

СЕКЦИЯ 2 СРЕДСТВА АВТОМАТИЗАЦИИ И ВИЗУАЛИЗАЦИИ  
ИМИТАЦИОННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

## РАСЧЕТ И МОДЕЛИРОВАНИЕ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ В РАСТУЩИХ СЕТЯХ

В.А. Бадрызов, В.Н. Задорожный (Омск)

В жизни человека часто встречаются растущие сети, к ним относятся, например, социальные сети, Интернет, сети цитирования работ, сети распространения слухов, вирусов и инфекций и др. Социальные сети и Интернет приобрели особенно большое значение. По своим возможностям распространения информации и влияния на общество эти сети приблизились к современным средствам массовой информации. Непосредственное изучение механизмов развития растущих сетей затруднено, поэтому в исследовательской практике применяются модели сетей в виде случайных графов. Исследуя случайные графы, можно получить информацию и об особенностях развития реальных сетей. Это знание позволит управлять развитием сетей и распространением информации внутри сетей, позволит влиять на участников сети.

За последние 20 лет был разработан широкий круг моделей растущих сетей в виде случайных графов предпочтительного связывания. Широко известна работа А. Барабаши и Р. Альберт [1], в которой было предложено использовать правило предпочтительного связывания для моделирования Интернет. Среди исследований, связанных со случайными графами предпочтительного связывания, выделяются следующие работы: В. Вoolobas, С. Borgs, J. Chayes и О. Riordan [2], С. Cooper и А. Frieze [3], G. Ergun и G.J. Rodgers [4], S. Dereich и P. Morters [5], P.L. Krapivsky и S. Redner [6] В работе [7] были предложены случайные графы с нелинейным правилом предпочтительного связывания (графы с НППС) и заложены основы теории этих случайных графов. В рамках теории случайных графов с НППС разработаны методы, позволяющие на основе ретроспективных данных о растущей сети подобрать такие параметры графа с НППС, что генерируемый на их основе граф будет иметь характеристики, идентичные характеристикам реальной сети. Это дает возможность перейти от исследования свойств сети к исследованиям свойств соответствующего случайного графа.

Случайный граф с НППС выращивается из небольшого произвольного графа-затравки. В каждый момент времени  $t = t_1, t_2, \dots$  к графу добавляется приращение графа – новая вершина с несколькими инцидентными ей рёбрами. Свободные концы рёбер приращения присоединяются к вершинам графа, которые выбираются случайно с вероятностями, пропорциональными заданной функции предпочтения (весу)  $f(k)$ , где  $k$  – степень связности вершины. В качестве функции предпочтения вершины случайного графа с НППС может быть выбрана произвольная неотрицательная функция степени связности вершины. Вероятность  $p_i$  того, что ребро приращения выберет для присоединения вершину  $i$  графа, пропорциональна  $f(k_i)$ :

$$p_i = \frac{f(k_i)}{\sum_j f(k_j)}, \quad i=1, \dots, N, \quad (1)$$

где  $N$  – число вершин в графе.

Число рёбер  $x$  в приращении случайного графа с НППС является случайной величиной, которая имеет дискретное распределение вероятностей  $\{r_k\}$ . Вероятности  $r_k = P(x = k) \geq 0$  появления в приращении  $k$  рёбер заданы для  $g \leq k \leq h$ , где величина  $g \geq 1$  определяет минимальное число рёбер в приращении, а  $h$  – максимальное число рёбер. Кроме того,  $r_g + \dots + r_h = 1$ . Распределение вероятностей  $\{r_k\}$  определяет среднее число рёбер  $m = M(x) = \sum k r_k < \infty$  в приращении. Функция предпочтения  $f(k)$  и распределение вероятностей  $\{r_k\}$  числа рёбер в приращении задают алгоритм генерации растущего случайного графа с НППС.

Основные результаты теории случайных графов с НППС относятся к анализу стационарных процессов. Под стационарным процессом понимается состояние случайного графа, достигнутое при времени  $t \rightarrow \infty$ . Рассмотрим далее переходные процессы, происходящие на начальных шагах выращивания случайного графа, а также методы расчета и моделирования переходных процессов.

Расчет сетевых переходных процессов в случайных графах с НППС

Будем называть распределением степеней связности (РСС) вершин графа ряд (последовательность)  $\mathbf{q} = \{q_k\} = \{q_1, q_2, \dots\}$  вероятностей  $q_k$  того, что случайно (равновероятно) выбранная вершина графа имеет степень связности  $k$ . Например, граф из трех вершин, связанных двумя ребрами, имеет РСС  $\mathbf{q} = \{q_1, q_2\} = \{2/3, 1/3\}$ , так как из трех вершин графа одна имеет степень 2, а две оставшиеся вершины имеют степень, равную 1. Полный граф из четырех вершин имеет РСС  $\mathbf{q} = \{0, 0, 1\}$ . Графы с изолированными вершинами мы не рассматриваем. Сетевым переходным процессом (ПП) будем называть изменение РСС вершин графа во времени:  $\mathbf{q}(t) = \{q_k(t)\}$ ,  $t = 0, 1, 2, \dots$ , начинающееся с некоторого момента  $t = t_0$ .

Задача расчета сетевых ПП в графах с НППС была поставлена как задача определения РСС  $q(t+1)$  при заданной функции предпочтения  $f(k)$ , известном законе  $\{r_k\}$  распределения случайной величины  $x$  числа ребер в приращении и полученном на предыдущем шаге РСС  $q(t)$ . Задача решена в работе [8] в виде рекуррентных формул:

$$q_g(t+1) = \frac{tq_g(t) + r_g - m \frac{q_g(t)f_g}{\bar{f}(t)}}{t+1}, \quad k = g,$$

$$q_k(t+1) = \frac{tq_k(t) + r_k + \frac{m}{f(t)} [q_{k-1}(t)f_{k-1} - q_k(t)f_k]}{t+1}, \quad k > g, \quad (2)$$

$$\bar{f}(t) = \sum_{k \geq g} q_k(t)f_k$$

где

На рисунке 1 представлен пример расчета по рекуррентным соотношениям (2) сетевого переходного процесса в случайном графе с НППС, параметры которого таковы:

- функция предпочтения  $f(k) = k \cdot \ln(k)$  для  $2 \leq k \leq 20$  и  $f(k) = 0$  при прочих  $k$ ;
- для выращивания графа используются стохастические приращения с распределением вероятностей  $r = \{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5\} = \{0,2; 0,2; 0,2; 0,2; 0,2\}$  числа ребер в приращении;
- граф-затравка состоит из 5 вершин, связанных 5 ребрами в кольцо.

Для наглядности дискретные распределения заменены ломаными линиями. Значения вероятностей  $q_k(t)$  для  $t = 100$  отличаются от соответствующих финальных вероятностей не более чем на 4% (для  $k = 21$  – не более 17%). Для  $t = 10000$  различие между  $q_k(t)$  и финальными вероятностями не превышает 0,2%. Рисунок 1 также позволяет утверждать, что уже при  $t = 100$  РСС  $q(100)$  практически не отличается от точного финального РСС  $Q_k$ , полученного по формулам, найденным в работе [7].

Локальные переходные процессы в случайных графах

Для вершины случайного графа определим понятие состояния вершины. Под состоянием вершины будем понимать факт обладания вершиной графа определенным количеством инцидентных этой вершине ребер. Так как присоединение к вершине новых ребер носит случайный характер, задаваемый нелинейным правилом предпочтительного связывания, то невозможно совершенно точно предсказать, каково будет состояние, а значит и степень связности вершины, в некоторый момент времени.

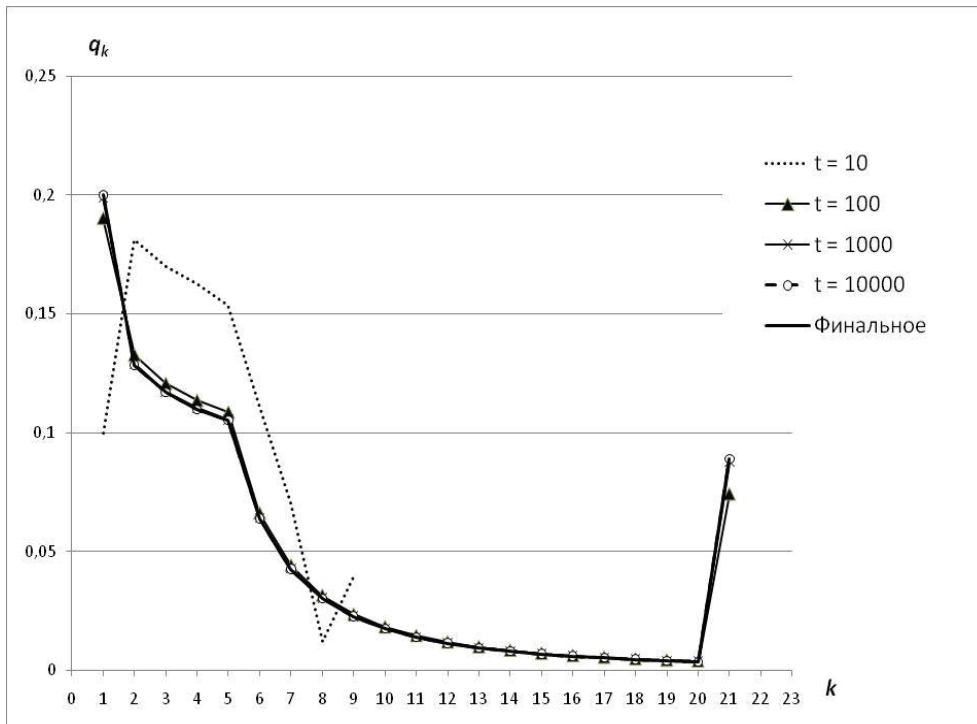


Рис. 1 – Изменение во времени РСВ вершин случайного графа с НППС

Очевидно, что если вершина случайного графа с НППС появилась в момент времени  $t$ , а количество ребер  $x$  в приращении графа задается, например, дискретным распределением вероятностей  $r = \{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5\}$ , то эта вершина графа после рождения может находиться только в одном из состояний: имеет 1, 2, ..., 5 инцидентных ребер. Распределение вероятностей нахождения в указанных состояниях совпадает с распределением  $r$ . Вероятность того, что новая вершина имеет 10 ребер, равна 0. Также очевидно, что с увеличением возраста этой вершины, ее состояние случайным образом изменяется. Маловероятно, что вершина, просуществовавшая 1000 шагов времени, будет оставаться в состоянии, характеризующимся 1 – 5 ребрами, как при ее рождении. Также маловероятно, что эта вершина будет иметь состояние, характеризующееся 1000 инцидентных ребер.

Мы приходим к выводу о том, что состояние выделенной вершины случайного графа можно охарактеризовать распределением вероятностей состояний выделенной вершины (РСВВ) и можно отслеживать, как со временем меняется это РСВВ. Знание РСВВ в определенный момент времени дает возможность рассчитать среднюю степень ВВ как сумму произведений степеней связности, соответствующих состояниям ВВ, на вероятности нахождения ВВ в этих состояниях. Появляется возможность рассчитать динамику степени связности ВВ.

Будем, согласно работе [8], называть локальным переходным процессом изменение распределения вероятностей состояний выделенной вершины с изменением ее возраста  $T$ . Выделим произвольную вершину, присоединенную к растущему графу. Момент присоединения этой ВВ назовем временем ее рождения и обозначим через  $t_0$ . Время  $t_0$  одновременно является и номером ВВ. В произвольное время  $t > t_0$  можно определить возраст  $T = t - t_0$  этой вершины и ее состояние (степень  $k$ ), зависящее от возраста. РСВВ для вершины возраста  $T$  обозначим как  $u(T) = \{u_k(T)\} = \{u_1(T), u_2(T), \dots\}$ , где  $u_i(T)$  – вероятность того, что ВВ в возрасте  $T$  имеет степень  $k$ .

В работе [8] найдены рекуррентные соотношения, позволяющие получать РСВВ:

$$u_g(T+1) = u_g(T) \left( 1 - \frac{mf(g)}{(T+t_0)f(T+t_0)} \right), \quad k = g, \quad (3)$$

$$u_k(T+1) = u_{k-1}(T) \frac{mf(k-1)}{(T+t_0)\bar{f}(T+t_0)} + u_k(T) \left( 1 - \frac{mf(k)}{(T+t_0)\bar{f}(T+t_0)} \right), \quad k > g.$$

Изменение степени связности вершины случайного графа во времени

Вероятности  $\mathbf{u}(T) = \{u_k(T)\}$ , найденные в результате определения РСВВ, позволяют определить среднюю степень связности  $\langle k(T) \rangle$  ВВ для любого возраста  $T$  этой вершины по формуле

$$\langle k(T) \rangle = \sum_{k \geq g} k u_k(T) \quad (4)$$

Алгоритм определения степени связности ВВ случайного графа предпочтительного связывания задается следующей процедурой:

1. Выполняется расчет РСС  $\mathbf{q}(t) = \{q_k(t)\}$  вершин графа для времени  $t = 0, 1, 2, \dots$  по рекуррентным формулам (2). Вероятности  $q_k(t)$  должны быть рассчитаны, как минимум для времени  $t = t_0 + T$ , где  $T$  – предельный возраст, для которого выполняется прогноз степени связности ВВ, а  $t_0$  – время рождения ВВ.

2. По рассчитанным вероятностям  $q_k(t)$  для каждого времени  $t = 0, 1, 2, \dots$  определяются:

$$\text{средняя степень } \langle k \rangle = \sum_{k \geq g} k q_k(t) \text{ вершин графа;}$$

$$\text{средний вес } \langle f \rangle = \sum_{k \geq g} f_k q_k(t) \text{ вершин графа.}$$

3. Выполняется расчет РСВВ  $\mathbf{u}(T) = \{u_k(T)\}$  для возраста  $T = 0, 1, 2, \dots$  по рекуррентным формулам (3) с использованием полученных на предыдущем шаге средних величин  $\langle k \rangle$  и  $\langle f \rangle$ .

4. Выполняется расчет средней степени связности  $\langle k(T) \rangle$  ВВ по формуле (4) для всех значений возраста  $T = 0, 1, 2, \dots$ .

Назовем сформулированный алгоритм и формулу (4) расчета степеней связности ВВ методом переходных процессов (метод ПП).

Точность численных методов расчета локальных переходных процессов

Правильность расчета переходных процессов, выполненного методом ПП по рекуррентным формулам (3), может быть подтверждена результатами имитационного моделирования. Для этого в разработанной имитационной модели «Генерация случайного графа с предпочтительным связыванием v.1» [9] задаются параметры генерации случайного графа, такие же, как у графа, для которого выполнялись численные расчеты РСВВ, а затем проводятся эксперименты по выращиванию случайного графа.

На рисунке 2 построен график изменения степеней связности выделенных вершин с различным временем рождения в рассмотренном выше случайном графе с параметрами:

- функция предпочтения  $f(k) = k \cdot \ln(k)$  для  $2 \leq k \leq 20$  и  $f(k) = 0$  при прочих  $k$ ;
- для выращивания графа используются стохастические приращения с распределением вероятностей  $\tau = \{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5\} = \{0,2; 0,2; 0,2; 0,2; 0,2\}$  числа ребер в приращении;
- граф-затравка состоит из 5 вершин, связанных 5 ребрами в кольцо.

Изменение степеней связности рассчитано для вершин, вводимых в граф с начальной степенью  $k_0 = 2$  во время  $t = 0, 100, 1000$ . Полученные результаты подтверждают известные наблюдения о том, что вершины, вошедшие в граф раньше других, развиваются быстрее.

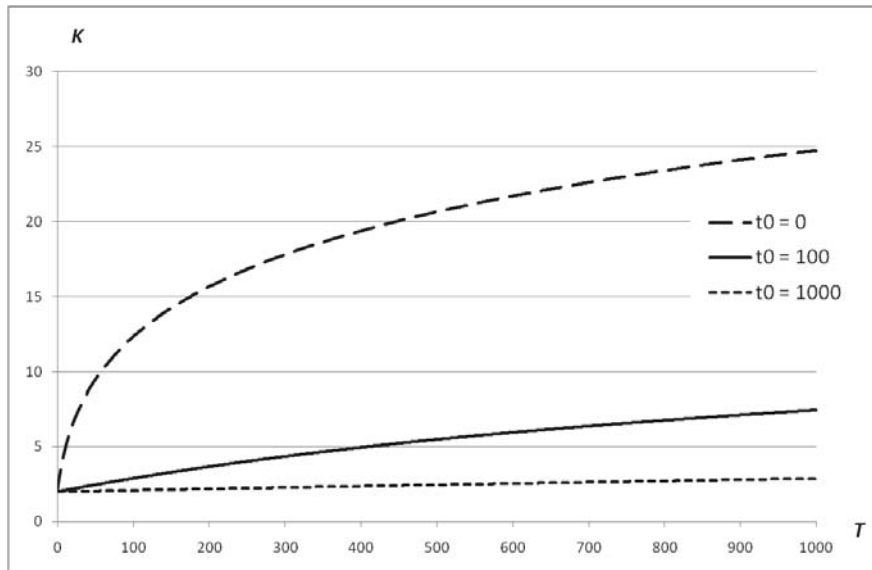


Рис.2 – Изменение во времени степеней связности выделенных вершин

Выполним сопоставление результатов прогнозирования роста степени связности ВВ по методу ПП рассмотренного выше случайного графа с НППС с результатами, полученными методом имитационного моделирования. Имитационные эксперименты в нашем случае – многократная генерация случайного графа с НППС. В каждой реализации случайного графа регистрируется степень связности ВВ до момента достижения вершиной возраста  $T = 1000$ , что позволяет оценить изменение степени связности вершины в конкретной реализации случайного графа. По результатам серии экспериментов рассчитывается среднее значение степени связности ВВ при каждом дискретном значении возраста  $T = 0, 1, \dots, 1000$  и строится доверительная полоса шириной  $3\sigma$ . На рисунке 3 показано изменение степеней связности выделенных вершин, рассчитанное разными методами. Сопоставление выполнено для трех случаев: А – для вершины, выбранной в графе-затравке ( $t = 0$ ); Б – для вершины, введенной в граф на шаге времени  $t = 100$ ; В – для вершины, введенной в граф на шаге времени  $t = 1000$ . Пунктирными линиями на рисунке показана доверительная полоса для результатов, полученных методом имитационного моделирования.

Расчетные значения степени связности по методу ПП отличаются от результатов имитационных экспериментов не более, чем на  $3\sigma$ , практически полностью укладываясь в доверительную полосу. Лишь для вершины графа, взятой из графа-затравки наблюдается незначительное отклонение от доверительной полосы, что объясняется тем, что в графе-затравке еще не сформировались слои вершин с одинаковой степенью связности, на концепции которых в работе [8] построены рекуррентные формулы (3) метода ПП. При достижении вершиной возраста  $T = 1000$ , расхождение результатов имитационного моделирования и расчета степени связности выделенных вершин по методу ПП, найденное в форме относительной погрешности, не превышает для случаев А, Б, В соответственно 16, 2,3 и 2%.

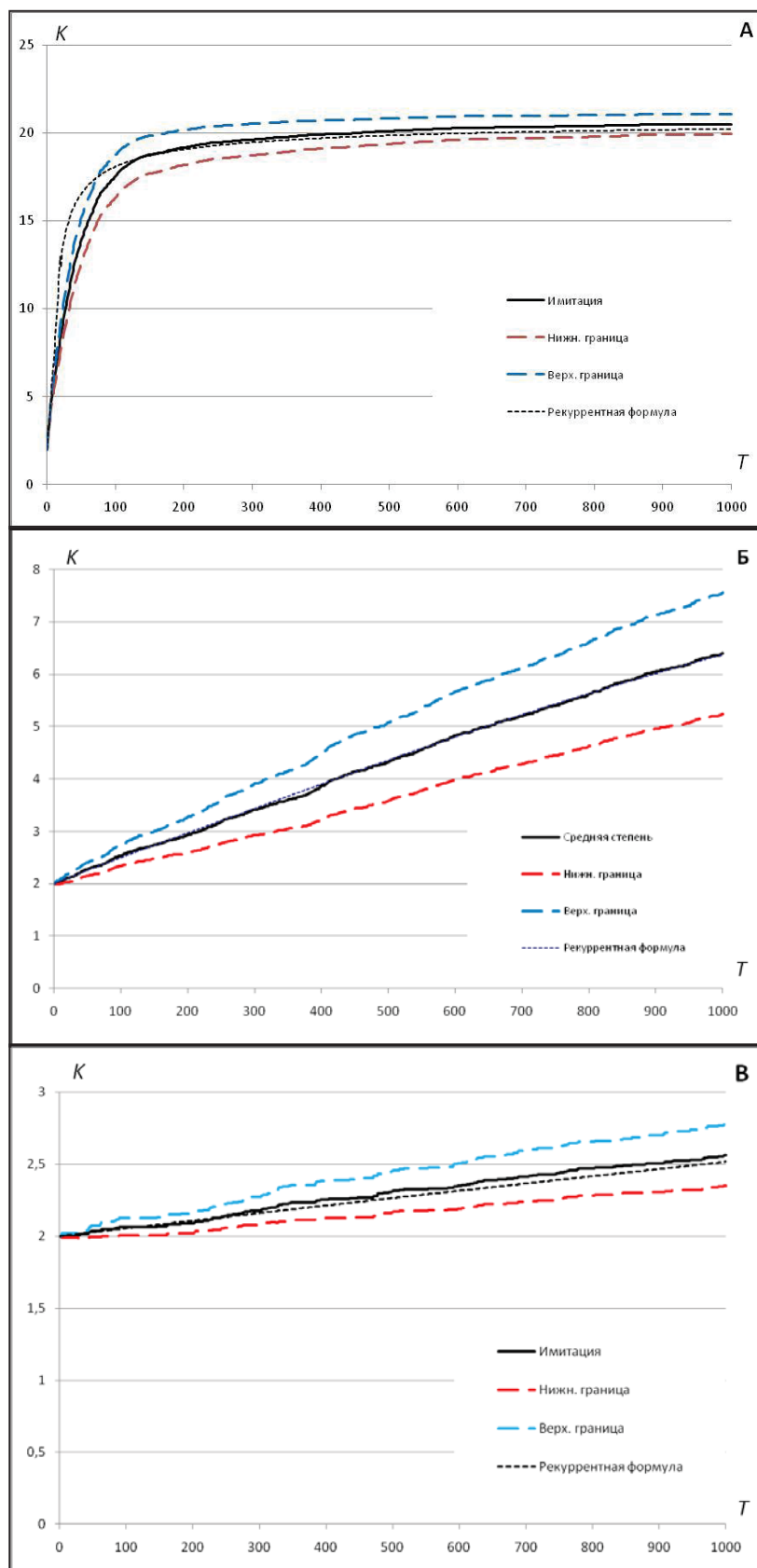


Рис.3 – Сопоставление результатов прогнозирования степеней связности вершин случайного графа с НППС разными методами

## Выводы

Для случайных графов с НППС введено понятие переходных процессов и рассмотрены численные методы расчета изменения во времени ряда параметров случайных графов: распределение степеней связности вершин графов, распределение состояний выделенных вершин, средняя степень связности и средний вес вершин. Одним из немногих способов проверки соответствия расчетных значений фактическим значениям параметров является метод имитационного моделирования. Многократно выращивая граф с теми же параметрами, что и граф, для которого выполнялись прогнозы параметров численным методом, можно установить, соответствуют ли друг другу результаты, полученные различными методами. Выполненные исследования изменения во времени параметров случайных графов дают основания говорить о том, что численный метод обеспечивает достаточную точность расчетов – относительная погрешность результатов, полученных различными методами, не превышает 10%. В отличие от метода имитационного моделирования, численный метод во много раз сокращает трудоемкость построения прогнозов важнейших параметров случайных графов с НППС.

## Литература

1. Barabasi A.L., Albert R. Emergence of scaling in random networks // *Science*, 1999. – V. 286(5439). – P. 509-512.
2. Bollobas B., Borgs C., Chayes J., Riordan O. Directed scale-free graphs // In *Proceedings of the Fourteenth Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms* (Baltimore, MD, 2003), P. 132-139, New York, (2003). ACM.
3. Cooper C., Frieze A. A general model of web graphs // *Random Structures Algorithms*, 2003. – V. 22(3). – P. 311-335.
4. Ergun G., Rodgers G.J. Growing random networks with fitness // *Physica A*, 2002. – V.303. – P. 261-272.
5. Krapivsky P.L., Redner S. Organization of growing random networks [Электронный ресурс]. – URL: <http://physics.bu.edu/~redner/pubs/pdf/organization.pdf> (дата обращения 16.12.2014).
6. Dereich S., Morters P. Random networks with sublinear preferential attachment: Degree evolutions // *Electronic Journal of Probability*, 2009. – V.14. – P. 1222-1267.
7. Задорожный В.Н. Случайные графы с нелинейным правилом предпочтительного связывания // *Проблемы управления*, 2010. – № 6. – С. 2-11.
8. Задорожный, В. Н. Переходные процессы в растущих сетях с нелинейным правилом предпочтительного связывания /В. Н. Задорожный, В. А. Бадрызлов // *Омский научный вестник*. – 2016. – №1 (145). – С. 95-99.
9. Бадрызлов, В.А. Генерация случайного графа с предпочтительным связыванием v.1» // *Хроники объединенного фонда электронных ресурсов «Наука и образование»*. 2017. №10(101). С.12.