МОДЕЛЬНЫЙ СИНТЕЗ И ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ПОВЕДЕНИЯ

Ю.И. Бродский (Москва)

Введение

Школа Ю.Н. Павловского [1] развивала геометрический подход к математическому моделированию, когда изучаемый объект погружается в класс родственных ему (имеющих ту же структуру), рассматриваются группы преобразований базисных множеств таких объектов, и их подгруппы, сохраняющие те или иные инварианты. С помощью инвариантов можно дать классификацию изучаемых объектов. А самое главное, геометрическая теория, выделяя подгруппы преобразований, соответствующие им инварианты и проводя классификацию изучаемых объектов с их помощью, создает язык дискурса в изучаемой предметной области.

В рамках этого подхода был разработан модельный синтез – сквозная технология описания, синтеза и программной реализации имитационных моделей сложных многокомпонентных систем (когда компонента сложной системы сама может являться сложной системой). Основное понятие модельного синтеза – модель-компонента – универсальный агент агентного моделирования, может быть определен формально, как представитель однопараметрического семейства родов структур в смысле Н. Бурбаки [2].

Элементарные действия модели-компоненты реализуются методами (в программистском смысле, т.е. подпрограммами, реализующими алгоритм действия). Элементарные реакции модели-компоненты реализуются событиями (методами, реагирующими на определенное сочетание характеристик модели). И методы, и события входят в базисное множество модели-компоненты.

Далее, можно подвергать базисные множества модели-компоненты морфизмам (например, изоморфизмам), меняя элементарные действия и реакции, вплоть до противоположных. Можно ограничивать эти морфизмы подгруппами, сохраняющими тот или иной инвариант. В качестве инвариантов можно требовать выполнения некоторых аксиом (в жизни социума их роль обычно играют заповеди, нормы поведения и другие «скрепы») и на основании инвариантов строить классификацию коллективного поведения той или иной культуры (сложной системы) вполне в духе Эрлангенской программы Ф. Клейна [3], т.е., имеют место элементы геометрической теории поведения.

Основы модельного синтеза

В работе [4] был предложен модельный синтез, как метод решения задачи синтеза имитационной модели сложной системы из моделей ее компонент (агентов).

Основное понятие модельного синтеза – модель-компонента (универсальный агент, имеющий собственное запрограммированное поведение), – была определена формально, как представитель однопараметрического семейства родов структур в смысле Н. Бурбаки [2].

Упрощенный (не имеющий вспомогательных базисных множеств) род структуры Н. Бурбаки Σ , используемый в данной работе, имеет следующий синтаксис:

$\Sigma = \langle \text{основные базисные множества; соотношения типизации; аксиомы} \rangle -$

в угловых скобках, через точку с запятой перечислены три раздела. Первый – основные базисные множества, где через запятую перечисляются эти множества. Второй – соотношения типизации, где через запятую перечисляются соотношения вида $\sigma \subset S$, где множество σ называется родовой константой, а S , так называемая ступень – результат действия на основные базисные множества некоторого (в том числе, возможно, нулевого) количества декартовых произведений и взятия множества всех подмножеств (обозначаемое далее $\beta(\cdot)$). Третий – аксиомы, – произвольные истинные утверждения над базисными множествами, их элементами, родовыми константами.

Далее, именно на языке родов структур Н. Бурбаки формально описывается семейство моделей-компонент (всевозможных имитационных моделей), как однопараметрическое семейство родов структур.

$$\Sigma_N = \langle X, M, E, \{M_j\}_{j=1}^N, \{E_j\}_{j=1}^N \rangle;$$

$$x \subset X, a \subset X,$$

1)

$$s \subset M, f \subset M,$$

2)

$$\{m_{j,real} \subset M_j \times M\}_{j=1}^N,$$

3)

$$\{e_{j,real} \subset E_j \times E\}_{j=1}^N,$$

4)

$$\{m_{j,in} \subset M_j \times \beta(X)\}_{j=1}^N,$$

5)

$$\{m_{j,out} \subset M_j \times \beta(X)\}_{j=1}^N,$$

6)

$$\{e_{j,in} \subset E_j \times \beta(X)\}_{j=1}^N,$$

7)

$$\{sw_j \subset E_j \times M_j \times M_j\}_{j=1}^N,$$

8)

$$\{m_j^0 \subset M_j\}_{j=1}^N,$$

9)

$$\{p_j \subset \beta(M_j) \times \beta(E_j) \times M_j \times \beta(E_j \times M_j \times M_j)\}_{j=1}^N;$$

10)

$$R_1: (x \cup a = X) \& (x \cap a = \emptyset),$$

$$R_2: (s \cup f = M) \& (s \cap f = \emptyset),$$

$$R_3: \left\{ \left(\forall m \in M_j \right) \left(\exists ! \tilde{m} \in M \right) \left(\{m, \tilde{m}\} \in m_{j,real} \right) \right\}_{j=1}^N,$$

$$R_4: \left\{ \left(\forall e \in E_j \right) \left(\exists ! \tilde{e} \in E \right) \left(\{e, \tilde{e}\} \in e_{j,real} \right) \right\}_{j=1}^N,$$

$$R_5: \left\{ \left(\forall m \in M_j \right) \left(\exists ! r \in \beta(X) \right) \left(\{m, r\} \in m_{j,in} \right) \right\}_{j=1}^N,$$

$$R_6: \left\{ \left(\forall m \in M_j \right) \left(\exists ! r \in \beta(x) \right) \left(\{m, r\} \in m_{j,out} \right) \right\}_{j=1}^N,$$

$$R_7: \left\{ \left(\forall e \in E_j \right) \left(\exists ! r \in \beta(X) \right) \left(\{e, r\} \in e_{j,in} \right) \right\}_{j=1}^N,$$

$$R_8: \left\{ \left(\left(\forall e \in E_j \right) \left(\exists ! r \in M_j \times M_j \right) \left(\{e, r\} \in sw_j \right) \right) \& \right.$$

$$\left. \& \left(\left(\{e, r\} \in sw_j, \{ \tilde{e}, \tilde{r} \} \in sw_j, r = \tilde{r} \right) \Rightarrow (e = \tilde{e}) \right) \right\}_{j=1}^N$$

$$R_9: \left\{ p_j = \{ M_j, E_j, m_j^0, sw_j \} \right\}_{j=1}^N,$$

R_{10} : аксиома однозначности вычисления характеристик модели-компоненты,

R_{11} : аксиома поведения модели-компоненты (организации имитационных вычислений)>.

Здесь параметр N – количество процессов в модели-компоненте, $\beta(\cdot)$ – множество всех подмножеств множества стоящего в скобках. Процессы формально определяется соотношениями типизации (10) и аксиомами R_9 (косвенно в их определения входят также соотношения типизации

(8) с аксиомами R_8 , определяющие правила переключения элементов в процессах и соотношения типизации (9), определяющие начальные элементы процессов.

Обозначение $\{\dots_j\}_{j=1}^N$ используется для краткости и означает, что содержимое скобок повторяется через запятую N раз, при этом индекс j заменяется на $1, \dots, N$. Например, $\{M_j\}_{j=1}^N$ есть сокращенный вариант записи $M_1, \dots, M_N$.

Далее, X – множество характеристик модели и $X = \{x, a\}$, где x – внутренние характеристики модели, а a – ее внешние характеристики. M – множество различных реализаций методов-элементов и $M = \{s, f\}$ – медленные s , реализующие гладкую зависимость внутренних характеристик модели от ее внутренних и внешних характеристик, и быстрые f – реализующие скачки внутренних характеристик модели. E – множество различных реализаций методов-событий, связанных с моделью. События – это то, на что обязана реагировать наша модель. Метод-событие – функция, которая, получая на входе подмножество характеристик $Y \subset X$, на выходе дает неотрицательное число, означающее, что событие наступило, если число равно нулю, или же прогноз времени до наступления события, если число положительно.

Каждый процесс p_j , $j = 1, \dots, N$, определяемый (10) и R_9 , последовательно осуществляет некоторый конечный набор возможных для него элементарных действий M_j , который будем называть множеством его методов-элементов, возможно, в зависимости от возникающих в системе ситуаций E_j , на которые процесс умеет реагировать, их будем называть множеством его методов-событий. Соотношения типизации (3), (4) показывают, откуда берутся методы-элементы и методы-события процессов, (5) – (7) показывают какие характеристики модели передаются методам и принимаются от методов-элементов, соотношение (8) задает правила переключения элементов под влиянием событий.

Аксиомы $R_1 - R_8$ уточняют соотношения (1) – (8).

Определенное таким образом семейство моделей-компонент обладает двумя очень важными свойствами:

1. Организация имитационных вычислений для всех представителей семейства однотипна, поэтому может осуществляться одной универсальной компьютерной программой.
2. Семейство замкнуто относительно операции объединения конечного числа компонент в комплекс (т.е. комплекс формально так же является компонентой). Это позволяет строить сложные фрактальные агентные системы, не заботясь о том, как потом организовывать их вычисления.
3. Указанные свойства моделей-компонент полностью решают задачу синтеза сложной фрактальной мультиагентной системы из отдельных агентов.

Модельный синтез не является геометрической теорией в смысле Эрлангенской программы Ф. Клейна [3] или работ школы Ю.Н. Павловского [1] (хотя возник он в рамках именно этой школы), так как для задачи синтеза морфизмы не нужны, поэтому неинтересны и их инварианты, однако он вплотную подводит к такой теории.

Морфизмы поведения и окна Овертона

Несколько слов о геометрических теориях. Автор понимает под ними структуралистский подход, с данью уважения к истории науки в названии. Структурализм в математике присутствовал всегда, однако осознанный интерес к нему начался с Эрлангенской программы [3], где Ф. Клейн дал классификацию известных ему геометрий. Возьмем проективную плоскость, проективная геометрия задаст на ней структуру, проективные преобразования переводят объекты проективной геометрии в эквивалентные (в смысле этой геометрии). Если выбирать подгруппы группы проективных преобразований, сохраняющие тот или иной инвариант, их элементы переводят в эквивалентные объекты соответствующих геометрий. Если взять подгруппу

конгруэнтных преобразований (движений), – получим евклидову геометрию. Если инвариант задан фиксированной прямой, – получим аффинную геометрию. Если инвариантны гиперболическая $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$ или эллиптическая $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ метрики, – получим гиперболическую или эллиптическую неевклидову геометрию. Можно сказать, каков инвариант, – такова и геометрия. И все они в соответствии с афоризмом А. Пуанкаре: «Математика – это искусство называть разные вещи одним и тем же именем», названы именем «геометрия», так как структура едина для всех.

В дальнейшем группы преобразований и их инварианты часто использовались для классификации различных математических объектов.

Разработанная школой Ю.Н. Павловского геометрическая теория декомпозиции представляет языковую среду, в рамках которой произвольный математический объект в [1] погружается в класс родственных объектов, где определено понятие изоморфизма. Декомпозицией объекта считается его сохраняющееся при изоморфизмах представление с помощью семейства редукций этого объекта, причем по этому представлению исходный объект должен однозначно восстанавливаться. Редукции – это упрощенные представления объекта, сохраняющие его структуру. Они бывают двух типов F- (факторизация) и P- (подобъект). Соответственно, бывают P- и F- декомпозиции и их сочетания (декомпозиции более высоких порядков), – такова классификация возможных декомпозиций.

Модельный синтез решает задачу синтеза агентов, обратную задаче декомпозиции, причем не для произвольных математических объектов, а лишь для описанного в [4] достаточно широкого класса имитационных моделей. По своей сути это конечно же структуралистская теория, однако морфизмы базисных множеств и их инварианты она не затрагивает, так как для задачи синтеза это не нужно. На первый взгляд может показаться, что морфизмы и совсем здесь не нужны, так как они отображали бы вполне конкретную исследуемую модель-компоненту в некие совсем иные модели, с совсем другими характеристиками, элементарными действиями, реакциями и т.д., возможно (и скорее всего), лишенные какого-либо смысла в области моделирования. Однако это не так.

Самое важное свойство модели-компоненты – это наличие у нее поведения, т.е. способности тем или иным заранее известным способом (методом-элементом) отвечать на те или иные также заранее известные воздействия (события) внутренней и внешней среды. Это поведение заранее запрограммировано в основном соотношениями (8) – (10) с аксиомами $R_8 - R_{11}$, выбором базисных множеств M и E , и отчасти соотношениями (3), (4) с аксиомами R_3, R_4 . На самом деле в программировании поведения модели-компоненты так или иначе участвуют все составляющие ее описания, но в первую очередь – именно перечисленные выше.

Описав поведение всех моделей-компонент и построив синтез всех комплексов, включая комплекс самого высокого уровня, получим поведение нашей имитационной системы. Теперь морфизмы базисных множеств, в первую очередь M и E (так как это проще и понятней, но возможно и остальных), можно трактовать как изменения поведения системы.

Изменения (перепрограммирование) поведения сложной системы, их изучение, моделирование и классификация очень актуальны. Нам приходится менять поведение. Например, устраиваясь на новую работу или получая новое задание на старой, создавая новые и меняя старые социальные связи и т.д.

Ничем не ограниченные морфизмы могут незаметно за не слишком продолжительное время привести систему к состоянию в некотором смысле противоположному исходному. Поэтому естественным образом возникает вопрос об инвариантах, ограничивающих все множество возможных морфизмов и о классификации типов поведения, связанных с этими инвариантами.

В качестве примера, приведем популярные в последнее время окна Овертона.

Окна Овертона предлагают технологию изменения общественного поведения, очень похожую на применение морфизмов. Работа этой технологии обычно иллюстрируется примером включения в общественно-политический обиход чего-то совершенно немислимого ранее, например, людоедства.

Преобразование дискретизируется, разбивается на конечное число окон (обычно 6 – 7), так, чтобы внутри каждого окна действия и высказывания не слишком отличались друг от друга по степени близости от существующих норм и в то же время, постепенно подводили бы дискурс к следующему окну. Окна обычно называются следующим образом:

- Немыслимо.
- Радикально.
- Приемлемо.
- Разумно.
- Стандартно.
- Политическая норма.

На самом деле, с позиций математика, речь идет о гомеоморфизмах (непрерывных в обе стороны изоморфизмах, в категории топологических пространств), только на естественном языке и без математических ассоциаций. На взгляд автора, характерное время преобразований такого рода – 25 лет (время загрузки в нас бытовой культуры – нашей «операционной системы»). Это минимальное время, при условии, что силы, обеспечивающие преобразование специально направлены на молодежь. Если такой специальной направленности нет, все растягивается еще на одно поколение, до 50 лет.

Не все социологи считают теорию окон Овертона научной. Некоторые говорят, что не видели на практике ни одной ее реализации. По этому поводу автор напоминает, что А. Тьюринг, человек имевший несомненные заслуги как перед британской короной, так и перед мировой наукой, был осужден в 1952 г. британским судом и доведен до самоубийства в 1954 г. за «грубую непристойность» (gross indecency). Нравы были таковы, что назвать гомосексуализм своим именем в суде было невозможно. Тем не менее, через 15 лет гомосексуализм в Англии был декриминализован, а в настоящее время Великобритания относится к самым либеральным в отношении ЛГБТ странам. Прошло чуть больше 50 лет.

Еще одно критическое замечание, что многообразие индивидуальностей и социальных слоев не укладывается в концепцию окон Овертона – также несостоятельно. В языковой среде модельного синтеза легко различать индивидуальное поведение агентов (моделей-компонент самого низкого уровня), коллективное поведение (комплекса самого высокого уровня), и поведение комплексов промежуточных уровней (например, социальных слоев). Морфизмы применимы, вообще говоря, к любой модели-компоненте, но обычно окна Овертона относят к коллективному поведению всей системы.

На наш взгляд, окна Овертона, – это тоже математика, хотя кому-то может показаться публицистикой или даже конспирологией. По-видимому, в пространстве поступков (базисное множество M в описании модели-компоненты) можно ввести некую топологию близости в общественном восприятии тех или иных действий. Отметим, что ввести ее непросто: в формализации предыдущего параграфа поступок – это метод в смысле программирования, т.е. подпрограмма (2), (3), (8) – (10), R_2, R_3, R_8, R_9 с определенной сигнатурой входных и выходных параметров (5), (6), R_5, R_6 . Утешает то, что на гуманитарном уровне мы (например, бабушки на скамейке у подъезда) умеем и даже любим оценивать близость поступков (особенно чужих) к принятым нормам. Если введена топология, то окна Овертона будут являться гомеоморфизмами (в этом случае существенна непрерывность преобразований) над топологическим пространством возможных поступков M и проиллюстрируют работу морфизмов геометрической теории.

Ограничение морфизмов. Заповеди, ценности, Закон, как инварианты преобразований поведения

Приведенные выше примеры убеждают, что ничем не ограниченные морфизмы могут завести систему очень далеко. Традиционный способ их ограничения – выбор инвариантов, сохраняемых допустимыми морфизмами.

Как работают инварианты? Инвариант, являющийся аксиомой на языке описания структуры сложной системы, выделяет из группы морфизмов подгруппу допустимых этим

инвариантом морфизмов, которые сохраняют его. В результате, как неоднократно писал автор (например, [5]), в сложной системе вместо законов сохранения господствует сохранение законов. Впрочем, физические законы сохранения являются частным случаем сохранения законов (энергия – однородность времени, импульс – однородность пространства и т.д.).

Сохранение законов в сложной системе, в отличие от законов сохранения физики, требуют в сфере базисных множеств регулярных материальных затрат (потенциал динамического равновесия сложной системы), а также регулярных усилий в сферах отношений типизации и аксиом – культ (не обязательно религиозный) поддержания ее законов.

Подобными инвариантами, ограничивающими в социуме преобразования поведения, традиционно являются религиозные заповеди, моральные и культурные ценности, то что можно назвать Законом с большой буквы. Не всегда Закон носит исключительно религиозный характер, туда могут входить и как древние традиции той или иной культуры (например, закон гор – адат), так и новые, конструктивистские, вполне светские нормы (например, моральный кодекс строителя коммунизма, хотя в последнем случае имеет место существенное заимствование из религиозных заповедей, или единая нация строителей коммунизма – советский народ).

До тех пор, пока в общественном сознании прочно укоренен Закон, окна Овертона не могут успешно работать в противоречащем ему направлении – это сразу вызовет общественное неприятие и порицание. Например, если общество считает нравственным инвариантом библейские заповеди, никакие окна Овертона не способны сделать общественной нормой супружеские измены или однополые браки.

Выводы

В работе на основании методов модельного синтеза заложены основы геометрической теории поведения.

Данная работа только лишь ставит данную очень серьезную проблему. Полного математического решения у автора пока нет, хотя есть некоторые наброски, аналогии и понимание проблемы на гуманитарном уровне, проиллюстрированное примером окон Овертона.

Возможно, стиль изложения может показаться нестрогим, близким к публицистике. Однако, стоит иметь в виду, что за каждой предлагаемой «гуманитарной» конструкцией вполне может стоять имитационная модель, построенная методом модельного синтеза и, следовательно, представленная вполне формальным математическим объектом – моделью-компонентой. Далее появляется возможность вести формальный математический дискурс в терминах родов структур, морфизмов базисных множеств, инвариантов, сохраняемых этими морфизмами и т.д.

Геометрическая теория дает математическую языковую среду для дискурса в предметной области моделирования социального поведения, т.е. выявлять достаточно тонкие различия рассматриваемых сущностей, которые обычно теряются, сливаются при их гуманитарном обсуждении на естественном языке. Отсутствие такой языковой среды часто ведет к кажущимся противоречиям при обсуждении проблем, возникающих при таком моделировании, как попытался показать автор, в примере с окнами Овертона.

Кстати, недавно автор видел в интернете статью некоего скандинавского блоггера, где говорится, что в людоедстве все же что-то есть, и что в некоторых случаях...

Литература

1. Павловский Ю.Н. Геометрическая теория декомпозиции и некоторые ее приложения. М.: ВЦ РАН, 2011. 93 с.
2. Бурбаки Н. Теория множеств. М.: Мир. 1965. 456 с.
3. Об основаниях геометрии // Сборник классических работ по геометрии Лобачевского и развитию ее идей / Ред. и вступ. статья А.П. Нордена, М.: Гос. изд. технико-теоретической литературы, 1956. 533 с.
4. Бродский Ю.И. Модельный синтез и модельно-ориентированное программирование М.: ВЦ РАН, 2013, 142 с.
5. Бродский Ю.И. О математическом моделировании в гуманитарной сфере // Моделирование, декомпозиция и оптимизация сложных динамических процессов, 2016. Т.31, №1(31), С. 203-219.