

УДК: 519.711.3

Целенаправленная трансформация математических моделей на основе стратегической рефлексии

С. А. Антипова¹, А. А. Воробьев^{2,а}

¹ Военная академия материально-технического обеспечения имени генерала армии А. В. Хрулёва, Россия, 199034, г. Санкт-Петербург, наб. Макарова, д. 8

² Санкт-Петербургский институт информатики и автоматизации Российской академии наук, Россия, 199178, г. Санкт-Петербург, 14-я линия, д. 39

E-mail: ^а maestro265@yandex.ru

Получено 31.05.2019, после доработки — 05.08.2019.

Принято к публикации 30.08.2019.

Исследование сложных процессов в различных сферах человеческой деятельности традиционно основывается на использовании математических моделей. В современных условиях разработка и применение подобных моделей существенно упрощаются наличием быстродействующих средств вычислительной техники и специализированных инструментальных средств, позволяющих, по существу, конструировать модели из заранее подготовленных модулей. Несмотря на это, известные проблемы, связанные с обеспечением адекватности модели, достоверности исходных данных, реализацией на практике результатов моделирования, чрезмерно большой размерностью исходных данных, совместным применением достаточно разнородных математических моделей в условиях усложнения и интеграции моделируемых процессов, приобретают растущую актуальность. Еще более критичными могут являться внешние ограничения, накладываемые на значение оптимизируемого функционала и нередко не достижимые в рамках построенной модели. Логично предположить, что для выполнения этих ограничений необходима целенаправленная трансформация исходной модели, то есть переход к математической модели с заведомо «улучшенным» решением. Новая модель, очевидно, будет иметь иную внутреннюю структуру (совокупность параметров и их взаимосвязи), а также иные форматы (области определения) исходных данных. Исследованные авторами возможности целенаправленного изменения первоначальной модели основаны на реализации идеи стратегической рефлексии.

В математическом плане практическая реализация авторского замысла оказывается наиболее сложной при использовании имитационных моделей, для которых алгоритмы поиска оптимальных решений имеют известные ограничения, а исследование на чувствительность в большинстве случаев весьма затруднительно. На примере рассмотрения достаточно стандартной дискретно-событийной имитационной модели в статье приводятся типовые методические приемы, позволяющие осуществить ранжирование переменных параметров по чувствительности и в дальнейшем расширить область определения переменного параметра, к которому имитационная модель наиболее чувствительна. При переходе к «улучшенной» модели возможно также одновременное исключение из нее параметров, влияние которых на оптимизируемый функционал несущественно, и, наоборот, введение в модель новых параметров, соответствующих реальным процессам.

Ключевые слова: переменные параметры, математическая модель, оптимизируемый функционал, стратегическая рефлексия, чувствительность модели

Работа выполнена в рамках бюджетной темы № 0073-2019-0004.

UDC: 519.711.3

The purposeful transformation of mathematical models based on strategic reflection

S. A. Antipova¹, A. A. Vorobiev^{2,a}

¹ Military Educational Institution of Logistics named after General of the Army A. V. Khrulyov,
8 Makarova Embankment, St. Petersburg, 199034, Russia

² St. Petersburg Institute for Informatics and Automation of the Russian Academy of Sciences,
39 14th Line, St. Petersburg, 199178, Russia

E-mail: ^a maestro265@yandex.ru

Received 31.05.2019, after completion — 05.08.2019.

Accepted for publication 30.08.2019.

The study of complex processes in various spheres of human activity is traditionally based on the use of mathematical models. In modern conditions, the development and application of such models is greatly simplified by the presence of high-speed computer equipment and specialized tools that allow, in fact, designing models from pre-prepared modules. Despite this, the known problems associated with ensuring the adequacy of the model, the reliability of the original data, the implementation in practice of the simulation results, the excessively large dimension of the original data, the joint application of sufficiency heterogeneous mathematical models in terms of complexity and integration of the simulated processes are becoming increasingly important. The more critical may be the external constraints imposed on the value of the optimized functional, and often unattainable within the framework of the constructed model. It is logical to assume that in order to fulfill these restrictions, a purposeful transformation of the original model is necessary, that is, the transition to a mathematical model with a deliberately improved solution. The new model will obviously have a different internal structure (a set of parameters and their interrelations), as well as other formats (areas of definition) of the source data. The possibilities of purposeful change of the initial model investigated by the authors are based on the realization of the idea of strategic reflection. The most difficult in mathematical terms practical implementation of the author's idea is the use of simulation models, for which the algorithms for finding optimal solutions have known limitations, and the study of sensitivity in most cases is very difficult. On the example of consideration of rather standard discrete-event simulation model the article presents typical methodological techniques that allow ranking variable parameters by sensitivity and, in the future, to expand the scope of definition of variable parameter to which the simulation model is most sensitive. In the transition to the “improved” model, it is also possible to simultaneously exclude parameters from it, the influence of which on the optimized functional is insignificant, and vice versa — the introduction of new parameters corresponding to real processes into the model.

Keywords: variable parameters, mathematical model, optimized functionality, strategic reflection, sensibility of model

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2019, vol. 11, no. 5, pp. 815–831 (Russian).

The work was supported by Russian Foundation for Basic Research, research project No. 0073-2019-0004.

1. Введение

С давних времен человечество успешно применяет модели в различных сферах своей жизнедеятельности. С середины XVII века, с изобретением Ньютоном и Лейбницем методов дифференциального исчисления, растущую популярность постепенно стало приобретать математическое моделирование. Стремительный скачок в развитии математического моделирования как теоретического раздела математики произошел в годы Второй мировой войны и в последующий период, в эпоху появления и развития теории исследования операций. Однако вплоть до 30–40-х годов XX века применение математических моделей существенно сдерживалось возможностями средств производства вычислений. Созданные вычислительные бюро, оборудованные сотнями арифмометров и использующие вспомогательные таблицы, имели весьма ограниченные возможности. «Кораблестроительные расчеты или расчеты, связанные с постройкой плотин больших электростанций, занимают месяцы и даже годы работы специальных вычислительных бюро...», — вспоминал академик АН СССР А. Н. Колмогоров. Возникновение математической теории вычислений также не позволяло кардинально решить проблему [Колмогоров, 1988].

Развитие средств вычислительной техники весьма значительно расширило практические возможности математического моделирования. Появились и бурно развиваются специализированные инструментальные средства, предназначенные для создания и применения математических моделей в народном хозяйстве, в экономике и в военном деле. Широко известны многочисленные примеры успешного применения математических моделей в самых различных приложениях. В современных условиях усложнение объектов исследования, стремительная интеграция технологических, социальных, экономических, политических и других процессов по-прежнему определяют актуальность дальнейшего развития математических методов и моделей, преимущественно в прикладных аспектах [Новиков, 2016].

Существенная зависимость приложений математического моделирования от возможностей средств вычислительной техники привела, на основе поверхностного понимания методологии современного математического моделирования [Самарский, 1979, 2005], к ошибочному толкованию исторических аспектов теории, возникшей будто бы только в 1970-х годах [Ковеня, 2002]. Корректно говорить о новом поколении математических моделей, использующих методы и инструментальные средства формирования моделей в автоматизированном режиме, на основе применения языков моделирования, существенно отличающихся от обычных языков программирования своей декларативной природой [Ильин, 2010; Никольский и др., 2005; Рыжаков, Щербина, 2006; Самарский, 1979, 2005; Geoffrion, 2006; Kallrath, 2003].

Менее известны «провальные» факты (число которых также значительно) неудачного применения математических моделей, а также причины возникновения этих фактов. Многократно повторяющиеся с возрастающей динамикой в процессе развития теории математического моделирования периоды «завышенных ожиданий» и «разочарования» (см. [Новиков, 2016]) также не всегда связывались с ограниченными возможностями математических моделей в удовлетворении вновь возникающих практических потребностей.

Далее проводится комплексный анализ факторов, непосредственно влияющих на границы практического применения математических моделей, и предлагаются новые подходы к существенному расширению этих границ.

2. Виды и отличительные признаки математических моделей

В известной литературе предлагается множество различных классификаций математических моделей, зачастую противоречивых и не имеющих практической значимости. Целесообразно руководствоваться достаточно известным разделением математических моделей по принципу построения (внутреннему содержанию) на:

- аналитические,
- имитационные,
- комбинированные (аналитико-имитационные или имитационно-аналитические).

Аналитические модели успешно применяются в различных сферах человеческой деятельности уже много сотен лет. Суть этого вида моделирования заключается в отображении реального процесса посредством конечного (как правило, сравнительно небольшого) множества параметров, между которыми существуют достаточно явные зависимости, заданные аналитически. Целями аналитического моделирования являются исследование динамики процесса и получение прогнозных оценок, или поиск рационального (оптимального) решения. Эти две цели взаимосвязаны, а соответствующие им задачи аналитического моделирования называются прямой и обратной, или задачами анализа и синтеза.

Постоянное усложнение и взаимная интеграция современных организационных, технологических, экономических, социальных и других процессов приводят к тому, что множество характеризующих процесс параметров многократно возрастает, в то время как зависимости между этими параметрами отсутствуют или могут задаваться лишь в неявном виде. Для исследования подобных процессов уже более 60 лет (а особенно активно — в последнее десятилетие) широко применяется имитационное моделирование¹ [Борщев, 2004].

Основным отличием имитационной модели является *одновременное применение* как детерминированных, так и переменных параметров. В [Максимей, 1988] с целью однозначного толкования они условно названы переменными (x_1, x_2, \dots, x_i) и параметрами (y_1, y_2, \dots, y_j) соответственно. В связи с этим под имитационной моделью следует понимать отдельную программу (совокупность программ, программный комплекс), позволяющую с помощью последовательности вычислений по определенным операционным правилам воспроизводить (имитировать) процессы функционирования отдельного объекта или системы в целом при условии воздействия различных, как правило, случайных факторов [Девятков, 2013].

Необходимо отметить, что нередко под имитационным моделированием понимают программную реализацию аналитической модели. Здесь подмена понятий основана на условном тождестве в ряде известных определений имитационного и компьютерного моделирования. Кроме того, имитационным моделированием также неверно называют визуализацию (например, на карте или в 3D-формате) результатов расчетов с использованием аналитической модели.

Несмотря на активное развитие теории и соответствующих программных средств, имитационное моделирование на практике по-прежнему применяется весьма ограниченно. Во многом это обусловлено известными пробелами в самой методологии моделирования, например сложностями обеспечения адекватности модели, достоверности исходных данных, оперативной подготовки больших объемов исходных данных и поиска оптимального (условно) решения.

Практические потребности применения аналитических и имитационных моделей определили наличие множества соответствующих инструментальных средств, существенно облегчающих разработку моделей. Например, широко известны средства аналитического моделирования (*MatLab, Statistica*) и имитационного (*AnyLogic, Arena, GPSS, IWebSim* и другие). Намечается тенденция к дальнейшему развитию инструментальных средств в части сочетания возможностей как аналитического, так и имитационного моделирования (*MatLab*).

В последние годы активно развивается достаточно новое направление математического моделирования, связанное с совместным (комбинированным) применением аналитических и имитационных моделей. Показательным в плане реализации комбинированных моделей является инструментальное средство *AnyLogistix*, реализующее, по существу, аналитико-имитационное моделирование [Ivanov, 2017]. Типовой задачей, решаемой с использованием этого средства, является поиск рациональных (пригодных) вариантов размещения поставщиков и потребителей (при заданных стационарных параметрах ряда из них). Задача легко трансформируется в актуальную и в военной сфере. Например — поиск рационального плана обеспечения войск боеприпасами при активном перемещении одного или двух соединений в ходе операции (рис. 1).

¹ В такой хронологии не учитывается так называемое статистическое имитационное моделирование, зародившееся во второй половине XIX века.

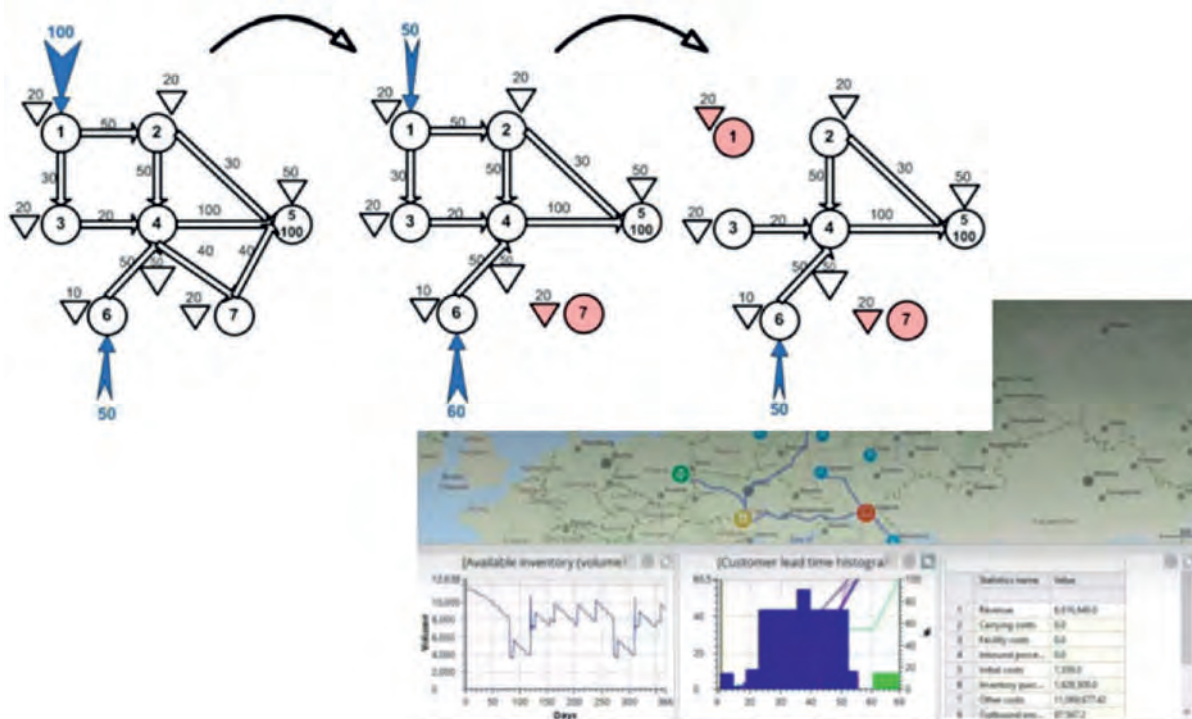


Рис. 1. Визуализация выбора вариантов размещения объектов складской сети (потребителей) при фиксированном расположении объектов производства

3. Особенности разработки и практического применения математических моделей

Теория создания и применения математических моделей, несмотря на достаточно высокую сложность этого циклического процесса, хорошо известна (рис. 2). Как и при создании любого нового изделия, наибольшие трудности возникают в процессе так называемой «доводки» модели, заключающейся в многократной ее доработке по результатам испытаний (апробации) и эксплуатации (применения).

Применение специализированных инструментальных средств позволяет в несколько раз сократить трудоемкость разработки математических моделей. Однако, с учетом постоянного усложнения моделируемых процессов, временные затраты на создание моделей по-прежнему остаются огромными. Несмотря на это, в большинстве случаев с должным сожалением приходится констатировать, что практическое применение математических моделей не приносит ожидаемого результата, а сами модели оказываются невостребованными. Неудачный опыт в области математического моделирования, как правило, является следствием одного из шести факторов (таблица 1). Чрезвычайная важность этих обстоятельств требует их подробного рассмотрения.

Чтобы понять проблемы практической реализации математических моделей, целесообразно сравнить саму модель с мельницей. Тогда можно наглядно представить, что модель является, по существу, переходным звеном между исходными данными (зерном) и конечным результатом (испеченным хлебом). Становится ясно, что проблемы могут возникнуть как собственно с моделью (жернова износились, низкая производительность), так и с зерном (мелкое, подмокшее) и/или с пекарней (пекарем).

Низкая адекватность модели — несоответствие ее реальным (моделируемым) процессам. Результат моделирования в этом случае будет отличаться от результатов реальных физических процессов. Недостаточная адекватность модели является весьма частым явлением и обусловлена «разрывом» между специалистами, обладающими знаниями о всех специфических особен-

ностях конкретных физических процессов и способными составить развернутое концептуальное и/или формализованное описание этих процессов, и непосредственными разработчиками математических моделей.

Следствием *недостаточной степени детализации* процесса является высокая погрешность результата моделирования. Вместе с тем стремление к учету большого количества параметров, определяющих современные процессы в различных сферах человеческой деятельности (см. [Новиков, 2016]), неизбежно приводит к созданию чрезмерно громоздких моделей, для которых на практике затруднительно подготовить необходимые исходные данные. Таким образом, создание математической модели является в определенной мере творческим занятием, так как требуется найти известный компромисс между декомпозицией и агрегированием моделируемого объекта. Усложнение (интеграция) исследуемых процессов обуславливает также необходимость отображения в модели достаточно большого числа разнородных факторов, нередко не связанных между собой явными (аналитическими) зависимостями. Современные инструментальные средства имитационного (аналитико-имитационного) моделирования предоставляют достаточно широкие возможности для формализованного описания и таких процессов.

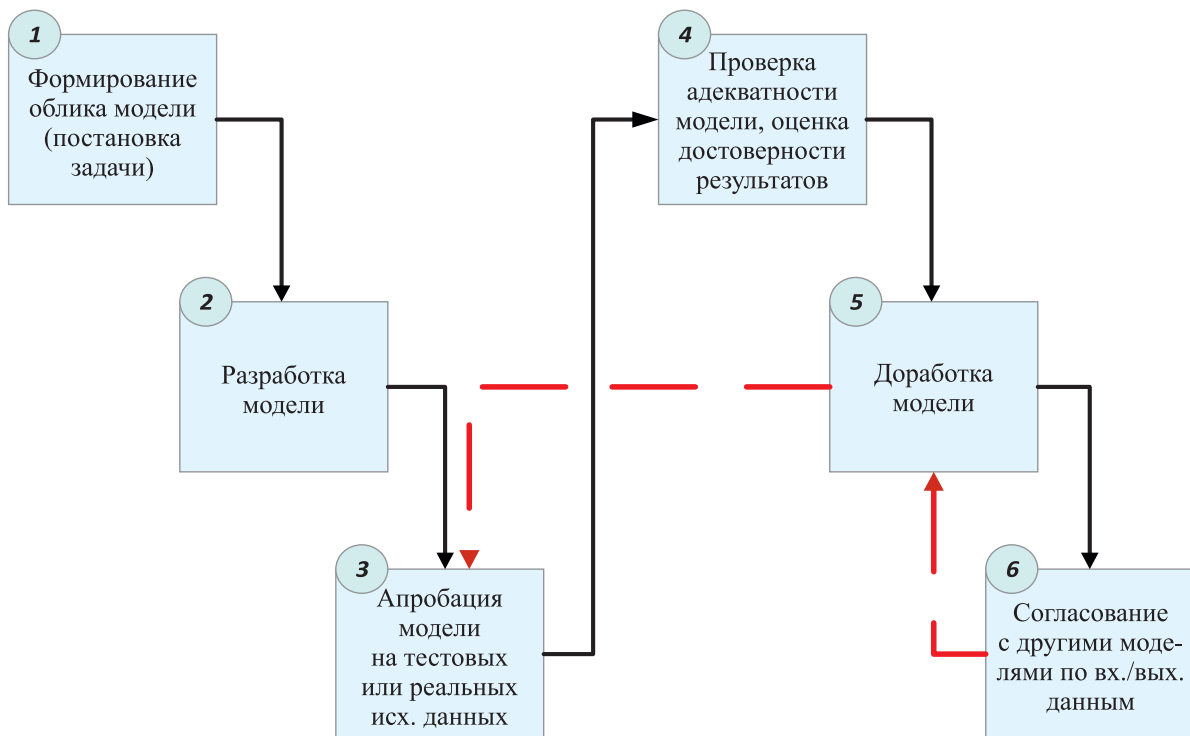


Рис. 2. Упрощенная схема разработки математических моделей

Таблица 1. Основные причины «провалов» в области математического моделирования

№ п/п	Что?	Что случилось?	Последствия
1	Математическая модель	недостаточная адекватность	недоверный результат моделирования
2		недостаточная степень детализации процесса	
3	Исходные данные	низкая достоверность исходных данных	невозможность применения модели
4		чрезмерный объем требуемых исходных данных	
5	Результаты моделирования	невозможность практической реализации результатов	чрезмерно высокие требования к квалификации пользователя
6		сложность применения модели	

Низкая достоверность исходных данных нередко имеет место при исследовании конфликтных ситуаций, когда информация об одной или нескольких сторонах конфликта является неполной (неопределенной), а также при применении различных прогнозных моделей в условиях отсутствия необходимых статистических данных. Если исключить достаточно высокую погрешность исходных данных не удастся, то при разработке математической модели проводят ее исследование на чувствительность. В дальнейшем стараются построение модели осуществлять таким образом, чтобы к исходным данным с недостаточной достоверностью она была наименее чувствительна.

Чрезмерный объем исходных данных является следствием излишней детализации модели, обусловленной желанием учета максимального числа параметров формализуемого процесса. Подготовка значительного объема требуемых исходных данных исключает оперативное применение модели и существенно ограничивает возможности ее практического использования. Таким образом, построение математической модели является в некоторой степени искусством, требующим нестандартного выбора между максимально возможным и достаточным множеством параметров процесса, учитываемых при его формализации. Успешным решением в плане снижения объема исходных данных, необходимых для моделирования, является подход к исключению параметров, к которым модель наименее чувствительна [Глаголев, 2012].

Невозможность практической реализации результатов характерна для ряда моделей, построенных с использованием, например, статистических или теоретико-игровых методов. В этом случае решение может иметь характер вида «с вероятностью 0.5 наступать тремя полками, с вероятностью 0.5 наступать пятью полками». Несмотря на то что в известной литературе этой проблеме уделяется много внимания (см., например, [Вентцель, 1972]), универсальных способов ее решения так и не найдено.

Модель также может быть достаточно *сложной*. В этом случае овладение особенностями ее практического применения может потребовать много времени. Иногда использование модели требует определенной квалификации пользователей, например знания достаточно специфических математических методов.

Решение названных шести известных проблем математического моделирования уже представляется непростым делом. Вместе с тем в современных условиях приходится сталкиваться еще и с новыми задачами. В работе [Новиков, 2016] названа новая проблема математического моделирования — *проклятие сложности*. Необходимость моделирования усложняющихся процессов, все чаще приобретающих междисциплинарный характер, неизбежно приводит к «громоздким» математическим моделям. Возникающие трудности существенно различны для аналитических и имитационных моделей. Для аналитических моделей актуальна интеграция нескольких частных моделей (в современной литературе такие комплексные модели называются суррогатными), использующих различные математические методы. Основные проблемы возникают в согласовании моделей, в том числе по входным и выходным данным, и в поиске оптимального решения существенно нелинейных моделей [Piin, 2016].

Для имитационных моделей их усложнение связано прежде всего с существенным увеличением количества переменных параметров, достигающим порядков 10^4 – 10^6 . Возникающие при этом трудности связаны с поиском глобального оптимума при наличии локальных экстремумов.

Очевидным образом усложнение математических моделей снова, как и почти столетие назад, приводит к чрезмерному увлечению вычислительных алгоритмов [Агошков, Лёзина, 2017; Ильин, 2010; Ковеня, 2002; Рыжаков, Щербина, 2006; Boyd et al., 2011; Nisan et al., 2009; Rzevski, Skobelev, 2014].

Существует, однако, еще одно обстоятельство, влияние которого на границы применения математического моделирования, вероятно, не менее значимо. Для понимания этого обстоятельства рассмотрим задачу, в общей постановке актуальную во многих отраслях народного хозяйства и в военной сфере.

Пусть из пункта A в B следует перевезти железнодорожным транспортом на производственную практику a групп студентов, численность которых составляет от b_1^* до b_2^* ($b_1^* < b_2^*$)

человек. В сутки между городами проходит c поездов, время в пути составляет в среднем d часов. В каждом поезде можно разместить до e ($e \geq b_2^*$) студентов. В сутки из пункта A можно отправить не более f ($f \geq e$) студентов. Размещение одной и той же группы студентов в разных поездах невозможно. Требуется определить минимальное время перевозки T .

Решение задачи современными методами математического моделирования не представляет видимых сложностей. Примем для определенности, что минимальное время перевозки составит 15 суток. Но что делать, если допустимым решением является значение, не превышающее, скажем, 9 суток?!

Формулировка этой проблемной ситуации, имеющей, в общем-то, глобальное значение для всей теории математического моделирования, приведена для частного случая еще полвека назад в [Герчук, 1965], однако до настоящего времени почти не исследовалась. Основные трудности получения допустимого решения связаны с необходимостью построения по какому-то определенному алгоритму новой математической модели, имеющей как иную внутреннюю структуру, так и, в большинстве случаев, иные форматы (граничные значения) исходных данных. Формирование и реализация процедуры целенаправленного перехода от одной математической модели к другой, имеющей заведомо лучшее решение, находятся за рамками теории математического моделирования [Герчук, 1965].

Современный уровень развития кибернетики, являющейся сегодня, без сомнения, междисциплинарной наукой, позволяет найти решение проблемы и, следовательно, существенно расширить перспективы практического применения методов математического моделирования.

4. Расширение границ применения математических моделей

Для целенаправленного перехода к новым математическим моделям, позволяющим получить существенно лучшие решения, продуктивной оказалась идея стратегической рефлексии. Рефлексия (от позднелат. *reflexio* «обращение назад») означает «обращение внимания субъекта на самого себя и на свое сознание, в частности на продукты собственной активности, а также какое-либо их переосмысление». Применение идеи рефлексии для исследования ситуаций конфликтной природы впервые предложено, по всей видимости, в работах Д. А. Новикова [Новиков, 2012; Новиков, Чхартишвили, 2013]. В области математического моделирования на основе использования теоретико-игровых методов под рефлексией автор предлагает понимать процесс и результат размышлений одной стороны (игрока, агента) о том, какие принципы принятия решений использует другая сторона (другой игрок, или агент) в рамках той информированности, которую он им приписывает в результате информационной рефлексии. При этом существенно различается информационная и стратегическая рефлексия.

Информационная рефлексия — процесс и результат размышлений игрока о том, каковы значения неопределенных параметров, что об этих значениях знают и думают его оппоненты (другие игроки). Стратегическая рефлексия — процесс и результат размышлений игрока о том, какие принципы принятия решений используют его оппоненты в рамках той информированности, которую он им приписывает в результате информационной рефлексии. Следовательно, информационная рефлексия обычно связана с недостаточной взаимной информированностью сторон (прежде всего — о тех или иных параметрах игровой ситуации), в то время как стратегическая рефлексия имеет место и при полной информированности.

Применение стратегической рефлексии на практике состоит в поиске путей целенаправленного изменения, прежде всего наиболее чувствительных (наибольшим образом влияющих на решение) параметров математической модели, с последующим переходом к новой модели. Чувствительность параметров определяется в ходе исследования модели, с помощью которой уже получено решение (неудовлетворительное).

Успешное применение подхода приведено в [Воробьев, Данеев, 2017; Vorobiev, Daneev, 2018] для моделей на основе матричных (биматричных) игр. Без особых трудностей идея может быть распространена на математические модели, построенные с применением методов линей-

ного программирования, так как альтернативной формой задания матричной игры является ее представление в виде двойственной задачи линейного программирования.

По всей видимости, такой подход может распространяться на аналитические модели, построенные на основе различных математических теорий, а также и на имитационные модели. При этом целенаправленная трансформация имитационных моделей будет отличаться рядом особенностей, обусловленных не явным заданием взаимосвязей между различными параметрами. Вследствие этого анализ параметров на чувствительность нередко приводит к достаточно уникальным результатам.

Следует отметить, что в области исследования имитационных моделей на чувствительность (*sensitivity analysis*) в современной отечественной литературе обнаруживается ряд серьезных заблуждений. Изначально в [Максимей, 1988, с. 140] было справедливо указано, что «универсальной процедуры такой проверки не существует». Вместе с тем для статистических имитационных моделей (основанных на применении генераторов псевдослучайных чисел), как для частного случая, там же указано: «...устойчивость результатов моделирования можно оценивать дисперсией значений отклика (по выбранной компоненте)», и приведен пример такой оценки. На основании неправильного трактования этого примера как общей закономерности в [Лычкина, 2005] приведена эта же формула расчета дисперсии, но теперь в качестве универсального подхода для исследования чувствительности имитационных моделей. И далее необоснованно указано, что «простота проведения анализа чувствительности в имитационном моделировании — одно из преимуществ этого метода». Это заявление многократно повторяется в ряде современных учебников по имитационному моделированию.

Вместе с тем очевидно, что указанный подход не срабатывает для дискретно-событийных имитационных моделей, моделей системной динамики и тем более для агентных имитационных моделей. В известных работах (например, [Манукян, 1993; Подгорный, Леонов, 2015; Сузов, Багатурия, 2011; Чевелев, 1991; Chen, Lee, 2011; Fu, 2002] и многих других), как правило, предлагаются новые методы исследования чувствительности статистических имитационных моделей, применяемых в различных прикладных областях. При этом работа [Седунов, 1998] (научный руководитель которой, д. ф.-м. н. Калашников В. В., одновременно и рецензент монографии [Максимей, 1988]) является одной из немногих отечественных работ, в которых изучаются методы оценивания чувствительности дискретно-событийных имитационных моделей. В диссертации обосновываются существенно ограниченные возможности практического применения известного метода инфинитезимального анализа возмущений (авторы — Хо, Сари) для исследования чувствительности параметров дискретно-событийных имитационных моделей и развиваются в прикладных аспектах подходы, основанные на применении метода отношения правдоподобия (авторы — Рейман и Вейс, Глин и Рубинштейн). В зарубежных исследованиях также уделяется большое внимание исследованию чувствительности дискретно-событийных имитационных моделей. Однако полученные результаты по-прежнему носят частный прикладной характер [Kleijnen, 2010; Montevechi et al., 2009; Zenon, 1999].

Таким образом, сделанный в работе [Лычкина, 2005] вывод правомерен лишь для статистического имитационного моделирования, или для частного случая моделирования, когда при вариации одного параметра имитационной модели остальные (вариабельные) параметры принимают фиксированные значения. Такая ситуация противоречит самой сути имитационного моделирования. Исследование чувствительности одного параметра при одновременной вариабельности множества других приводит прямо к противоположным результатам.

Кроме того, на практике нередко имеет место ситуация бифуркации, когда достаточно стационарная зависимость выходной переменной модели от входного (вариабельного) параметра, характерная для большей части области определения последнего, в пределах достаточно малой области изменения параметра кардинальным образом изменяется. Наглядные примеры таких ситуаций приведены в [Глаголев, 2012] и могут иметь место и для ряда статистических имитационных моделей. Вместе с тем в [Глаголев, 2012] также показаны возможности исключения из моделей параметров, изменение которых не оказывает существенного влияния на выходную переменную. Подобное упрощение позволяет выйти за рамки первоначальной модели

путем расширения диапазонов изменения чувствительных параметров или добавления новых параметров. Очевидно, что в ряде случаев новые модели станут более пригодными для исследователя и позволят получить лучшие решения.

Каким же образом следует исследовать чувствительность имитационных моделей? Для ответа на этот вопрос обратимся к процедуре поиска оптимального решения при использовании имитационных моделей.

Для рассмотренного ранее достаточно простого примера заданными переменными являются:

- количество групп студентов a ;
- максимальное количество студентов e , размещаемых на одном поезде;
- количество поездов c , проходящих в сутки между городами;
- максимальное количество студентов f , отправляемых из пункта A в сутки;
- среднее время d движения поезда из пункта A в пункт B .

Вариабельных параметров всего три:

- численность групп студентов $b_k \in [b_1^*; b_2^*]$, где $k = \overline{1, \dots, a}$;
- количество студентов, отправляемых в каждые сутки: $x_i \in [b_1^*; f]$, где $i = \overline{1, \dots, N}$ — номер суток;
- количество студентов, отправляемых на каждом поезде: $y_{ij} \in [b_1^*; e]$, где $j = \overline{1, \dots, c}$ — номер поезда.

Очевидно, что

$$\sum_{i=1}^N x_i = \sum_{k=1}^a b_k,$$

$$\sum_{j=1}^c y_{ij} = x_i$$

и, следовательно,

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^c y_{ij} = \sum_{k=1}^a b_k.$$

В общем случае при использовании, например, Z вариабельных параметров (задаваемых так называемыми «движками» y_1, y_2, \dots, y_z) оптимальное решение следует искать в $(Z + 1)$ -мерном пространстве. Параметр $(Z + 1)$ задается оптимизируемым функционалом. В нашем примере это время перевозки T . По данному целевому параметру и происходит синхронизация всех вариабельных параметров (рис. 3), см. [Воробьев и др., 2018].

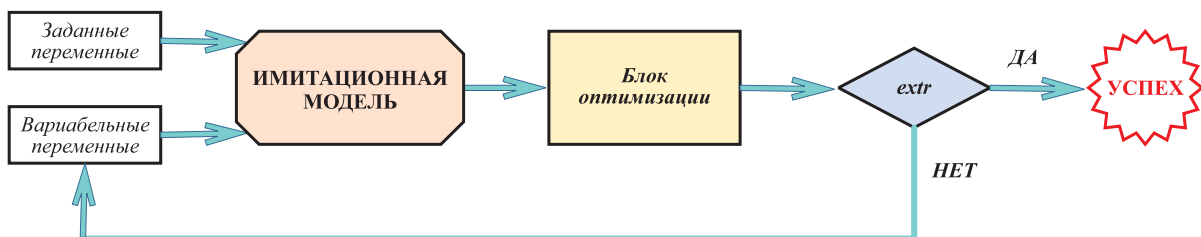


Рис. 3. Общая схема поиска оптимального решения при использовании имитационной модели

Без слов ясно, что универсальных численных методов решения подобных задач, для достаточно большого количества вариабельных параметров различных процессов, не существует. Практически применимой альтернативой является «ручной» поиск решения на основе прямого перебора. При этом необходимо задать дискретность (шаг) изменения каждого вариабельного

параметра. И для каждого набора значений переменных данных осуществлять «прогон» модели. Например, если три переменных параметра могут принимать по 20 значений, то для поиска оптимального решения понадобится $20^3 = 8000$ прогонов модели. Для пяти параметров количество прогонов составит уже $20^5 = 3\,200\,000$.

Возможности современных вычислительных средств допускают самостоятельное создание специалистами-исследователями сопрягаемых с известными средами имитационного моделирования «оптимизаторов» на основе прямого перебора возможных вариантов, при задании диапазонов изменения переменных параметров. Такие решения, вероятно, будут достаточно эффективными при использовании имитационных моделей в исследовательских или учебных целях. Однако на практике подобный подход, как правило, неприемлем, так как накладывает слишком жесткие ограничения на объем переменных исходных данных, учитываемых должностными лицами, принимающими решения. Это объясняет актуальность поиска оптимального решения при имитационном моделировании процессов (см, например, [Афонин, 2016; Бабина, 2015; Воробьев и др., 2018; Девятков и др., 2018; Емельянов и др., 2015]) и появление достаточно уникальных средств поиска квазиоптимальных решений имитационных моделей (*OptQuest*, *IOSO* и др.), с неясными алгоритмами работы и весьма высокой стоимостью.

Принципиальные теоретические трудности и большие практические потребности в разработке достаточно универсальных алгоритмов поиска оптимального решения имитационных моделей (независимо от вида моделей: как дискретно-событийных, так и, например, агентных) стимулировали огромное количество исследований и публикаций в этой области [Aksarayli, Yildiz, 2011; Kang et al., 2018; Raska, Zdenek, 2013; Yang et al., 2018]. Для имитационных моделей, содержащих сравнительно небольшое число параметров (от нескольких десятков до нескольких сотен), показали удовлетворительные результаты известные оптимизационные алгоритмы имитации отжига (*simulated annealing*), генетические (*genetic algorithm*), поиска с запретами (*tabu search*). При наличии в модели нескольких тысяч параметров большое распространение получили методы статистического ранжирования и выбора (*ranking and selection*) [Chen et al., 2014; Choi, Kim, 2018; Fu et al., 2008], а также различные регрессионные алгоритмы [Ankenman et al., 2010; Kleijnen, 2009]:

- регрессии на основе системы поддерживающих векторов (*SVR*),
- крикинг (*kriging*),
- многомерная непараметрическая регрессия (*MNR*).

Между тем дальнейшее усложнение имитационных моделей (см. упоминавшееся ранее «проклятие сложности») потребовало разработки алгоритмов поиска оптимальных решений для моделей, содержащих десятки и сотни тысяч параметров. В последнее десятилетие научные исследования в этой области приобретают растущую популярность и на сегодняшний день увенчались созданием серии алгоритмов так называемого роевого интеллекта (*swarm intelligence*), в качестве основных преимуществ которых декларируются простота, гибкость и эргоичность [Talbi, 2009; Yang, Gandomi, 2012]. Среди известных метаэвристических алгоритмов большую популярность для практических приложений приобрели:

- метод роя частиц (*particle swarm optimization*) [Kennedy, 2001; Poli, 2007, 2008];
- алгоритм кукушки (*cuckoo search*) [Cuevas, Reyna-Orta, 2014; Nguyen et al., 2016; Yang, Deb, 2009];
- алгоритм светлячков (*firefly algorithm*) [Частикова, Воля, 2016; Yang, 2010; Zhang et al., 2016].

Несмотря на достигнутые впечатляющие результаты в области поиска оптимальных решений имитационных моделей, проблема достижения жестких граничных значений оптимизируемого функционала (в тех случаях, когда найденное решение не удовлетворяет заданным ограничениям) по-прежнему обходится стороной. В ситуациях, когда полученное (оптимальное) решение является неудовлетворительным, целенаправленный переход к «улучшенной» имитационной модели может осуществляться на основе первоначального исследования ее чувствительности. Подобный прием, в общем-то, не является революционным и успешно применяется, например,

в практике реализации решений двойственных задач линейного программирования. Очевидно, что при значительном количестве параметров имитационной модели, не связанных между собой явными аналитическими зависимостями, такое ранжирование параметров по «вкладу» в изменение целевого функционала и дальнейший поиск возможностей целенаправленного изменения их области определения оказываются достаточно результативными. Указанный алгоритм лежит в основе идеи стратегической рефлексии применительно к имитационным моделям.

Очевидно, что при достаточно большой размерности модели исследование на чувствительность уже само по себе будет весьма трудной задачей. Вместе с тем огромные возможности такого исследования можно показать на рассматриваемом ранее несложном примере.

В указанном примере малая размерность имитационной модели допускает поиск оптимального решения на основе прямого перебора вариантов. Современные средства вычислительной техники позволяют применение такого простого приема (кроме прочего, с легкостью реализуемого на практике для многих современных инструментальных средств имитационного моделирования) для ряда практических приложений. Несомненным достоинством такого подхода является возможность ранжирования переменных параметров имитационной модели по чувствительности (рис. 4).



Рис. 4. Исследование чувствительности имитационной модели при поиске оптимального решения путем прямого перебора вариантов (изменение выходного параметра ΔT при фиксированных значениях x_i и изменяемых параметрах b_k, y_{ij})

По аналогии с [Максимей, 1988, с. 142] определяются значения $\max \Delta T$ при фиксации одного из параметров b_k, x_i, y_{ij} (последовательно принимающего возможные значения с заданной дискретностью) и вариации остальных. Как правило, при создании новой модели учитываются возможности расширения граничных значений для наиболее чувствительных параметров, в то время как основная масса остальных переменных параметров остается неизменной. Таким образом, происходит целенаправленный переход к построению новой имитационной модели, с заведомо улучшенным решением, по следующему алгоритму:

- 1) ранжирование переменных параметров по чувствительности (x_i, y_{ij}, b_k);
- 2) расширение области определения переменного параметра, к которому имитационная модель наиболее чувствительна ($f \rightarrow f': f' > f, x_i \in [b_1^*; f']$);
- 3) исследование имитационной модели с измененным переменным параметром.

Наряду с этим возможно самостоятельное или совместное с рассмотренным применение подхода, приведенного в [Глаголев, 2012]:

- 1) исключение из модели переменных параметров, к которым модель наименее чувствительна;
- 2) добавление в имитационную модель новых переменных параметров;
- 3) исследование новой имитационной модели.

Целенаправленный переход к новой имитационной модели позволяет выйти за рамки заложенных в первоначальной модели ограничений (см. [Герчук, 1965]) и получить лучшее решение. По всей видимости, в ближнесрочной перспективе исследования в этой области будут связаны с поиском подобных подходов (основанных на реализации идеи стратегической рефлексии) для имитационных моделей большой размерности, поиск решения при использовании которых основан на применении алгоритмов роевого интеллекта.

5. Заключение

В современных условиях продолжаются усложнение и интеграция процессов, происходящих в различных сферах человеческой деятельности. Нередко единственным способом исследования этих процессов с целью получения прогнозных оценок или нахождения рациональных решений становится применение методов и средств математического моделирования. Однако полученные на моделях решения в ряде случаев не удовлетворяют исходным ограничениям, накладываемым на оптимизируемый функционал. Улучшение решения в этом случае возможно только за рамками моделирования, путем построения новой модели. В статье предложены некоторые оригинальные методические приемы, развивающие идею стратегической рефлексии в математическом моделировании и позволяющие осуществить целенаправленный переход к «улучшенной» модели.

Список литературы (References)

Агошков В. И., Лёзина Н. Р. Новые подходы к формулировке метода разделения области и алгоритм крупноблочного распараллеливания для задач математического моделирования // Труды Международной научной конференции «Современные проблемы математического моделирования, обработки изображений и параллельных вычислений 2017». — Ростов-на-Дону: ДГТУ, 2017. — Т. 1. — С. 6–13.

Agoshkov V. I., Lezina N. R. Novyye podkhody k formulirovke metoda razdeleniya oblasti i algoritm krupnoblochnogo rasparallelivaniya dlya zadach matematicheskogo modelirovaniya [New approaches to the formulation of the domain separation method and the algorithm of large-block paralleling for problems of mathematical modeling] // Proceedings of the International Scientific Conference “Modern problems of mathematical modeling, image processing and parallel computing 2017”. — Rostov-na-Donu: DGTU, 2017. — Vol. 1. — P. 6–13 (in Russian).

Афонин П. В. Оптимизация моделей сложных систем на основе метаэвристических алгоритмов и нейронных сетей // Инженерный вестник: электронный научно-технический журнал. — 2016. — № 11. — С. 508–516.

Afonin P. V. Optimizatsiya modeley slozhnykh sistem na osnove metaevristicheskikh algoritmov i neyronnykh setey [Optimization of models of complex systems based on metaheuristic algorithms and neural networks] // Engineering Bulletin: electronic scientific and technical journal. — 2016. — Vol. 11. — P. 508–516 (in Russian).

Бабина О. И. Имитационная модель склада промышленного предприятия по производству бетона // Бизнес-информатика. — 2015. — № 1 (31). — С. 41–50.

Babina O. I. Imitatsionnaya model' sklada promyshlennogo predpriyatiya po proizvodstvu betona [Simulation model of a warehouse of an industrial enterprise for the production of concrete] // Business Informatics. — 2015. — No. 1 (31). — P. 41–50 (in Russian).

Борщев А. В. Практическое агентное моделирование и его место в арсенале аналитика // Экспонента PRO. — 2004. — № 3–4 (7–8). — С. 38–47.

Borshchev A. V. Prakticheskoye agentnoye modelirovaniye i yego mesto v arsenale analitika [Practical agent modeling and its place in the analyst's arsenal] // Exponenta PRO. — 2004. — No. 3–4 (7–8). — P. 38–47 (in Russian).

- Вентцель Е. С.* Исследование операций. — М.: Советское радио, 1972. — 552 с.
Ventstsel' E. S. Issledovaniye operatsiy [Operations research]. — Moscow: Sovetskoe radio, 1972. — 552 p. (in Russian).
- Воробьев А. А., Данеев А. В.* Стратегическая рефлексия в матричных играх // Известия Самарского научного центра РАН. — 2017. — № 6. — С. 146–155.
Vorobiev A. A., Daneev A. V. Strategicheskaya refleksiya v matrichnykh igrakh [Strategic reflection in matrix games] // Proceedings of the Samara Scientific Center of the Russian Academy of Sciences. — 2017. — No. 6. — P. 146–155 (in Russian).
- Воробьев А. А., Загодарчук И. В., Филяев М. П.* Имитационное моделирование в военном деле // Научные проблемы материально-технического обеспечения Вооруженных Сил Российской Федерации: сборник научных трудов. — СПб.: Изд-во Политехнического университета. — 2018. — Вып. 3 (9). — С. 42–49.
Vorobiev A. A., Zagodarchuk I. V., Filyaev M. P. Imitatsionnoye modelirovaniye v voyennom dele [Simulation in military] // Nauchnyye problemy material'no-tekhnicheskogo obespecheniya Vooruzhennykh Sil Rossiyskoy Federatsii: sbornik nauchnykh trudov. — St. Petersburg: Izd-vo Politekhnicheskogo universiteta. — 2018. — Vol. 3 (9). — P. 42–49 (in Russian).
- Герчук Я. П.* Границы применения линейного программирования. — М.: Экономика, 1965. — 72 с.
Gerchuk Ya. P. Granitsy primeneniya lineynogo programmirovaniya [The boundaries of linear programming]. — Moscow: Ekonomika, 1965. — 72 p. (in Russian).
- Глаголев М. В.* Анализ чувствительности модели // Динамика окружающей среды и глобальные изменения климата. — 2012. — Т. 3, № 3. — С. 31–53.
Glagolev M. V. Analiz chuvstvitel'nosti modeli [Model sensitivity analysis] // Environmental dynamics and global climate change. — 2012. — Vol. 3, No. 3. — P. 31–53 (in Russian).
- Девятков В. В.* Методология и технология имитационных исследований сложных систем: современное состояние и перспективы развития: монография. — М.: Вузовский учебник: ИНФРА-М, 2013. — 448 с.
Devyatkov V. V. Metodologiya i tekhnologiya imitatsionnykh issledovaniy slozhnykh sistem: sovremennoye sostoyanie i perspektivy razvitiya: monografiya [Methodology and technology of simulation studies of complex systems: current state and development prospects: monography]. — Moscow: Vuzovskiy uchebnik: INFRA-M, 2013. — 448 p. (in Russian).
- Девятков В. В., Девятков Т. В., Федотов М. В.* Имитационные исследования в среде моделирования GPSS STUDIO: учебное пособие. — М.: Вузовский учебник: ИНФРА-М, 2018. — 283 с.
Devyatkov V. V., Devyatkov T. V., Fedotov M. V. Imitatsionnyye issledovaniya v srede modelirovaniya GPSS STUDIO: uchebnoye posobiye [Simulation Studies in the GPSS STUDIO Simulation Environment: Tutorial]. — Moscow: Vuzovskiy uchebnik: INFRA-M, 2018. — 283 p. (in Russian).
- Емельянов А. А., Шильникова О. В., Емельянова Н. З.* Оптимизация производственных программ на основе результатов имитационного моделирования // Прикладная информатика / Journal of Applied Informatics. — 2015. — Т. 10, № 3 (57). — С. 109–121.
Yemel'yanov A. A., Shil'nikova O. V., Yemel'yanova N. Z. Optimizatsiya proizvodstvennykh programm na osnove rezultatov imitatsionnogo modelirovaniya [Optimization of production programs based on simulation results] // Journal of Applied Informatics. — 2015. — Vol. 10, No. 3 (57). — P. 109–121 (in Russian).
- Ильин В. П.* Экзапроблемы математического моделирования // Вестник ЮУрГУ (серия «Математическое моделирование и программирование», вып. 6). — 2010. — № 35 (211). — С. 29–40.
Ilin V. P. Ekzaprobemy matematicheskogo modelirovaniya [Mathematical modeling problems] // Vestnik YUGU (seriya "Matematicheskoye modelirovaniye i programmirovaniye", vyp. 6). — 2010. — No. 35 (211). — P. 29–40 (in Russian).
- Ковеня В. М.* Некоторые проблемы и тенденции развития математического моделирования // Прикладная механика и техническая физика. — 2002. — Т. 43, № 3. — С. 3–14.
Kovenya V. M. Nekotoryye problemy i tendentsii razvitiya matematicheskogo modelirovaniya [Some problems and trends in the development of mathematical modeling] // Applied mechanics and technical physics. — 2002. — Vol. 43, No. 3. — P. 3–14 (in Russian).
- Колмогоров А. Н.* Математика — наука и профессия. — М.: Наука, 1988. — 288 с.
Kolmogorov A. N. Matematika — nauka i professiya [Mathematics — science and profession]. — Moscow: Nauka, 1988. — 288 p. (in Russian).

- Лычкина Н. Н.* Имитационное моделирование экономических процессов. — М.: Академия АйТи, 2005. — 164 с.
Lychkina N. N. Imitatsionnoye modelirovaniye ekonomicheskikh protsessov [Simulation of economic processes]. — Moscow: Akademiya AyTi, 2005. — 164 p. (in Russian).
- Максимей И. В.* Имитационное моделирование на ЭВМ. — М.: Радио и связь, 1988. — 232 с.
Maksimey I. V. Imitatsionnoye modelirovaniye na EVM [Computer Simulation]. — Moscow: Radio i svyaz', 1988. — 232 p. (in Russian).
- Манукян К. П.* Методы построения моделей чувствительности и их применение в САПР средств контроля: автореферат дис. ... канд. техн. наук. — Ереван, 1993. — 19 с.
Manukyan K. P. Metody postroyeniya modeley chuvstvitel'nosti i ikh primeneniye v SAPR sredstv kontrolya [Methods for constructing sensitivity models and their application in CAD tools]: avtoreferat dis. ... kand. tekhn. nauk. — Yerevan, 1993. — 19 p. (in Russian).
- Никольский В. Н., Рыжаков А. Н., Щербина О. А.* Принципы создания компьютерной системы исследования рекреационных систем на базе математических моделей // Динамические системы. — 2005. — Вып. 19. — С. 152–160.
Nikol'skiy V. N., Ryzhakov A. N., Shcherbina O. A. Printsipy sozdaniya komp'yuternoy sistemy issledovaniya rekreatsi-onnykh sistem na baze matematicheskikh modeley [Principles of creating a computer system for the study of recreational systems based on mathematical models] // Dynamic systems. — 2005. — Vol. 19. — P. 152–160 (in Russian).
- Новиков Д. А.* Кибернетика: Навигатор. История кибернетики, современное состояние, перспективы развития. — М.: ЛЕНАНД, 2016. — 160 с.
Novikov D. A. Kibernetika: Navigator. Istoriya kibernetiki, sovremennoye sostoyaniye, perspektivy razvitiya [Cybernetics: Navigator. The history of cybernetics, current state, development prospects]. — Moscow: LENAND, 2016. — 160 p. (in Russian).
- Новиков Д. А.* Модели стратегической рефлексии // Автоматика и телемеханика. — 2012. — № 1. — С. 3–18.
Novikov D. A. Modeli strategicheskoy refleksii [Models of Strategic Reflection] // Automation and Remote Control. — 2012. — No. 1. — P. 3–18 (in Russian).
- Новиков Д. А., Чхартишвили А. Г.* Рефлексия и управление: математические модели. — М.: Издательство физико-математической литературы, 2013. — 412 с.
Novikov D. A., Chkhartishvili A. G. Refleksiya i upravleniye: matematicheskiye modeli [Reflection and management: mathematical models]. — Moscow: Publishing house of physical and mathematical literature, 2013. — 412 p. (in Russian).
- Подгорный К. А., Леонов А. В.* Обзор современных методов оценки значений коэффициентов, чувствительности и адекватности имитационных моделей водных экосистем // Водные ресурсы. — 2015. — Т. 42, № 4. — С. 406–432.
Podgorny K. A., Leonov A. V. Obzor sovremennykh metodov otsenki znacheniy koeffitsiyentov, chuvstvitel'nosti i adekvatnosti imitatsionnykh modeley vodnykh ekosistem [A review of modern methods for assessing the values of coefficients, sensitivity and adequacy of simulation models of aquatic ecosystems] // Water resources. — 2015. — Vol. 42, No. 4. — P. 406–432 (in Russian).
- Рыжаков А. Н., Щербина О. А.* Современные проблемы математического моделирования в исследовании операций // Динамические системы. — 2006. — Вып. 21. — С. 115–129.
Ryzhakov A. N., Shcherbina O. A. Sovremennyye problemy matematicheskogo modelirovaniya v issledovanii operatsiy [Modern problems of mathematical modeling in the study of operations] // Dynamical systems. — 2006. — Vol. 21. — P. 115–129 (in Russian).
- Самарский А. А.* Математическое моделирование и вычислительный эксперимент // Вестник АН СССР. — 1979. — № 5. — С. 38–49.
Samarsky A. A. Matematicheskoye modelirovaniye i vychislitel'nyy eksperiment [Mathematical modeling and computational experiment] // Vestnik AN USSR. — 1979. — No. 5. — P. 38–49 (in Russian).
- Самарский А. А., Михайлов А. П.* Математическое моделирование. Идеи. Методы. Примеры. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. — 320 с.
Samarskiy A. A., Mikhaylov A. P. Matematicheskoye modelirovaniye. Idei. Metody. Primery [Mathematical modeling. Ideas. Methods Examples]. — Moscow: FIZMATLIT, 2005. — 320 p. (in Russian).
- Седунов В. М.* Организация имитационных экспериментов над событийными моделями и анализ чувствительности: автореф. дис. ... канд. техн. наук. — М., 1998. — 19 с.

- Sedunov V. M.* Organizatsiya imitatsionnykh eksperimentov nad sobytiynymi modelyami i analiz chuvstvitel'nosti [Organization of simulation experiments on event models and sensitivity analysis]: avtoreferat dis. ... cand. tech. sciences. — Moscow, 1998. — 19 p. (in Russian).
- Сусов Р. В., Багатурия В. В.* Метод оценки чувствительности имитационной модели бизнес-процесса к закону распределения вероятностей длительности интервалов между поступлением заявок // Лесной вестник. — 2011. — № 5. — С. 198–202.
- Susov R. V., Bagaturiya V. V.* Metod otsenki chuvstvitel'nosti imitatsionnoy modeli biznes-protssessa k zakonu raspredeleniya veroyatnostey dlitel'nosti intervalov mezhdru postupleniyem zayavok [Method of Assessing the Sensitivity of a Simulation Model of a Business Process to the Law of Distribution of Probabilities of the Duration of Intervals between the Entries of Applications] // Forest Journal. — 2011. — No. 5. — P. 198–202 (in Russian).
- Частикова В. А., Воля Я. И.* Анализ эффективности работы алгоритма светлячков в задачах глобальной оптимизации // Научные труды КубГТУ. — 2016. — № 15. — С. 105–111.
- Chastikova V. A., Volya Ya. I.* Analiz effektivnosti raboty algoritma svetlyachkov v zadachakh global'noy optimizatsii [Analysis of the efficiency of the firefly algorithm in the tasks of global optimization] // Scientific works of KubGTU, — 2016. — No. 15. — P. 105–111 (in Russian).
- Чевелев К. В.* Анализ чувствительности и идентификация имитационных моделей: автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. — М., 1991. — 16 с.
- Chevelev K. V.* Analiz chuvstvitel'nosti i identifikatsiya imitatsionnykh modeley [Sensitivity analysis and identification of simulation models]: avtoreferat dis. ... kand. fiz.-mat. nauk. — Moscow, 1991. — 16 p. (in Russian).
- Aksarayli M., Yildiz A.* Process Optimization with Simulation Modeling in a Manufacturing System // Research Journal of Applied Sciences, Engineering and Technology. — 2011. — Vol. 3 (4). — P. 318–328.
- Algorithmic Game Theory / eds. N. Nisan, T. Roughgarden, E. Tardos, V. Vazirani. — NY: Cambridge University Press, 2009. — 776 p.
- Ankenman B., Nelson B. L., Staum J.* Stochastic Kriging for Simulation Metamodeling // Oper. Res. — 2010. — Vol. 58 (2). — P. 371–382.
- Boyd S., Parikh N., Chu E. et al.* Distributed Optimization and Statistical Learning via the Alternating Direction Method of Multipliers // Foundations and Trends in Machine Learning. — 2011. — No. 3 (1). — P. 1–122.
- Chen C. H., Lee L. H.* Stochastic simulation optimization: an optimal computing budget allocation // World Scientific. — 2011. — Vol. 1.
- Chen W., Gao S., Chen C. H., Shi L.* An Optimal Sample Allocation Strategy for Partition-based Random Search // IEEE Transactions on Automation Science and Engineering. — 2014. — Vol. 11 (1). — P. 177–186.
- Choi S. H., Kim T. G.* Efficient ranking and selection for stochastic simulation model based on hypothesis test // IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems. — 2018. — Vol. 48, No. 9. — P. 1555–1565.
- Cuevas E., Reyna-Orta A.* A Cuckoo Search Algorithm for Multimodal Optimization // The Scientific World Journal. — Vol. 2014, Article ID 497514. — 20 p. — <http://dx.doi.org/10.1155/2014/497514>
- Fu M. C.* Feature article: optimization for simulation: theory vs. practice // Informs Journal on Computing. — 2002. — Vol. 14, No. 3. — P. 192–215.
- Fu M., Chen C. H., Shi L.* Some Topics for Simulation Optimization // Proceedings of 2008 Winter Simulation Conference. — December 2008. — Miami, FL. — P. 27–38.
- Geoffrion A. M.* Integrated modeling system // Comp. Sci. Econ. Manag. — 1989. — Vol. 2. — P. 3–15.
- Ильин В. П.* Fundamental Issues of Mathematical Modeling // Herald of the Russian Academy of Sciences. — 2016. — Vol. 86, No. 2. — P. 118–126.
- Ivanov D.* Supply Chain Simulation and Optimization with AnyLogistix. — 2017. — 176 p. — <https://www.anylogistix.com/upload/alx-book.pdf>
- Kang B. G., Choi S. H., Kwon S. J., Lee J. H., Kim T. G.* Simulation-Based Optimization on the System-of-Systems Model via Model Transformation and Genetic Algorithm: A Case Study of Net-

- work-Centric Warfare, Hindawi Complexity. — Vol. 2018, Article ID 4521672. — 15 p. — <https://doi.org/10.1155/2018/4521672>
- Kennedy J.* Swarm Intelligence / J. Kennedy, R. C. Eberhart. — Morgan Kaufmann, 2001.
- Kleijnen J. P. C.* Kriging metamodeling in simulation: A review // Eur. J. Oper. Res. — 2009. — Vol. 192 (3). — P. 707–716.
- Kleijnen J. P. C.* Sensitivity analysis of simulation models: an overview, Sixth International Conference on Sensitivity Analysis of Model Output // Procedia — Social and Behavioral Sciences, December 2010.
- Modeling Languages in Mathematical Optimization / Ed. J. Kallrath. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2003. — 407 p.
- Montevecchi J. A. B., Filho R. G. de Almeida, Paiva A. P., Costa R. F. S., Medeiros A. L.* Sensitivity analysis in discrete-event simulation using fractional factorial designs // Journal of Simulation, advance online publication. — 13 November 2009. — DOI: 10.1057/jos.2009.23
- Nguyen K. P., Fujita G., Dieu V. N.* Cuckoo search algorithm for optimal placement and sizing of static var compensator in large-scale power systems // JAISCR. — 2016. — Vol. 6, No. 2. — P. 59–68.
- Poli R.* An analysis of publications on particle swarm optimisation applications // Technical Report CSM-469. Department of Computer Science, University of Essex, UK, 2007.
- Poli R.* Analysis of the publications on the applications of particle swarm optimization // Journal of Artificial Evolution and Applications. — 2008. — 10 p. — DOI: 10.1155/2008/685175
- Raska P., Zdenek U.* Comparison of Selected Optimization Methods Used for Discrete Event Simulation Models and Testing Functions // Advanced Materials Research. — 2013. — Vols. 816–817. — P. 629–633.
- Rzevski G., Skobelev P.* Managing Complexity. — London: WIT Press, 2014. — 216 p.
- Talbi E. G.* Metaheuristics: From Design to Implementation. — John Wiley & Sons, 2009.
- Vorobiev A. A., Daneev A. V.* Modern practice of application of matrix games // Advances and Applications in Discrete Mathematics. — 2018. — Vol. 19, No. 2. — P. 93–116. — <http://dx.doi.org/10.17654/DM019020093>
- Yang X. S., Deb S.* Cuckoo search via Lévy flights // World Congress on Nature & Biologically Inspired Computing (NaBIC 2009). IEEE Publications. — December 2009. — P. 210–214.
- Yang X. S.* Firefly Algorithm. Nature-inspired metaheuristic algorithms. — Luniver Press, 2010. — P. 79–90.
- Yang X. S., Gandomi A. H.* Bat algorithm: a novel approach for global engineering optimization // Engineering Computations. — 2012. — Vol. 29, No. 5. — P. 464–483.
- Yang X. S., Koziel S., Leifsson L.* Computational Optimization, Modelling and Simulation // Recent Trends and Challenges, Procedia Computer Science. — 2013. — Vol. 18. — P. 855–860.
- Zenon I.* Simulation model sensitivity to quality of material properties // Solidification of Metals and Alloys. — 1999. — Vol. 1, No. 40.
- Zhang L., Liu L., Yang X. S., Dai Y.* A Novel Hybrid Firefly Algorithm for Global Optimization // PLoS ONE. — 2016. — Vol. 11 (9). — P. e0163230. — <https://doi.org/10.1371/journal.pone.0163230>

