

**ИМИТАЦИОННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОЛОВОЗРАСТНОЙ СТРУКТУРЫ
УЧАСТНИКОВ ПРОГРАММ НЕГОСУДАРСТВЕННОГО ПЕНСИОННОГО
СТРАХОВАНИЯ****О.Н. Яркова (Оренбург)**

Пенсионные фонды в настоящее время представляют собой один из наиболее важных институтов на финансовых рынках. Пенсионные фонды обладают высоким инвестиционным потенциалом и дополняют роль государства, позволяя гражданам, достигшим пенсионного возраста, поддерживать свое финансовое положение на достойном уровне. Указанные аспекты оправдывают интерес, возникший в последние годы к изучению вопросов оптимального управления пенсионными схемами (планами).

В научной литературе уделяется много внимания исследованиям в сфере пенсионного страхования. Так, вопросами моделирования финансовых средств для различных пенсионных схем (PAYG, DB, DC) занимались Alonso-García J. и Devolder P.[7], Fenge R.[13], Van Praag B. and Cardoso P.[21], Asch et al. [9], Haberman S., Vigna E. [14], Piekola H., Deschryvere M. [18], MacDonald B.J. and Cairns A.J.G.[17], Cairns A.J.G.[11], Josa-Fombellida and Rincon-Zapatero [15], Dufresne D. [12]. В указанных работах на основе марковских моделей проводятся исследования финансового капитала пенсионного фонда в динамике, где основной целью компании выступает сохранение активов фонда как можно более близкими к актуарным обязательствам, в том числе, за счет инвестирования. Такой подход к моделированию пенсионных схем позволяет учитывать только количественный состав участников пенсионных планов. В то же время при планировании пенсионных планов, оценке пенсионных резервов, оценке актуарных рисков НПФ в среднесрочной и долгосрочной перспективе важное значение имеет половозрастная структура участников пенсионных схем, оказывающая существенное влияние на пополнение резервного фонда и его расходование.

Модели динамики половозрастной структуры населения широко представлены в исследованиях демографических процессов [6, 16]. В работах Волкова А.Г. [1], Макарова В.Л. [4, 5], Silverman E. [19] описываются имитационные модели для прогнозирования основных демографических процессов – рождаемости, смертности, миграции. Математико-статистические аспекты моделирования половозрастной структуры населения отражены в работах Antonczyk D. [8], Kuang B. Y. D. [16]. В указанных исследованиях одним из аспектов моделирования является прогнозирование процесса рождаемости, индивиды входят в систему в возрасте 0 лет, что не характерно для моделирования негосударственных пенсионных схем. В пенсионном страховании имитационное моделирование для описания динамических процессов использовали Лычкина Н.Н.[2, 3], Морозова Ю.А.[3]. Однако представленные авторами модели не учитывают половозрастные характеристики участников пенсионных планов и предназначены для моделирования государственной пенсионной системы в целом, имеющей существенные отличия от пенсионных планов негосударственных организаций.

В связи с этим задача разработки инструментария для прогнозирования числа и половозрастной структуры активных участников пенсионных программ является актуальной и обладает научной и практической значимостью.

Имитационная модель оценки половозрастной структуры участников пенсионных программ НПФ

Для участников схемы негосударственного пенсионного обеспечения (НПО) определены следующие зависимости, отражающие динамику численности участников соответствующего возраста:

$$\begin{aligned}
M_{t+1}^{\text{CNSPV}}(x, g) &= M_t^{\text{CNSPV}}(x-1, g) + M_t^{\text{newNSPV}}(x, g) - \\
N_t^{\text{TNNSPV}}(x, g) - N_t^{\text{DpNSPV}}(x, g) - N_t^{\text{disNSPV}}(x, g), t = 0, 1, \dots, T-1, \\
x &= x^{\text{inNSPV}}, x^{\text{inNSPV}} + 1, \dots, x^{\text{PenIn}}, g = \{0, 1\}, \\
M_t^{\text{CNSPV}}(x^{\text{inNSPV}} - 1, g) &= 0,
\end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned}
x^{\text{PenIn}} &= \begin{cases} K1, \text{ если } g = 1, \\ K2, \text{ если } g = 0, \end{cases} \tag{2} \\
g &= \begin{cases} 1, \text{ если участник женского пола,} \\ 0, \text{ если участник мужского пола,} \end{cases} \tag{3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N_t^{\text{DpNSPV}}(x, g) &= F1(M_t^{\text{CNSPV}}(x, g) \cdot \mu(x, g)), \\
t = 1, 2, \dots, T, \quad x &= x^{\text{inNSPV}}, x^{\text{inNSPV}} + 1, \dots, x^{\text{PenIn}}, g = \{0, 1\}, \tag{3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N_t^{\text{disNSPV}}(x, g) &= H(M_t^{\text{CNSPV}}(x, g)), \\
t = 1, 2, \dots, T, \quad x &= x^{\text{inNSPV}}, x^{\text{inNSPV}} + 1, \dots, x^{\text{PenIn}}, g = \{0, 1\}, \tag{4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_0^{\text{CNSPV}}(x, g) &= M^{\text{CNSPV}}(x, g), \\
x &= x^{\text{inNSPV}}, x^{\text{inNSPV}} + 1, \dots, x^{\text{PenIn}}, g = \{0, 1\}, \tag{5}
\end{aligned}$$

где T – период моделирования, лет; x – переменная, характеризующая возраст участника; g – признак, характеризующий пол участника; $M_t^{\text{CNSPV}}(x, g)$ – количество активных участников возраста x пола g , имеющих договор НПО в Фондом в момент времени t ; $N_t^{\text{DpNSPV}}(x, g)$ – количество умерших среди активных участников схемы НПО возраста x пола g в момент времени t ; $N_t^{\text{TNNSPV}}(x, g)$ – количество активных участников возраста x пола g , расторгнувших договор НПО в момент времени t ; $M_t^{\text{newNSPV}}(x, g)$ – количество активных участников возраста x пола g , заключивших договор НПО в момент времени t ; $N_t^{\text{disNSPV}}(x, g)$ – количество участников возраста x пола g перешедших в категорию пенсионеров по причинам не связанным с достижением пенсионного возраста; x^{inNSPV} – возраст входа участников в пенсионную схему НПО; x^{PenIn} – возраст выхода участников на пенсию по возрасту, равен $K1$ лет для мужчин и $K2$ лет для женщин; $F1(Y)$ – случайная функция, характеризующая смертность среди Y активных участников; $\mu(x, g)$ – вероятность смерти участника возраста x пола g определяется по данным таблицы смертности; $H(Y)$ – случайная функция, характеризующая количество участников перешедших в категорию пенсионеров по причинам не связанным с достижением пенсионного возраста, например, в связи с утратой трудоспособности по инвалидности, оценивается на основе статистической информации организации или региона.

Приведенные зависимости для активных участников схемы НПО строятся отдельно для группы мужчин и для группы женщин.

Для оценки динамики численности пенсионеров используются следующие зависимости:

$$N_{t+1}^{\text{PBNSPV}} = N_t^{\text{PBNSPV}} + N_t^{\text{newPBNSPV}} - N_t^{\text{penDpNSPV}} - N_t^{\text{endNSPV}}, t = 0, 1, \dots, T-1, \tag{6}$$

$$N_t^{\text{penDpNSPV}} = F2(\mu \cdot N_t^{\text{PBNSPV}}), t = 1, 2, \dots, T, \tag{7}$$

$$N_t^{\text{newPBNSPV}} = \sum_g M_t^{\text{CNSPV}}(x^{\text{penIn}}, g) + \sum_{x, g} N_t^{\text{disNSPV}}(x, g), t = 1, 2, \dots, T, \tag{8}$$

$$N_0^{\text{PBNSPV}} = N^{\text{PBNSPV}} \tag{9}$$

где N_t^{PBNSPV} – количество пенсионеров, получающих пенсию в рамках договоров НПО в момент времени t ; $N_t^{penDpNSPV}$ – количество умерших пенсионеров, участников схемы НПО в момент времени t ; $N_t^{endNSPV}$ – количество завершившихся в момент времени t договоров, в связи с исполнением обязательств фондом в полном объеме по срочным договорам НПО; μ – вероятность смерти для лиц пенсионного возраста, определяется по таблице смертности; $F2(Y)$ – функция, отражающая смертность среди Y пенсионеров.

Функции $F1(Y)$, $F2(Y)$, $H(Y)$ моделируются на основе таблиц распределения X лиц по возрастам по статистическим данным организации (при наличии достаточных данных) или региона (на основе статистических сборников) и таблицам смертности.

Случайная величина $N_t^{DpNSPV}(x, g)$ предполагается распределенной по закону Пуассона с параметром $M_t^{CNSPV}(x, g) \cdot \mu(x, g)$. Случайная величина $N_t^{penDpNSPV}$ предполагается распределенной по закону Пуассона с параметром $N_t^{PBNSPV} \cdot \mu$. Случайная величина $N_t^{disNSPV}(x, g)$ – предполагается распределенной по Пуассоновскому закону с параметром $\lambda^{dis} \cdot M_t^{CNSPV}(x, g)$, где λ^{dis} – вероятность для индивида выйти на пенсию по причинам не связанным с достижением пенсионного возраста.

Параметры модели, характеризующие величины: N_t^{TNSPV} , $N_t^{endNSPV}$, $M_t^{newNSPV}$ предполагаются стационарными случайными процессами и моделируются методом обратной функции на основе одномерной эмпирической функции распределения, построенной по наблюдаемой траектории соответствующего процесса для анализируемой компании.

Алгоритм имитационного моделирования

Входные данные: T – период исследования; L – количество имитаций; x^{inNSPV} – минимальный возраст входа в пенсионную программу; $K1$, $K2$ – возраст выхода на пенсию женщин и мужчин соответственно; $M^{CNSPV}(x, g)$ – начальные распределения участников пенсионной программы по возрастам, для $x = x^{inNSPV}, x^{inNSPV} + 1, \dots, x^{PenIn}$, $g = \{0, 1\}$; $\mu(x, g)$ – вероятность смерти индивида возраста x пола g , для $x = x^{inNSPV}, x^{inNSPV} + 1, \dots, x^{PenIn}$, $g = \{0, 1\}$; λ^{dis} – вероятность для индивида выхода на пенсию по причинам не связанным с достижением пенсионного возраста; N^{PBNSPV} – количество пенсионеров в начальный момент времени; ρ – параметр биномиального распределения, характеризующий долю женщин активного возраста поступающих в пенсионную схему, оценивается экспертно или выбирается на основе статистической информации о соотношении женщин и мужчин активного возраста в регионе; ξ – функция распределения, характеризующая возраст и пол нового активного участника пенсионной программы, оценивается экспертно; статистические данные наблюдений: по количеству расторжений договоров в единицу времени – обозначим закон распределения случайной величины – ξ^{TNSPV} ; по количеству завершившихся в единицу времени договоров, в связи с исполнением обязательств фондом в полном объеме по срочным договорам НПО – $\xi^{endNSPV}$; по количеству поступающих новых членов в пенсионную схему – $\xi^{newNSPV}$.

Шаг 1: $l=1$;

шаг 2: $N_0^{PBNSPV} = N^{PBNSPV}$;

шаг 3: $M_0^{CNSPV}(x, g) = M^{CNSPV}(x, g)$, для $x = x^{inNSPV}, x^{inNSPV} + 1, \dots, x^{PenIn}$, $g = \{0, 1\}$;

шаг 3: $t = 1$;

шаг 4: $M_t^{CNSPV}(x^{inNSPV} - 1, g) = 0$;

шаг 5: для $x = x^{\text{inNSPV}}, x^{\text{inNSPV}} + 1, \dots, x^{\text{PenIn}}, g = \{0,1\}$ методом обратной функции генерируются $N_t^{\text{DpNSPV}}(x, g) = \left[\text{Puass}(M_t^{\text{CNSPV}}(x, g) \cdot \mu(x, g)) \right]^{-1}$;

шаг 6: для $x = x^{\text{inNSPV}}, x^{\text{inNSPV}} + 1, \dots, x^{\text{PenIn}}, g = \{0,1\}$ методом обратной функции генерируются $N_t^{\text{disNSPV}}(x, g) = \left[\text{Puass}(\lambda^{\text{dis}} M_t^{\text{CNSPV}}(x, g)) \right]^{-1}$;

шаг 7: Генерируется методом обратной функции случайная величина N_t^{TNSPV} , распределенная по закону ξ^{TNSPV} ;

шаг 7.1: для каждого $n = 1, 2, \dots, N_t^{\text{TNSPV}}$: $N_t^{\text{TNSPV}}(x_n, g_n) = 0$;

шаг 7.2: для каждого $n = 1, 2, \dots, N_t^{\text{TNSPV}}$:

шаг 7.2.1: Генерируется методом обратной функции случайная величина g_n - пол n-го участника, распределенная по биномиальному закону с параметром ρ ;

шаг 7.2.2 Для текущего распределения активных участников по возрастам $M_t^{\text{CNSPV}}(x, g_n)$ строится эмпирическая функция распределения ξ^{CNSPV} ;

шаг 7.2.3 Генерируется методом обратной функции случайная величина x_n - возраст участника - случайная величина распределенная по закону распределения ξ^{CNSPV} ;

шаг 7.2.4 $N_t^{\text{TNSPV}}(x_n, g_n) = N_t^{\text{TNSPV}}(x_n, g_n) - 1$;

шаг 8: Генерируется методом обратной функции случайная величина N_t^{newNSPV} , распределенная по закону ξ^{newNSPV} ;

шаг 8.1: для каждого $n = 1, 2, \dots, N_t^{\text{newNSPV}}$: $N_t^{\text{newNSPV}}(x_n, g_n) = 0$;

шаг 8.2: для каждого $n = 1, 2, \dots, N_t^{\text{newNSPV}}$:

шаг 8.2.1: Генерируется методом обратной функции случайная величина g_n - пол n-го участника, распределенная по биномиальному закону с параметром ρ ;

шаг 8.2.3 Генерируется методом обратной функции случайная величина x_n - возраст участника - случайная величина распределенная по закону распределения ξ ;

шаг 8.2.4 $N_t^{\text{newNSPV}}(x_n, g_n) = N_t^{\text{newNSPV}}(x_n, g_n) + 1$;

шаг 9: Генерируется методом обратной функции случайная величина N_t^{TNSPV} , распределенная по закону ξ^{TNSPV} ;

шаг 10: для каждого $n = 1, 2, \dots, N_t^{\text{TNSPV}}$: $N_t^{\text{TNSPV}}(x_n, g_n) = 0$;

шаг 11: для каждого $n = 1, 2, \dots, N_t^{\text{TNSPV}}$:

шаг 11.1: Генерируется методом обратной функции случайная величина g_n - пол n-го участника, распределенная по биномиальному закону с параметром ρ ;

шаг 11.2 Генерируется методом обратной функции случайная величина x_n - возраст участника, распределенная по закону ξ ;

шаг 11.3 $N_t^{\text{TNSPV}}(x_n, g_n) = N_t^{\text{TNSPV}}(x_n, g_n) + 1$

шаг 12: Для $x = x^{\text{inNSPV}}, x^{\text{inNSPV}} + 1, \dots, x^{\text{PenIn}}, g = \{0,1\}$:

$$M_{t+1}^{\text{CNSPV}}(x, g) = M_t^{\text{CNSPV}}(x-1, g) + M_t^{\text{newNSPV}}(x, g) - N_t^{\text{TNSPV}}(x, g) - \\ - N_t^{\text{DpNSPV}}(x, g) - N_t^{\text{disNSPV}}(x, g);$$

шаг 13: Методом обратной функции генерируется:

$$N_t^{\text{penDpNSPV}} = \left[\text{Puass}(\mu \cdot N_t^{\text{PBNSPV}}) \right]^{-1};$$

$$N_t^{\text{newPBNSPV}} = \sum_g M_t^{\text{CNSPV}}(x^{\text{penIn}}, g) + \sum_{x, g} N_t^{\text{disNSPV}}(x, g)$$

шаг 14: ;

шаг 15: Генерируется методом обратной функции случайная величина N_t^{endNSPV} ,
распределенная по закону ξ^{endNSPV} ;

$$\text{шаг 16: } N_{t+1}^{\text{PBNSPV}} = N_t^{\text{PBNSPV}} + N_t^{\text{newPBNSPV}} - N_t^{\text{penDpNSPV}} - N_t^{\text{endNSPV}};$$

шаг 17: Если $t < T$, то $t = t + 1$ и идти на шаг 4;

шаг 18: Если $l < L$, то $l = l + 1$ и идти на шаг 2;

Конец алгоритма.

Апробация модели (вычислительный эксперимент)

В качестве исходных данных выбраны: период исследования 12 лет; минимальный возраст входа в пенсионную программу по негосударственному пенсионному обеспечению 5 лет; возраст выхода на пенсию женщин – 55, мужчин - 60; начальное распределение участников пенсионной программы по возрастам представлено на рисунке 1; вероятность смерти индивида определяется на основе данных таблицы смертности по России; $N^{\text{PBNSPV}} = 468$; $\rho = 0.56$. Статистические данные собраны за период с 01.2016 по 01.2019.

Результаты вычислительных экспериментов показали, что для достижения приемлемой точности результатов моделирования достаточно 10000 имитаций.

Результаты моделирования половозрастной структуры участников, к примеру, для $t=6$ лет, $t=12$ лет представлены на рисунке 2. На рисунке 3 представлена динамика количества участников пенсионной программы для разных возрастов: 25 лет, 35, 45, 55 (и 60 лет для мужчин).



Рис. 1 – Начальное распределение половозрастной структуры участников

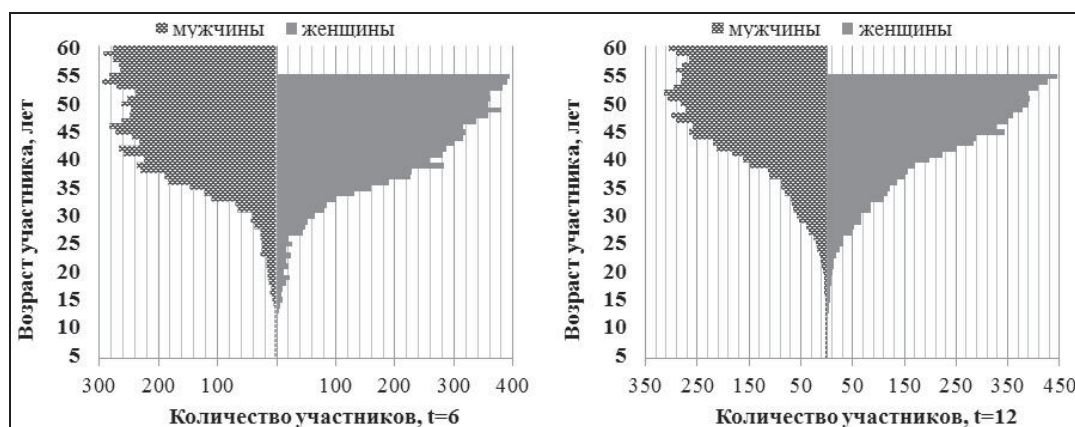


Рис. 2 – Прогноз распределения половозрастной структуры участников

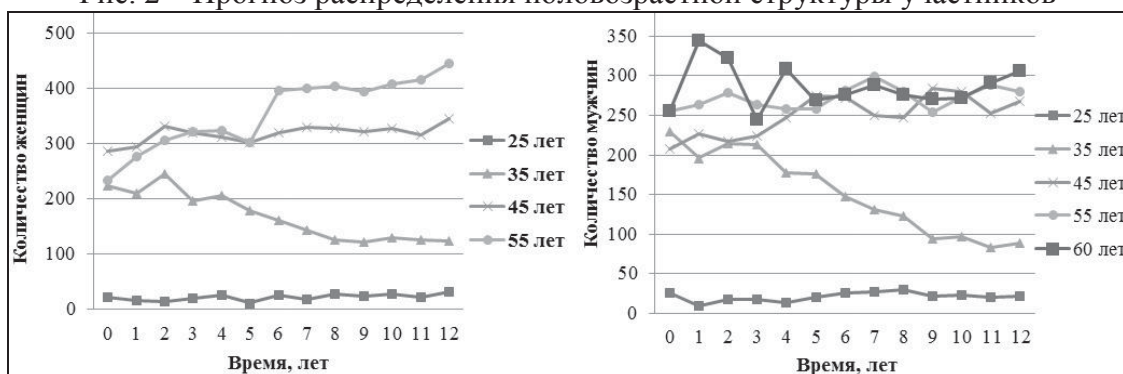


Рис. 3 – Динамика количества активных участников пенсионного плана для различных возрастов

Анализ показал, что со временем наблюдается рост количества участников женского пола старше 45 лет. Количество участников возрастной категории 30-40 лет с течением времени сокращается. Количество участников 16-30 лет сохраняется примерно на одном уровне.

На рисунке 4 представлены графики динамики показателей пенсионной программы по числу участников для группы пенсионеров.

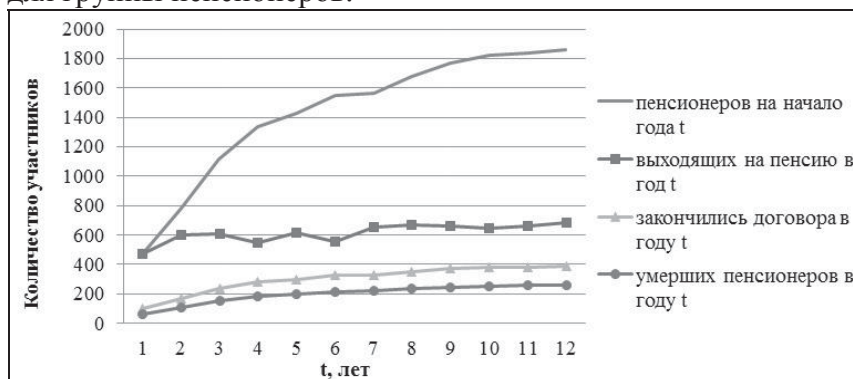


Рис. 4 – графики динамики показателей пенсионной программы по числу участников для группы пенсионеров

Наблюдается увеличение количества пенсионеров. С течением времени незначительно возрастает интенсивность выхода на пенсию участников. Наблюдается рост смертности, что обусловлено, прежде всего, увеличивающимся количеством пенсионеров.

Заключение

В работе предложена имитационная модель для прогнозирования динамики количества и половозрастной структуры участников пенсионной программы. Модель позволяет на основе статистической информации по количеству расторжений договоров НПФ, количеству завершающихся договоров, в связи с исполнением обязательств фондом в полном объеме по срочным договорам НПО, количеству поступающих новых членов в пенсионную схему в единицу

времени, экспертной информации относительно распределения возрастов новых участников пенсионной программы, статистической информации о смертности участников осуществлять средне- и долгосрочное прогнозирование числа участников пенсионных планов, анализировать их половозрастную структуру. В модели учитывается стохастическая природа заключения и расторжения договоров с фондом, смертности участников пенсионной программы, в том числе с учетом возрастных характеристик, выхода на пенсию по причинам не связанным с достижением пенсионного возраста. Использование предложенного подхода в моделях оценки динамики пенсионных резервов [22] позволит учитывать разницу в уровне отчислений участников разных возрастов и пола в пенсионный фонд, адекватно оценивать динамику выхода на пенсию участников пенсионных планов по возрасту, по инвалидности, смертность участников, что позволит оценивать финансовые и актуарные риски НПФ.

Литература

1. Волков А.Г. Избранные демографические труды: сборник научных статей. М., Изд. дом ВШЭ, 2014. 567 с.
2. Лычкина Н.Н. Динамическое моделирование процессов развития пенсионной системы / Прикладная информатика. – 2013. - № 3(45). – С. 99-110.
3. Лычкина Н. Н., Морозова Ю. А. Мультимодальный комплекс пенсионной системы как инструмент решения задач реформирования в социальной сфере // Вестник университета. М.: ГУУ.–2011. –№ 15. –С. 187–192.
4. Макаров В.Л., Бахтизин А.Р., Сушко Е.Д. Моделирование демографических процессов с использованием агент-ориентированного подхода / Федерализм. – 2014. – № 4(76). – С. 37-46.
5. Макаров В.Л., Бахтизин А.Р., Сушко Е.Д. Имитация особенностей репродуктивного поведения населения в агент-ориентированной модели региона Экономика региона. — 2015. — №3. — С. 312-322. doi: 10.17059/2015-3-25
6. Назарова А.А., Носова М.Г. Метод передвижки возрастных групп в демографии и его приложения / Вестник томского государственного университета. – 2009. – № 3(8). – С. 67 - 74.
7. Alonso-García, J., Devolder, P.: Optimal mix between pay-as-you-go and funding in a multi-generational overlapping generations model. ASTIN Bulletin: The Journal of the IAA. – 2015. – Vol. 45. – № 3. – p. 551-575.
8. AntonczykD., FitzenbergerB., MammencE., Yu K. A nonparametric approach to identify age, time, and cohort effects / Journal of Statistical Planning and Inference. – 2020. – № 204. –p. 96 -115. doi: 10.1016/j.jspi.2019.04.009
9. Asch B., Haider S. J., Zissimopoulos J.: Financial incentives and retirement: evidence from federal civil service workers / Journal of Public Economics. – 2005. – № 89. – p. 427-440.
10. Burch T.K. Model-Based Demography. Essays on Integrating Data, Technique and Theory. Demographic Research Monographs (A Series of the Max Planck Institute for Demographic Research). Springer, Cham, 2018. 203 p. doi: 10.1007/978-3-319-65433-1
11. Cairns A.J.G.: Some notes on the dynamics and optimal control of stochastic pension fund models in continuous time. Astin Bulletin. – 2000. - № 30. – p. 19–55.
12. Dufresne D. Moments of pension fund contributions and fund levels when rates of return are random / Journal of the Institute of Actuaries. – 1988. – № 115. – p. 535—544.
13. Fenge R. Pareto-efficiency of the Pay-as-you-go Pension System with Intergenerational Fairness / Finanzarchiv N. F. – 1995. – № 52. – p. 357 - 363.
14. Haberman S., Vigna E.: Optimal investment strategy for defined contribution pension schemes / Insurance: Mathematics and Economics. – 2001. – № 28. – p. 233–262.
15. Josa-Fombellida R., Rincón-Zapatero J.P. Minimization of risks in pension funding by means of contribution and portfolio selection / Insurance: Mathematics and Economics. – 2001. – № 29. – p. 35–45.

16. KuangBy D., NielsenB., Nielsen J. P. Identification of the age-period-cohort model and the extended chain-ladder model / *Biometrika*.–2008. – Vol. 95, Issue 4. –p. 979 - 986 doi: 10.1093/biomet/asn026
17. MacDonald B.J., Cairns A.J.G.: Three retirement decision models for defined contribution pension plan members: A simulation study / *Insurance: Mathematics and Economics*, Elsevier. – 2011. – № 48(1). – p. 1-18.
18. Piekkola H., Deschryvere M. Retirement decisions and option values: their application regarding finland, belgium and Germany / *The Research Institute of the Finnish Economy Discussion Paper 951*, Helsinki, Finland, 2004.
19. Silverman E., Bijak J., Hilton J., Cao V. D. & Noble J.. When Demography Met Social Simulation: A Tale of Two Modeling Approaches / *Journal of Artificial Societies and Social Simulation (JASSS)*, 2013. – № 16 (4) 9. doi: 10.18564/jasss.2327
20. Stillwell J., Clarke M. (Eds.) *Population Dynamics and Projection Methods / Understanding Population Trends and Processes*.–2011. – Vol. 4. – 222p. doi: 10.1007/978-90-481-8930-4
21. Van Praag B., Cardoso P. The mix between pay-as-you-go and funded pensions and what demography has to do with it / *CESifo Working Paper No. 865*, 2003.
22. Yarkova O.N., Renner A.G. Modeling the Ruin Probability of a Non-state Pension Fund Taking into Account Risky Investments / *Smart Innovation, Systems and Technologies*.–2020.– Vol. 138. – P. 528-539. doi: 10.1007/978-3-030-15577-3_50