось, проще воспользоваться способом аппроксимации заданной (полученной при имитационном моделировании) статистической зависимости  $T_{q \text{ им}}(\rho, H)$  некоторой аналитической функцией  $T_{q \text{ ам}}(\rho, H)$  методом интерполяции, гарантирующим точное совпадение результатов расчета в некотором ограниченном числе точек. В случае удачной формы (вида) аппроксимирующей функции достаточно точное совпадение результатов расчета может быть обеспечено автоматически и в остальных точках, даже в тех, для которых первоначально не были получены результаты имитационного моделирования  $T_{q \text{ им}}(\rho, H)$ .

Очевидно, при наличии трех варьируемых параметров  $a, b, c$  аппроксимирующей функции  $T_{q \text{ ам}}(\rho, H)$  можно обеспечить её совпадение со статистической зависимостью  $T_{q \text{ им}}(\rho, H)$  в трех выбранных точках интерполяции  $\{(T_{q1}, \rho_1), (T_{q2}, \rho_2), (T_{q3}, \rho_3)\}$  (разных для каждого перебираемого значения показателя Хёрста  $H$ ). Кроме того, подходящий вид функциональной зависимости (17) от  $\rho$  независимо от значений параметров  $a, b, c$  (невырожденных) обеспечивает совпадение результатов еще в двух точках:  $T_q=0$  при  $\rho=0$  и  $T_q \rightarrow \infty$  при  $\rho \rightarrow 1$  (асимптотически).

При реализации предлагаемого способа аппроксимации неясным является выбор трех конкретных точек интерполяции  $\{(T_{q1}, \rho_1), (T_{q2}, \rho_2), (T_{q3}, \rho_3)\}$  (при каждом значении  $H$ ). Можно показать, что при удачном выборе аппроксимирующей функции, достаточно точно совпадающей с некоторой неизвестной функцией  $T_q(\rho, H)$ , приближенной (но достаточно точной) оценкой которой является статистическая зависимость  $T_{q \text{ им}}(\rho, H)$ , не имеет значения, какие именно точки интерполяции будут выбраны. Однако, из-за наличия всё-таки некоторого раз-

броса результатов имитационного моделирования и отсутствия уверенности в действительно удачном выборе вида аппроксимирующей функции выбор конкретных точек интерполяции в некоторой степени будет влиять на итоговую аппроксимирующую функцию  $T_{q\text{ ам}}(\rho, H)$  и на точность её совпадения с  $T_{q\text{ им}}(\rho, H)$ .

В настоящей работе было принято субъективное решение – выбирать точки интерполяции в средней части контролируемой области изменения исходных данных и результатов расчета в незакрашенных клетках таблицы 2, попавших на рис.9, дискретно отслеживая изгиб каждой линии: одна точка до изгиба на уровне  $T_q \approx 1$ , другая – на изгибе на уровне  $T_q \approx 4$  и третья – после изгиба на уровне  $T_q \approx 16$ .

На основании условия совпадения функции  $T_{q\text{ им}}(\rho, H)$  и функции  $T_{q\text{ ам}}(\rho, H)$  (17) в указанных трех точках для каждого фиксированного значения  $H$  (для каждого столбца таблицы 2 и, соответственно, каждой линии на рис. 9) можно составить систему трех нелинейных уравнений с тремя неизвестными параметрами  $a, b, c$ , решив которую можно определить эти параметры и затем использовать выражение (17) для расчета относительного среднего времени ожидания  $T_q$  в СМО типа  $P/M/1$  при любом значении нагрузки  $\rho \in [0; 1)$  и учтенном (при расчете  $a, b, c$ ) показателе Хёрста  $H$ .

Благодаря удачному виду функции (17), систему трех нелинейных уравнений относительно искомым переменных  $a, b, c$  можно свести к системе линейных уравнений следующим образом.

Прологарифмируем обе части равенства (17):

$$\ln(T_{q\text{ ам}}) = \ln\left(\frac{c \cdot \rho^a}{(1-\rho)^b}\right). \quad (18)$$

После очевидных алгебраических преобразований из (18) получим:

$$a \cdot \ln(\rho) + b \cdot (-\ln(1-\rho)) + \ln(c) = \ln(T_{q\text{ ам}}). \quad (19)$$

Переобозначим искомые переменные:

$$x_1 = a, \quad x_2 = b, \quad x_3 = \ln(c). \quad (20)$$

Учтем заданные значения аргументов  $\{\rho_i\}$  и функции  $\{T_{q\text{ ам}i}\} = \{T_{q\text{ им}i}\}$  в трех точках в  $i=1 \dots 3$ , следующих обозначениях постоянных параметров:

$$a_{i1} = \ln(\rho_i), \quad a_{i2} = -\ln(1-\rho_i), \quad a_{i3} = 1, \quad b_i = \ln(T_{q\text{ ам}i}), \quad i = \overline{1,3}. \quad (21)$$

В итоге из (21) получим систему трех линейных уравнений с тремя неизвестными:

$$x_1 a_{i1} + x_2 a_{i2} + x_3 a_{i3} = b_i, \quad i = \overline{1,3}. \quad (22)$$

Решив систему уравнений (22) найдем значения переменных  $(x_1, x_2, x_3)$ , а затем, используя обратное преобразование относительно (20), найдем искомые параметры:

$$a = x_1, \quad b = x_2, \quad c = \exp(x_3). \quad (23)$$

Так как для аппроксимации каждой линии на рис. 9 описанным выше способом необходимы только три точки интерполяции, то при подготовке исходных данных с помощью имитационного моделирования необязательно полностью заполнять каждую колонку таблицы 2 (во всем диапазоне изменения

нагрузки  $\rho$  с выбранным шагом 0,05). Можно вообще использовать другие три точки, не попавшие в таблицу, уделив им повышенное внимание, например, задавая больший объем выборки для повышения точности расчетов. Именно таким образом задавались исходные данные о точках интерполяции, представленные в таблице 3.

На рис. 13 приведены графические результаты аналитического моделирования, полученные на первом этапе аппроксимации по формуле (17) с найденными параметрами аппроксимации (таблица 3) для каждого фиксированного значения показателя Хёрста. Визуально графики на рис. 13, полученные с помощью аналитической модели, практически не отличаются от графиков на рис. 9, полученных с помощью имитационной модели.

Сравнительный количественный анализ показал, что отличие результатов в пределах области охваченной на рис. 9 и рис. 13 не превышает десятых долей, т.е. находятся в пределах статистического разброса результатов имитационного моделирования (таблица 2).

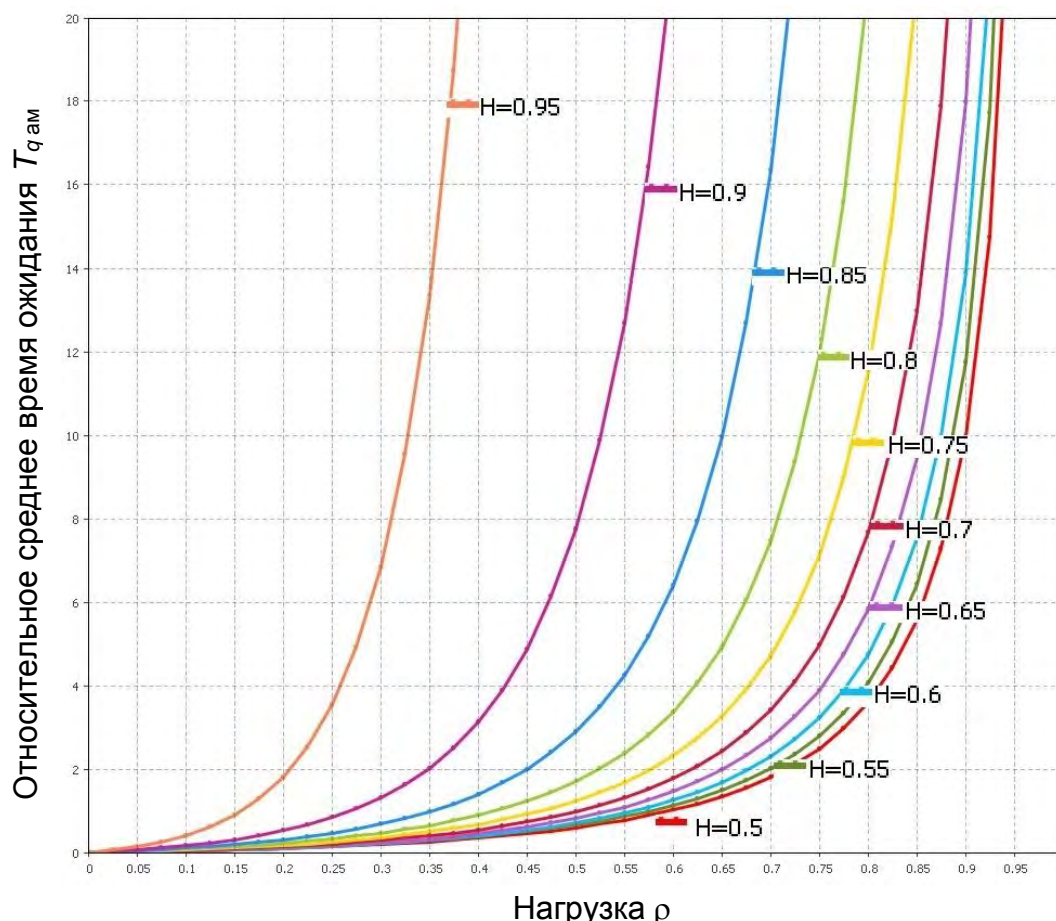


Рис. 13. Графические результаты аналитического моделирования, полученные на первом этапе аппроксимации при фиксированных значениях показателя Хёрста

Таблица 3 – Параметры аппроксимации для различных значений  $H$

Показатель Хёрста	0,5	0,55	0,6	0,65	0,7	0,75	0,8	0,85	0,9	0,95	
Точки интерполяции	$\rho_1$	0,6	0,59	0,56	0,54	0,51	0,47	0,42	0,36	0,27	0,16
	$T_{q\text{ им}1}$	1,018	1,056	1,000	1,036	1,033	1,026	1,020	1,047	0,999	1,041
	$\rho_2$	0,81	0,8	0,78	0,75	0,72	0,68	0,62	0,54	0,43	0,26
	$T_{q\text{ им}2}$	3,909	4,104	4,087	3,875	3,973	4,008	3,955	3,934	4,085	4,082
	$\rho_3$	0,93	0,92	0,91	0,89	0,86	0,83	0,78	0,70	0,57	0,36
	$T_{q\text{ им}3}$	16,123	15,791	16,301	16,069	14,801	15,835	16,688	16,283	15,618	15,130
Параметры аппроксимации	$a$	1,446	1,335	1,506	1,534	1,389	1,259	1,104	1,050	1,031	1,014
	$b$	1,225	1,303	1,293	1,364	1,536	1,789	2,170	2,703	3,733	6,883
	$c$	0,691	0,673	0,828	0,914	0,883	0,857	0,812	0,918	1,192	1,995

Для более наглядного сравнения на рис. 14 приведены наложенные графики зависимостей, рассчитанных с помощью имитационного и аналитического моделирования для четырёх значений показателя Хёрста таких же, как на рис. 10 и 12, а также еще одного пятого значения, причем в расширенном диапазоне результатов расчета до величины  $T_q=100$ .

Как видно из рис. 14, не смотря на выбор точек интерполяции в области значений  $T_q < 20$ , результаты имитационного и аналитического моделирования достаточно точно совпадают и в расширенной области  $T_q < 100$ , что свидетельствует об удачном выборе аппроксимирующей функции (17).

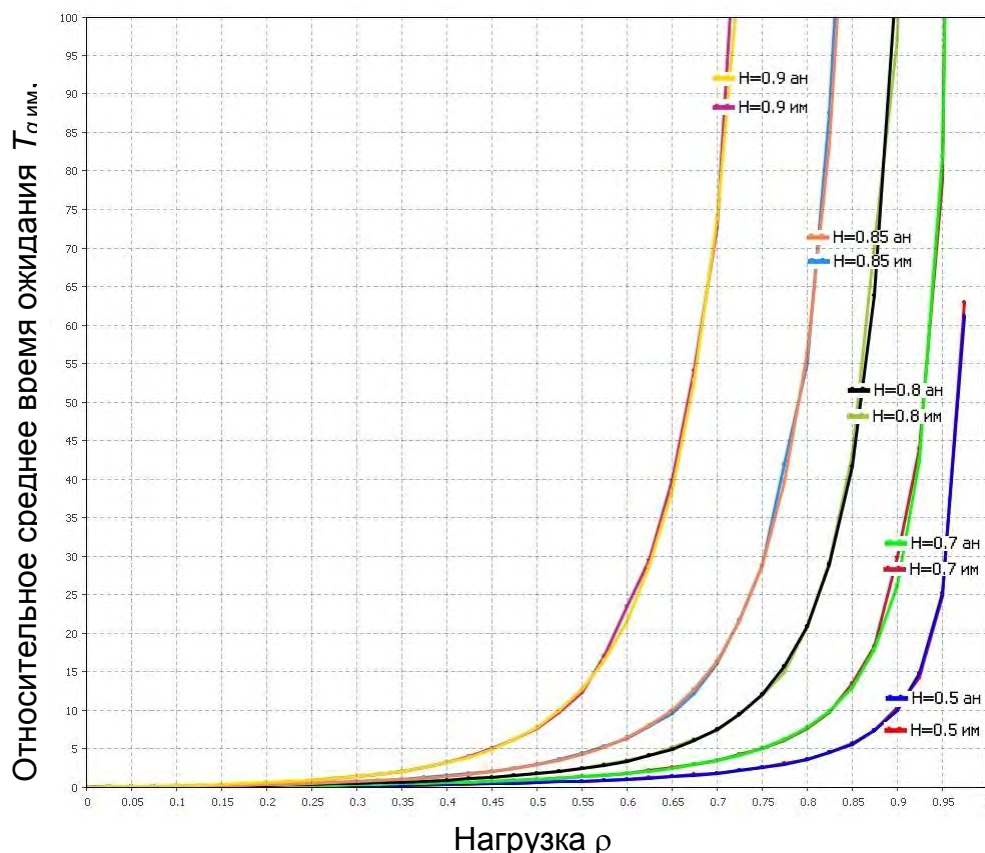


Рис. 14. Сравнение результатов имитационного моделирования  $T_{q\text{ им}}$  (в подписях: «...им») и предлагаемой аналитической аппроксимации  $T_{q\text{ ам}}$  (в подписях: «...ан») при фиксированных значениях показателя Хёрста  $H$

### Аппроксимация результатов имитационного моделирования в зависимости от нагрузки $\rho$ и от показателя Хёрста $H$

Полученные результаты аппроксимации результатов имитационного моделирования с помощью формулы (17) и параметров аппроксимации, приведенных в таблице 3, являются достаточными, чтобы выступать в роли аналитической модели, позволяющей вычислять показатели своевременности обслуживания мультимедийного трафика с распределением Парето во всем диапазоне возможных значений нагрузки и показателя Хёрста.

Но если значения нагрузки могут задаваться действительно любыми в области  $\rho \in [0; 1)$ , то значения показателя Хёрста  $H$  могут задаваться только дискретными в интервале от 0,5 до 0,95 с шагом 0,05. При этом для каждого дискретного значения показателя Хёрста надо подставлять в формулу (17) свой набор параметров  $a$ ,  $b$ ,  $c$  из таблицы 3, что, конечно, неудобно.

Для того, чтобы можно было выполнять расчеты для произвольных (а не дискретных) значений показателя Хёрста необходимо выполнить еще одну аппроксимацию – табличной зависимости параметров аппроксимации  $a$ ,  $b$ ,  $c$  от показателя Хёрста, представленную графически на рис. 15.

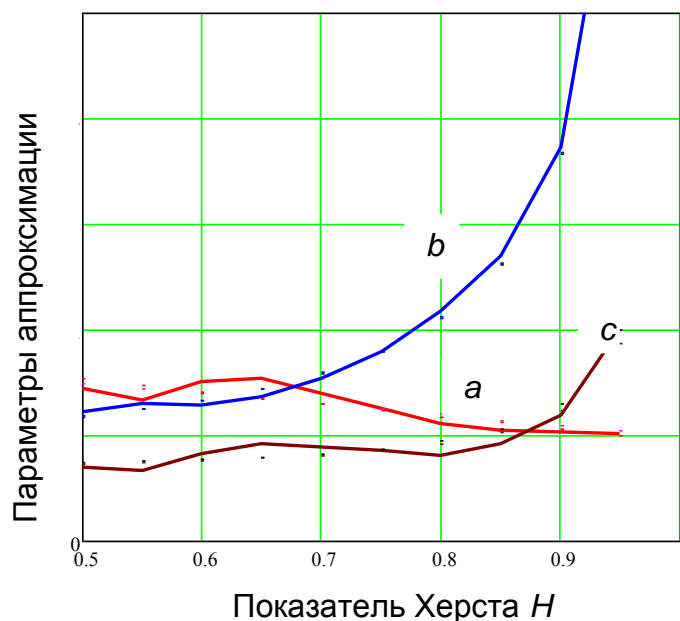


Рис. 15. Графическое представление табличной зависимости параметров аппроксимации  $a$ ,  $b$ ,  $c$  от показателя Хёрста  $H$

По внешнему виду графиков на рис. 15 сложно определить функции, наиболее подходящие для их аппроксимации. По аналогии с вторым этапом аппроксимации в [17] можно было бы предположить возможность использования экспоненциальных функций для аппроксимации зависимостей  $b(H)$  и  $c(H)$ , а для зависимости  $a(H)$  использовать логистическую функцию.

Однако внешний вид функции (15), выступившей в роли прототипа на первом этапе аппроксимации, подсказывает возможность использования других более простых функциональных зависимостей на основе дробно-рациональных или, более точно, дробно-линейных функций:



$$F(H) = \frac{d + e \cdot H}{f + g \cdot H}, \quad (24)$$

где  $d, e, f, g$  – некоторые вещественные числа (коэффициенты).

Например, функциональную зависимость параметров  $a, b, c$  от  $H$ , соответствующую формуле (15) (используемой для FBM/M/1), можно представить в виде (24) при задании следующих значений коэффициентов  $d, e, f, g$ :

$$\begin{aligned} a(H) &= \frac{1 + 0 \cdot H}{2 + (-2) \cdot H}, & d = 1, e = 0, f = 2, g = -2, \\ b(H) &= \frac{0 + 1 \cdot H}{1 + (-1) \cdot H}, & d = 0, e = 1, f = 1, g = -1, \\ c(H) &= \frac{1 + 0 \cdot H}{1 + 0 \cdot H}, & d = 1, e = 0, f = 1, g = 0. \end{aligned} \quad (25)$$

На основании внешнего вида графиков на рис. 15 были выбраны следующие варианты частично заданных коэффициентов  $d, e, f, g$  для аппроксимации функциональных зависимостей  $a(H), b(H), c(H)$ :

$$\begin{aligned} a(H) &= \frac{d_a + e_a \cdot H}{1 + 0 \cdot H} = d_a + e_a \cdot H, & d_a > 0, e_a < 0, f_a = 1, g_a = 0, \\ b(H) &= \frac{d_b + e_b \cdot H}{1 + (-1) \cdot H} = \frac{d_b + e_b \cdot H}{1 - H}, & d_b > 0, e_b < 0, f_b = 1, g_b = -1, \\ c(H) &= \frac{d_c + e_c \cdot H}{1 + (-1) \cdot H} = \frac{d_c + e_c \cdot H}{1 - H}, & d_c > 0, e_c < 0, f_c = 1, g_c = -1. \end{aligned} \quad (26)$$

Из выражений (26) следует, что для каждой искомой функциональной зависимости  $a(H), b(H), c(H)$  достаточно определить по два параметра (коэффициента)  $(d_a, e_a), (d_b, e_b), (d_c, e_c)$ .

Как видно из формул (26), первая функция  $a(H)$  фактически включает только числитель дробно-линейной зависимости (24), т.е. является обычной линейной функцией. Следовательно, задача вычисления коэффициентов  $(d_a, e_a)$  по критерию минимума СКО функции  $a(H)$  от табличных значений  $\{a_i(H_i)\}$ ,  $i=1 \dots 10$  (см. таблицу 3), является стандартной задачей линейной аппроксимации, для решения которой в среде MathCad есть встроенная процедура `line(vx, vy)`.

Остальные две функции  $b(H), c(H)$  являются нелинейными – гиперболическими, для которых в среде MathCad нет встроенных процедур вычисления параметров аппроксимации. Однако отсутствие искомых коэффициентов в знаменателе позволяет свести данные нелинейные функции к линейным следующим образом.

Пусть необходимо найти коэффициенты аппроксимации  $d$  и  $e$  для следующей дробно-линейной функции:

$$F(H) = \frac{d + e \cdot H}{1 - H}. \quad (27)$$

Умножая обе части уравнения (27) на  $(1-H)$  получаем новую функцию

$$Z(H) = F(H) \cdot (1 - H), \quad (28)$$

которая, с одной стороны, линейно зависит от  $H$ :

$$Z(H) = d + e \cdot H, \quad (29)$$

а с другой стороны, может быть представлена табличными значениями  $Z_i(H_i) = F_i \cdot (1 - H_i)$ ,  $i = 1 \dots 10$ . Решая задачу линейной аппроксимации табличных значений  $Z_i(H_i)$  уравнением (29) описанным выше стандартным способом, получаем искомые значения коэффициентов  $d$  и  $e$ .

В результате вычисления коэффициентов  $(d_a, e_a)$ ,  $(d_b, e_b)$ ,  $(d_c, e_c)$  описанным выше способом получаем функции  $a(H)$ ,  $b(H)$ ,  $c(H)$  в следующем виде:

$$\begin{aligned} a(H) &= d_a + e_a \cdot H = 2,121 - 1,178 \cdot H, \\ b(H) &= \frac{d_b + e_b \cdot H}{1 - H} = \frac{0,871 - 0,559 \cdot H}{1 - H}, \\ c(H) &= \frac{d_c + e_c \cdot H}{1 - H} = \frac{0,668 - 0,605 \cdot H}{1 - H}. \end{aligned} \quad (30)$$

На рис. 16 представлены результаты аппроксимации табличных зависимостей параметров  $a$ ,  $b$ ,  $c$  от показателя Хёрста (непрерывные линии) аналитическими зависимостями (30) (пунктирные линии).

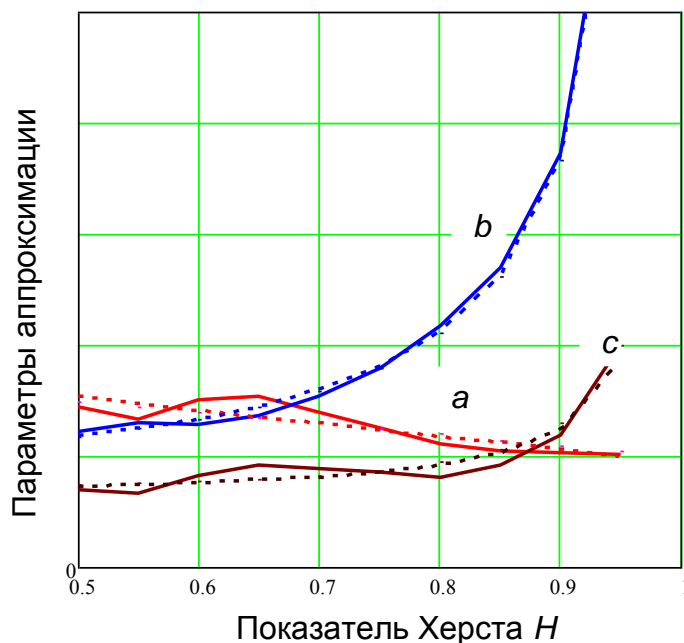


Рис. 16. Аппроксимация табличных зависимостей параметров  $a$ ,  $b$ ,  $c$  от показателя Хёрста  $H$  (непрерывные линии) найденными аналитическими зависимостями (пунктирные линии)

О качестве аппроксимации зависимости параметров  $a$ ,  $b$ ,  $c$  от показателя Хёрста  $H$  следует судить не столько по графику на рис. 16, сколько по графикам итоговой зависимости рассматриваемого показателя своевременности  $T_{q \text{ ам}}$  от нагрузки  $\rho$  и показателя Хёрста  $H$  на рис. 17 и 18.

На рис. 17 представлены графические результаты аналитического моделирования, полученные на втором этапе аппроксимации с использованием найденных зависимостей параметров аппроксимации от показателя Хёрста. Визуально графики на рис. 17, полученные с помощью итоговой аналитической

модели, практически не отличаются от графиков на рис. 13, полученных с помощью аналитической модели на первом этапе, и от графиков на рис.9, полученных с помощью имитационной модели.

Сравнительный количественный анализ показал, что отличие результатов в пределах области охваченной на рис. 9, 13 и 17 не превышают десятых долей, т.е. находятся в пределах статистического разброса результатов имитационного моделирования (таблица 2).

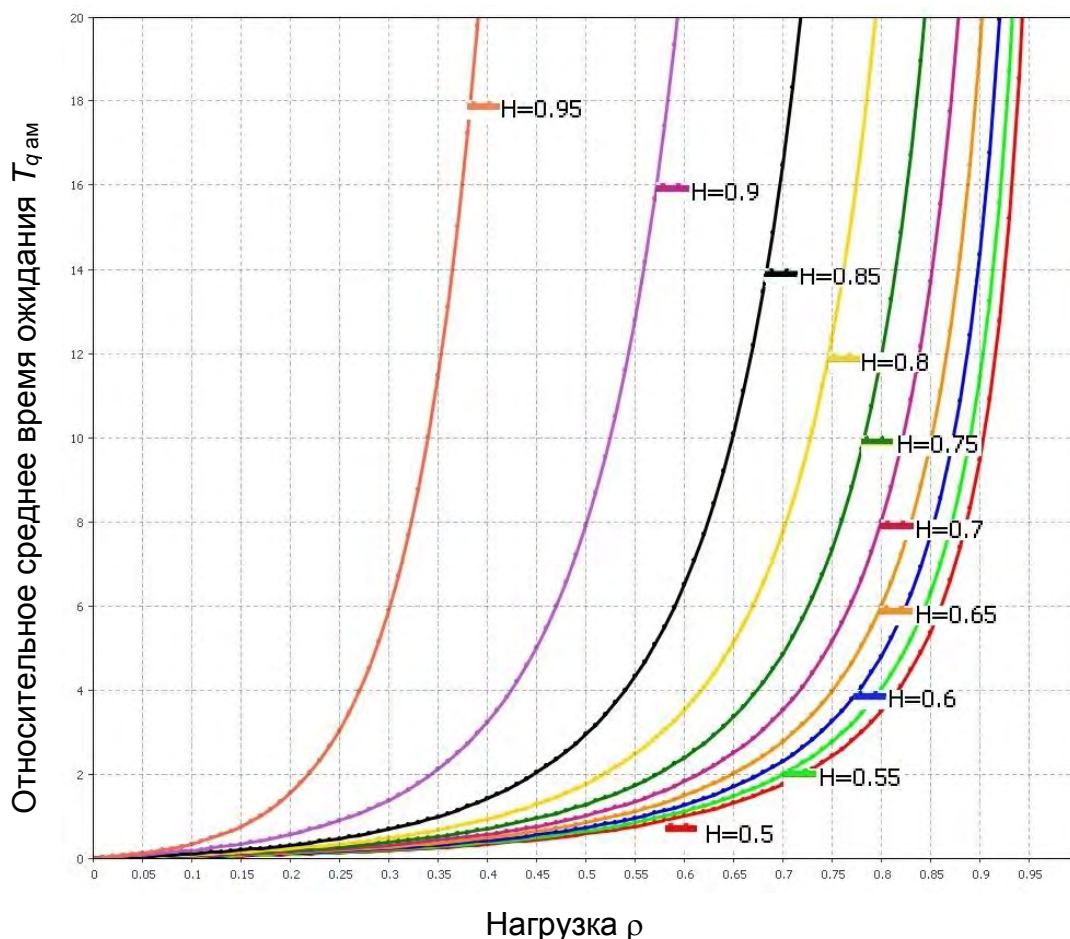


Рис. 17. Графические результаты аналитического моделирования, полученные с использованием найденных зависимостей параметров аппроксимации от показателя Хёрста

Для более наглядного сравнения на рис. 18 приведены наложенные графики рассчитанных зависимостей, построенных путем имитационного и аналитического моделирования на втором этапе для пяти значений показателя Хёрста таких же, как на рис. 14, в расширенном диапазоне результатов расчета до величины  $T_q=100$ . Как и на рис. 14, результаты имитационного и аналитического моделирования достаточно точно совпадают, что свидетельствует об удачном выборе аппроксимирующих функций (30).

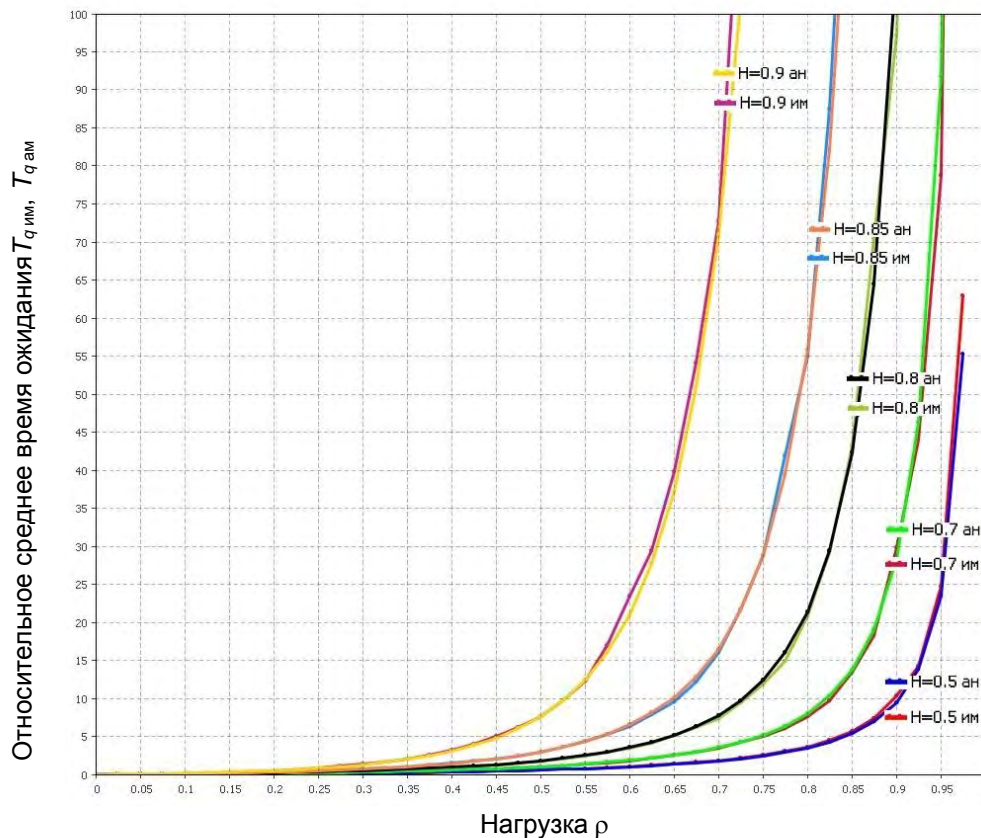


Рис. 18. Сравнение результатов имитационного моделирования с результатами аналитического моделирования с использованием найденных зависимостей параметров аппроксимации от показателя Хёрста

Достаточно высокая точность полученных результатов аналитической аппроксимации, избыточная для практического использования, с одной стороны, и некоторое неудобство практического использования формул (30) с шестью четырёхразрядными числами (коэффициентами), с другой стороны, подсказывает возможность упрощения (огрубления) указанных формул за счет сокращения значащих цифр в используемых числах и несколько иного представления данных чисел. В результате проведенных вычислительных экспериментов был предложен следующий компромиссный (между точностью и громоздкостью) вид итоговой (упрощенной) формулы расчета относительного среднего времени задержки  $T_{q\text{ ам}}$  в устройстве коммутации представляемом моделью  $P/M/1$  при известных значениях нагрузки  $\rho$  и показателя Хёрста  $H$  входного трафика с распределением Парето:

$$T_{q\text{ ам}} = \frac{(6,7 - 6H) \cdot \rho^{2-H}}{10 \cdot (1 - H) \cdot (1 - \rho)^{10(1-H)} \cdot \frac{8,7 - 5,6H}{10(1-H)}} \quad (31)$$

На рис. 19 и 20 приведены графики, аналогичные графикам на рис.17 и 18, но построенные с использованием упрощенной аналитической модели (29). Как видно из сравнения графиков на рис. 17 и 19, а также на рис. 18 и 20 визуально они почти не отличаются. Заметно лишь небольшое смещение графиков при очень больших значениях показателя Хёрста  $H > 0,85$ , что для практики несущественно.

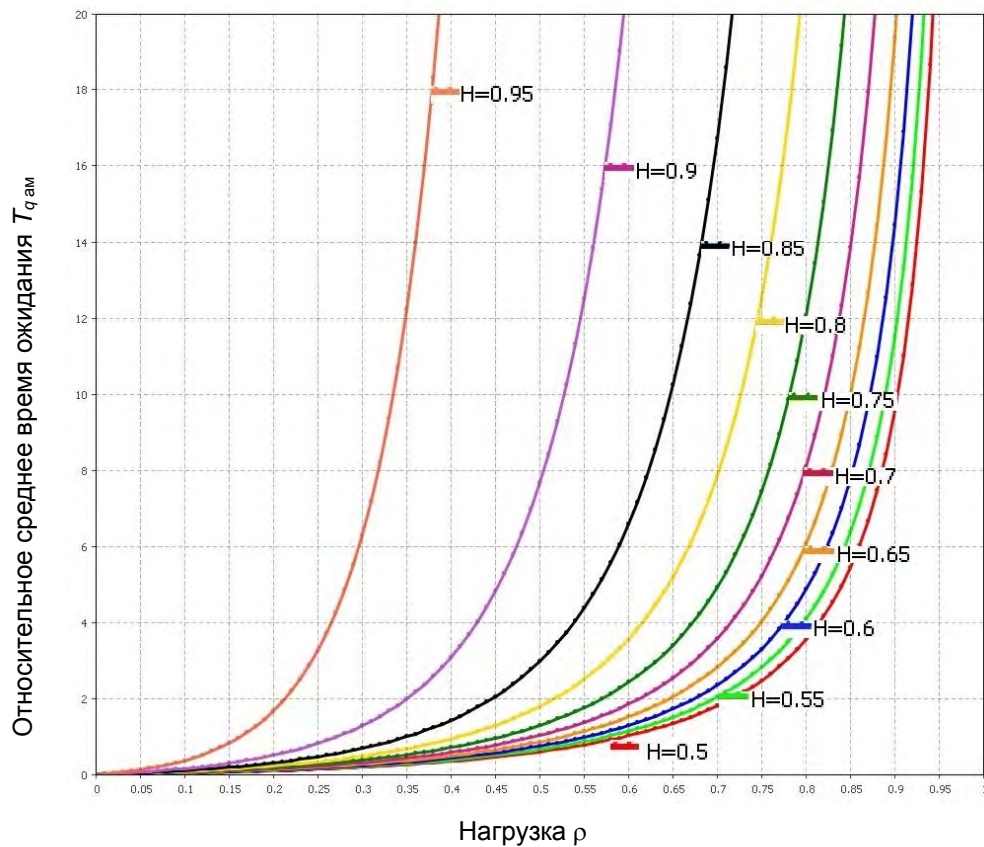


Рис. 19. Графические результаты аналитического моделирования, полученные с использованием упрощенной формулы

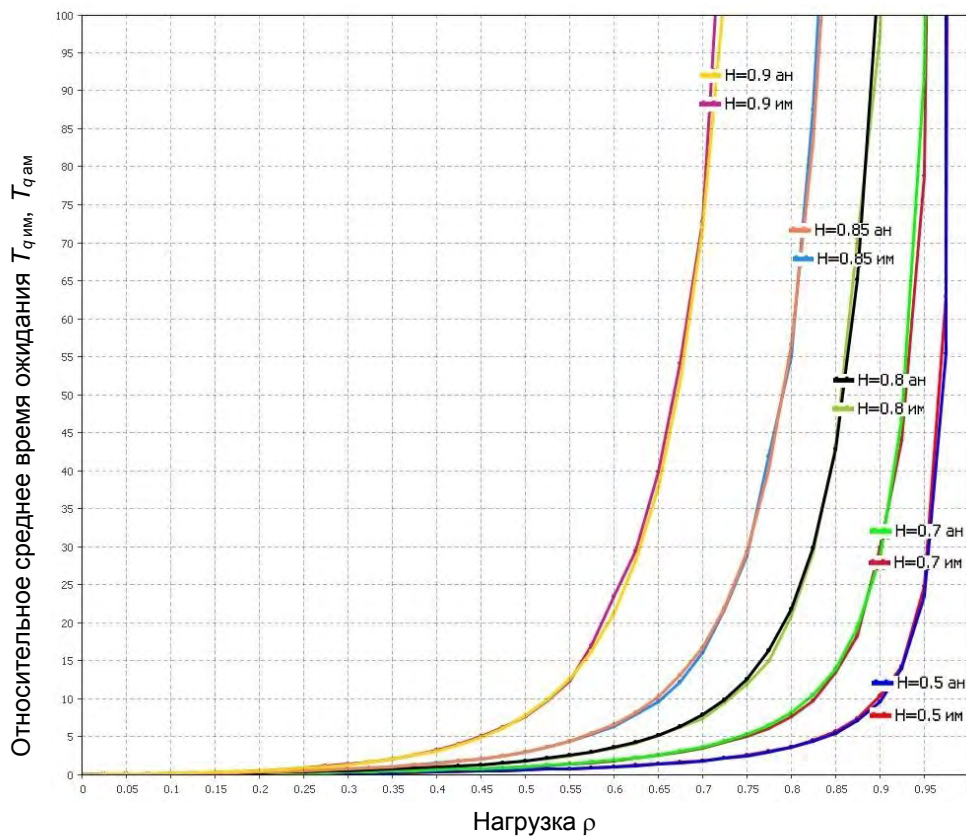


Рис. 20. Сравнение результатов имитационного моделирования с результатами аналитического моделирования с использованием упрощенной формулы

## Выводы

Проведенные исследования показали, что в настоящее время отсутствуют аналитические модели обслуживания мультимедийного трафика с распределением Парето, позволяющие оперативно и достаточно точно оценивать ожидаемые показатели качества при выборе и настройке механизмов обеспечения качества обслуживания трафика с контролируруемыми параметрами нагрузки и степени самоподобия во всем диапазоне их возможных значений.

В настоящей работе была поставлена и достигнута цель разработки аналитической модели обслуживания мультимедийного трафика с распределением Парето, позволяющей рассчитывать показатели своевременности обслуживания трафика в сетевом устройстве коммутации с помощью аналитических выражений, полученных на основе аппроксимации результатов имитационного моделирования.

Новизной работы является найденное аналитическое выражение на основе показательных и дробно-рациональных функций для расчета относительного среднего времени ожидания во всем диапазоне возможных значений нагрузки и показателя Хёрста входного трафика с распределением Парето.

В отличие от других известных результатов аппроксимации статистической зависимости относительного среднего времени ожидания от нагрузки и показателя Хёрста входного трафика с распределением Парето, которые или являются слишком приближенными, или справедливыми в ограниченном диапазоне указанных параметров трафика, полученные результаты аппроксимации охватывают весь диапазон возможных значений данных параметров и позволяют получать результаты расчетов с высокой точностью. Полученное аналитическое выражение может быть использовано при выборе и настройке механизмов обеспечения качества обслуживания мультимедийного трафика в сетевых устройствах коммутации для оперативного прогноза ожидаемых показателей качества обслуживания.

В качестве направления дальнейших исследований в данной области представляет интерес выполнение подобной аппроксимации на основе показательных и дробно-линейных функций для других моделей систем массового обслуживания с самоподобным входным трафиком.

## Литература

1. Шелухин О. И., Тенякшев А. М., Осин А. В. Фрактальные процессы в телекоммуникациях. – М.: Радиотехника, 2003. – 480 с.
2. Шелухин О. И., Осин А. В., Смольский С. М. Самоподобие и фракталы. Телекоммуникационные приложения. – М.: Физматлит, 2008. – 368 с.
3. Новиков Е. А., Косяков Е. Н., Павлов А. Р. Динамическое резервирование радиоресурса в сетях спутниковой связи при передаче самоподобного трафика // Труды НИИР. 2014. № 2. С. 9-60.
4. Шелухин О. И., Осин А. В. Влияние самоподобности трафика на оптимизацию параметров телекоммуникационных сетей // Электротехнические и информационные комплексы и системы. 2007. Т. 3. № 1. С. 55-59.

5. Карташевский И. В., Буранова М. А. Влияние механизмов управления QoS на показатели качества обслуживания мультимедийного трафика сети Internet // Т-comm – Телекоммуникации и Транспорт. 2013. № 8. С. 54-60.

6. Яновский Г. Г. Качество обслуживания в сетях IP // Вестник связи. 2008. № 1. С. 1-16.

7. Одоевский С. М., Хоборова В. П. Методы прогнозирования качества обслуживания самоподобного трафика в устройствах коммутации мультисервисной сети // Труды учебных заведений связи. 2017. Том 3. № 3. С. 86-92.

8. Агеев Д. В., Игнатенко А. А., Копылев А. Н. Методика определения параметров потоков на разных участках мультисервисной телекоммуникационной сети с учетом эффекта самоподобия // Проблемы телекоммуникаций. 2011. № 3. С. 18-37.

9. Norros I. On the use of fractional Brownian motion in the theory of connectionless networks // IEEE Journal on Selected Areas in Communications. 1995. № 13. P. 953-962.

10. Крылов В. В., Самохвалова С. С. Теория телетрафика и ее приложения. – СПб.: БХВ-Петербург, 2005. – 288 с.

11. Назаров А. Н., Сычев К. И. Модели и методы расчета показателей качества функционирования узлового оборудования и структурно-сетевых параметров сетей связи следующего поколения. – Красноярск: Изд-во ООО «Поликом», 2010. – 389 с.

12. Будко П. А., Рисман О. В. Многоуровневый синтез информационно-телекоммуникационных систем. Математические модели и методы оптимизации: Монография. – СПб.: ВАС, 2011. – 476 с.

13. Колядин В. Л. Распределения с бесконечной дисперсией и ограниченность классической статистики // Радиотехника. 2002. № 2. С. 4-11.

14. Ложковский А. Г., Вербанов О. В. Моделирование трафика мультисервисных пакетных сетей с оценкой его коэффициента самоподобности // Научные труды ОНАС им. А.С. Попова. 2008. № 1. С. 57-62.

15. Ушанев К. В. Имитационные модели системы массового обслуживания типа Pa/M/1, H2/M/1 и исследование на их основе качества обслуживания трафика со сложной структурой // Системы управления, связи и безопасности. 2015. № 4. С. 217-251.

16. Одоевский С. М., Сорокина Е. А., Хоборова В. П. Варианты расчета показателей качества обслуживания информационных потоков в узлах коммутации мультисервисной сети военного назначения // Труды учебных заведений связи. 2016. Том 2. № 4. С. 92-99.

17. Ушанев К. В., Макаренко С. И. Показатели своевременности обслуживания трафика в системе массового обслуживания Pa/M/1 на основе аппроксимации результатов имитационного моделирования // Системы управления, связи и безопасности. 2016. № 1. С. 42-65.

18. Симонина О. А. Модели расчета показателей QoS в сетях следующего поколения: дис. ...канд. техн. наук: 05.12.13. – СПб, 2005. – 132 с.

19. Одоевский С. М., Кочешков А. К., Бусыгин А. В. Особенности моделирования процесса обслуживания мультимедийного трафика на основе распределения Парето // Сборник трудов XXV международной научно-технической конференции «Радиолокация, Навигация, связь», посвященной 160-летию со дня рождения А.С. Попова. – Воронеж, 2019. – С. 295-302.

20. Бусыгин А. В., Калюка В. И., Одоевский С. М. Аппроксимация статистических характеристик процесса обслуживания мультимедийного трафика на основе распределения Парето // Сборник научных статей XVI Международной научно-технической конференции «Новые информационные технологии и системы». – Пенза, 2019. – С. 256-260.

21. Турчак Л. И., Плотников П. В. Основы численных методов. – М.: Физматлит, 2003. – 304 с.

22. Киреев В. И., Пантелеев А. В. Численные методы в примерах и задачах. – СПб.: Издательство «Лань», 2015. – 448 с.

23. Боев В. Д. Компьютерное моделирование: Пособие для практических занятий, курсового и дипломного проектирования в AnyLogic7. – СПб.: ВАС, 2014. – 432 с.

### References

1. Shelukhin O. I., Tenyakshev A. M., Osin A. V. *Fraktal'nye processy v telekommunikaciyah* [Fractal processes in telecommunications]. Moscow, Radiotekhnika Publ, 2003. 480 p. (In Russian).

2. Shelukhin O. I., Osin A. V., Smolsky S. M. *Samopodobie i fraktaly. Telekomunikacionnye prilozheniya*. [Self-similarity and fractals. Telecommunication applications]. Moscow, Fizmatlit Publ, 2008. 368 p. (in Russian).

3. Novikov E. A., Kosyakov E. N., Pavlov A. R. Dinamicheskoe rezervirovanie radioresursa v setyah sputnikovoj svyazi pri peredache samopodobnogo trafika. [Dynamic reservation of radio resource in satellite communication networks during the transmission of self-similar traffic]. *Trudy NIIR*, 2014, no. 2, pp. 9-60 (in Russian).

4. Shelukhin O. I., Osin A. V. Vliyanie samopodobnosti trafika na optimizaciyu parametrov telekommunikacionnyh setej. [Influence of traffic self-similarity on optimization of telecommunication networks parameters]. *Electrotechnical Systems and Complexes*, 2007, vol. 3, no. 1, pp. 55-59 (in Russian).

5. Kartashevsky I. V., Buranova M. A. Vliyanie mekhanizmov upravleniya QoS na pokazateli kachestva obsluzhivaniya mul'timedijnogo trafika seti Internet [Influence of QoS control mechanisms on indicators of quality of service for multimedia Internet traffic]. *T-comm – Telecommunications and Transport*, 2013, no. 8, pp. 54-60 (in Russian).

6. Yanovsky G. G. Kachestvo obsluzhivaniya v setyah IP [Quality of service in IP networks]. *Vestnik svyazi*, 2008, no. 1, pp. 1-16 (in Russian).

7. Odoevsky S. M., Khoborova V. P. Metody prognozirovaniya kachestva obsluzhivaniya samopodobnogo trafika v ustrojstvakh kommutacii mul'tiservisnoj seti [Methods for predicting the quality of service of self-similar traffic in switching



devices of a multiservice network]. *Proceedings of Telecommunication Universities*, 2017, vol. 3, no. 3, pp. 86-92 (in Russian).

8. Ageev D. V., Ignatenko A. A., Kopylev A. N. Metodika opredeleniya parametrov potokov na raznykh uchastkakh mul'tiservisnoj telekommunikacionnoj seti s uchetom effekta samopodobiya [Methodology for determining flow parameters at different sections of a multiservice telecommunication network taking into account the self-similarity effect]. *Problemy telekommunikacij*, Har'kov, 2011, vol. 5, no. 3, pp. 18-37 (in Russian).

9. Norros I. On the use of fractional Brownian motion in the theory of connectionless networks. *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, 1995, no. 13, pp. 953-962.

10. Krylov V. V., Samohvalova S. S. *Teoriya teletrafika i ee prilozheniya* [Theory of teletraffic and its applications]. St. Petersburg, BHV-Peterburg Publ, 2005. 288 p (in Russian).

11. Nazarov A. N., Sychev K. I. *Modeli i metody rascheta pokazatelej kachestva funkcionirovaniya uzlovogo oborudovaniya i strukturno-setevykh parametrov setej svyazi sleduyushchego pokoleniya* [Models and methods for calculating the quality indicators of the operation of nodal equipment and structural-network parameters of next-generation communication networks]. Krasnoyarsk, Polikom Publ, 2010. 389 p (in Russian).

12. Budko P. A., Risman O. V. *Mnogourovnevnyj sintez informacionno-telekommunikacionnykh sistem. Matematicheskie modeli i metody optimizacii. Monografiya* [Multilevel synthesis of information and telecommunication systems. Mathematical models and optimization methods. Monography]. St. Petersburg, Military Academy of Communications Publ, 2011. 476 p (in Russian).

13. Kolyadin V. L. Raspredeleniya s beskonechnoj dispersiej i ogranichenost' klassicheskoj statistiki [Distributions with infinite dispersion and the limitations of classical statistics]. *Radiotekhnika*, 2002, no. 2, pp. 4-11 (in Russian).

14. Lozhkovsky A. G., Verbanov O. V. Modelirovanie trafika mul'tiservisnykh paketnykh setej s ocenкой ego koefficienta samopodobnosti [Modeling the traffic of multiservice packet networks with an assessment of its self-similarity coefficient]. *Proceedings of the O.S. Popov ONAT*, 2008, no. 1, pp. 57-62 (in Russian).

15. Ushanev K. V. Simulation Models of Queuing Systems of Type  $Pa/M/1$ ,  $H2/M/1$  and Research on the Basis of their Quality of Service Traffic with a Complicated Structure. *Systems of Control, Communication and Security*, 2015, no. 4, pp. 217-251 (in Russian).

16. Odoevsky S. M., Sorokina E. A., Khoborova V. P. Varianty rascheta pokazatelej kachestva obsluzhivaniya informacionnykh potokov v uzlah kommutacii mul'tiservisnoj seti voennogo naznacheniya [Options for calculating the quality of service of information flows in switching nodes of a military multiservice network]. *Proceedings of Telecommunication Universities*, 2016, vol. 2, no. 4, pp. 92-99 (in Russian).

17. Ushanev K. V., Makarenko S. I. The Timeliness Indicators of Traffic Service in Queue Systems  $Pa/M/1$  Based on Approximation of Imitating Modeling

Results. *Systems of Control, Communication and Security*, 2016, no. 1. pp. 42-65 (in Russian).

18. Simonina O. A. *Modeli rascheta pokazatelej QoS v setyah sleduyushchego pokoleniya*. Dis. kand. tekhn. nauk [Models for calculating QoS indicators in next-generation networks. D.Ph. thesis]. St. Petersburg, Saint-Petersburg State University of Telecommunications by Professor M.A. Bonch-Bruevich, 2005. 132 p (in Russian).

19. Odoevsky S. M., Kocheshkov A. K., Busygin A. V. Osobennosti modelirovaniya processa obsluzhivaniya mul'timedijnogo trafika na osnove raspredeleniya Pareto [Features of modeling the process of servicing multimedia traffic based on the Pareto distribution]. *Sbornik trudov XXV mezhdunarodnoj nauchno-tekhnicheskoy konferencii «Radiolokaciya, Navigaciya, svyaz'»* [Proceedings of the XXV international scientific and technical conference "Radar, Navigation, Communication"], Voronezh, 2019, pp. 295-302 (in Russian).

20. Busygin A. V., Kalyuk V. I., Odoevsky S. M. Approksimaciya statisticheskikh harakteristik processa obsluzhivaniya mul'timedijnogo trafika na osnove raspredeleniya Pareto [Approximation of the statistical characteristics of the multimedia traffic service process based on the Pareto distribution]. *Sbornik nauchnyh statej XVI Mezhdunarodnoj nauchno-tekhnicheskoy konferencii «Novye informacionnye tekhnologii i sistemy»* [Collection of scientific articles of the XVI International Scientific and Technical Conference "New Information Technologies and Systems"], Penza, 2019, pp. 256-260 (in Russian).

21. Turchak L. I., Plotnikov P. V. *Osnovy chislennykh metodov* [Fundamentals of numerical methods]. Moscow, Fizmatlit Publ, 2003. 304 p. (in Russian).

22. Kireev V. I., Pantelev A. V. *CHislennyye metody v primerah i zadachah* [Numerical methods in examples and problems]. St. Petersburg, Lan Publ, 2015. 448 p. (in Russian).

23. Boev V. D. *Komp'yuternoe modelirovanie: Posobie dlya prakticheskikh zanyatij, kursovogo i diplomnogo proektirovaniya v AnyLogic7* [Computer Modeling: A Guide for Practical Training, Coursework, and Diploma Design in AnyLogic7]. St. Petersburg, Military Academy of Communications Publ, 2014. 432 p. (in Russian).

**Статья поступила 12 февраля 2020 г.**

### **Информация об авторах**

*Одоевский Сергей Михайлович* – доктор технических наук, профессор. Профессор кафедры сетей связи и систем коммутации. Военная академия связи. Область научных интересов: сети связи, качество обслуживания, самоподобный трафик. E-mail: odse2017@mail.ru

*Бусыгин Александр Васильевич* – соискатель ученой степени кандидата технических наук. Адъюнкт кафедры сетей связи и систем коммутации. Военная академия связи. Область научных интересов: сети связи, качество обслуживания, самоподобный трафик. E-mail: televizor341@mail.ru

Адрес: 194064, Россия, г. Санкт-Петербург, Тихорецкий пр., д. 3.

## Approximation of statistical characteristics of the multimedia traffic service process based on the Pareto distribution

S. M. Odoevsky, A. V. Busygin

**Problem statement:** *Multimedia traffic in modern telecommunication networks has the property of self-similarity, which significantly complicates the quality of service in network switching devices. The Pareto distribution (values of time intervals between incoming packets of incoming traffic) is often used to describe real self-similar traffic. The selection and adjustment of suitable mechanisms for ensuring the quality of service implies an operational forecast of the expected quality indicators, which for self-similar traffic with Pareto distribution can be performed only by means of simulation of the service process, since there are no exact analytical models. The aim of the work is to develop an analytical model of multimedia traffic service with Pareto distribution, which allows calculating the timeliness of traffic service in a network switching device using analytical expressions obtained on the basis of approximating simulation results. Methods used: To model the service of self-similar traffic in the network switching device, the model of the queuing system P/M/1 was used. The relative average waiting time (relative to average service time) was considered as an indicator of the timeliness of traffic service. When deriving analytical expressions for the dependence of this indicator on the load and the Hurst indicator, we used a two-stage approximation based on the exponential and fractional rational functions of the results of simulation in the AnyLogic software environment. The novelty of the work is an analytical expression based on exponential and fractional rational functions for calculating the relative average waiting time over the entire range of possible load values and the Hurst exponent of the input traffic with the Pareto distribution. **Result.** Using the P/M/1 traffic simulation model, statistical dependencies of the relative average waiting time on load and the Hurst exponent were obtained in almost the entire range of possible values. A comparative analysis of statistical dependency data and known analytical dependencies based on exponential functions for FBM/M/1 allowed us to make an assumption about the possible use of similar functions for approximating statistical dependencies for P/M/1. The method of approximating the statistical dependencies at the first stage for different fixed Hurst exponents based on exponential functions with three parameters (depending on the Hurst exponent) at three selected interpolation points is presented. The computational procedure for determining the approximation parameters at the first stage for given statistical dependencies corresponding to specific values of the Hurst exponent sorted with a fixed step in the entire range of possible values is described. The obtained tabular dependences of the three indicated parameters on the Hurst exponent were approximated at the second stage by fractional rational expressions similar to similar expressions in the well-known formula for FBM/M/1. Unlike other known results of approximating the statistical dependence of the relative average waiting time on the load and the Hurst indicator, which are either too close or valid in a limited range of load values and the Hurst indicator, the approximation results cover the entire range of possible values of the specified traffic parameters and with high accuracy. Practical relevance: the obtained analytical expression can be used to select and configure mechanisms for ensuring the quality of service of multimedia traffic in network switching devices for the operational forecast of expected quality of service indicators.*

**Keywords:** *self-similar traffic, Pareto distribution, analytical model, quality of service.*

### Information about Authors

*Sergey Mikhailovich Odoevsky* – Dr. habil. of Engineering Sciences, Professor. Professor, Department of Communication Networks and Switching Systems. Military Academy of Communications. Research interests: communication networks, quality of service, self-similar traffic. E-mail: odse2017@mail.ru

*Alexander Vasilievich Busygin* – Doctoral Student. Department of Communication Networks and Switching Systems. Military Academy of Communications. Research interests: communication networks, quality of service, self-similar traffic. E-mail: televizor341@mail.ru

Address: Russia, 194064, Saint-Petersburg, Tihoreckiy prospekt, 3.