На правах рукописи

Осипов Олег Александрович

СЕТИ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ТОПОЛОГИИ С ДЕЛЕНИЕМ И СЛИЯНИЕМ ТРЕБОВАНИЙ

05.13.18 — Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

Автореферат
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Томск — 2019

Работа выполнена в федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского»

Научный руководитель: кандидат физико-математических наук, доцент **Тананко Игорь Евстафьевич**

Официальные оппоненты:

Войтишек Антон Вацлавович, доктор физико-математических наук, профессор, федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт вычислительной математики и математической геофизики Сибирского отделения Российской академии наук, лаборатория стохастических задач, ведущий научный сотрудник

Цициашвили Гурами Шалвович, доктор физико-математических наук, профессор, федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт прикладной математики Дальневосточного отделения Российской академии наук, лаборатория вероятностных методов и системного анализа, заведующий лабораторией

Ведущая организация: Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Российский университет дружбы народов»

Защита диссертации состоится 13 июня 2019 г. в 10 ч. 30 мин. на заседании диссертационного совета Д 212.267.08, созданного на базе федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Национальный исследовательский Томский государственный университет», по адресу: 634050, г. Томск, пр. Ленина, 36 (Главный корпус ТГУ, аудитория 209).

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке и на официальном сайте федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Национальный исследовательский Томский государственный университет» www.tsu.ru.

Материалы по защите диссертации размещены на официальном сайте ТГУ: `http://www.ams.tsu.ru/TSU/QualificationDep/co-searchers.nsf/newpublicationn/OsipovOA13062019.html`

Автореферат разослан «___» апреля 2019 года.

И.о. учёного секретаря
диссертационного совета
доктор технических наук,
профессор Лившиц Климентий Исаакович

Общая характеристика работы

Актуальность и степень разработанности темы исследования. Информационные системы с параллельной и распределённой обработкой данных в настоящее время получают всё большее распространение. Выполняемые в такой системе задачи делятся на подзадачи, которые распределяются по узлам системы и обрабатываются по отдельности с целью эффективного использования вычислительных ресурсов. Исходная задача считается выполненной только после завершения выполнения всех составляющих её подзадач.

Структурная и функциональная специфика систем такого класса требует разработки новых эффективных моделей и методов для использования при решении задач анализа, синтеза и оптимизации. Для описания и анализа таких систем используются разнообразные математические абстракции: модель акторов, сети Петри, потоки работ, модели теории массового обслуживания.

Модели в виде сетей массового обслуживания широко применяются для исследования дискретных стохастических систем с сетевой структурой. Теория сетей массового обслуживания интенсивно развивается в течение последних пяти десятилетий, большой вклад в её развитие, разработку методов анализа, оптимизации и синтеза сетей массового обслуживания внесли российские и зарубежные учёные. Общие вопросы теории сетей массового обслуживания представлены в монографиях и учебных пособиях Г. П. Башарина, А. А. Боровкова, П. П. Бочарова, В. М. Вишневского, В. А. Ивницкого, Ю. И. Митрофанова, А. А. Назарова, А. В. Печинкина, В. В. Рыкова, К. Е. Самуйлова, J. Jackson, J. Walrand, F. Baccelli, K. Chandy, R. Mutz, F. Palacios, E. Gelenbe.

Разработке методов исследования моделей сетей и их приложениям к реальным техническим системам посвящены работы Ю. В. Гайдамака, А. М. Горцева, В. Н. Задорожного, Е. А. Лебедева, Ю. В. Малинковского, А. Н. Моисеева, В. А. Наумова, С. Н. Степанова, А. П. Пшеничникова, Г. Ш. Цициашвили. Среди зарубежных специалистов необходимо отметить значительный вклад таких учёных, как F. Baccelli, K. Chandy, P. Harrison, J. Jackson, F. Kelly, L. Kleinrock, M. Reiser, D. Towsley, J. Walrand.

Следует отметить, что предложено достаточно много различных подходов к решению задач, в том числе асимптотических[1].

Сети массового обслуживания с делением и слиянием требований (fork-join queueing networks)[2] используются в качестве математических мо-

[1] Моисеев А. Н., Назаров А. А. Бесконечнолинейные системы и сети массового обслуживания. Томск : Изд-во НТЛ, 2015. 240 с.

[2] Обзор систем параллельной обработки заявок / К. Е. Самуйлов [и др.] // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия: Математика. Информатика. Физика. 2017. Т. 25, № 4. С. 350—362.

делей, адекватно описывающих стохастические системы с параллельным[3] и распределённым принципами функционирования[4]. Отличительной особенностью в сетях массового обслуживания данного класса является деление поступающих требований на части — фрагменты, которые обслуживаются параллельно в системах сети, и объединение фрагментов после завершения их обслуживания в исходные требования. Выполнение требования считается законченным, а требование покидает сеть, только после завершения обслуживания всех его фрагментов.

В большинстве работ по сетям обслуживания с делением и слиянием требований[5] рассматриваются сети обслуживания, которые состоят из множества параллельных систем массового обслуживания. Результатом приведённых работ является нахождение длительности пребывания требований в сети обслуживания. Поиск стационарного распределения осложнён тем, что оно не имеет простой мультипликативной формы даже в случае сетей, образованных множеством параллельных систем обслуживания.

Стоит отметить, что реальным системам (многопроцессорные системы, GRID-системы, распределённые базы данных, сети передачи данных) в большинстве случаев свойственна более сложная структура, а процесс выполнения задач в них может включать несколько этапов обработки, а также многократное деление и объединение получаемых при этом подзадач. Однако существующие математические модели сетей обслуживания с параллельной топологией не позволяют адекватно описать такое многообразие реальных систем с параллельным и распределённым принципами функционирования.

Таким образом, актуальной является задача, связанная с построением математических моделей сетей массового обслуживания произвольной топологии с делением и слиянием требований и разработкой методов анализа указанных сетей обслуживания.

В диссертационном исследовании рассматриваются открытые сети массового обслуживания произвольной топологии с делением и слиянием требований.

Цель и задачи исследования. Целью работы является построение математических моделей систем с параллельным и распределённым принципами обработки в виде сетей массового обслуживания с делением и слиянием требований произвольной топологии, нахождение стационарных характеристик указанного класса сетей обслуживания для получе-

[3] Моисеева С. П., Ивановская И. А. Исследование математической модели параллельного обслуживания заявок смешанного типа // Известия Томского политехнического университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2010. Т. 317, вып. 5. С. 32—34.

[4] Аппроксимация времени отклика системы облачных вычислений / К. Е. Самуйлов [и др.] // Информатика и её применения. 2015. Т. 9, вып. 3. С. 31—38.

[5] Thomasian A. Analysis of Fork/Join and Related Queueing Systems // ACM Computing Surveys. New York, 2014. Vol. 47, № 2. 17:1–17:71.

ния оценок характеристик производительности соответствующего класса систем, например, оценка длительности реакции системы на обработку запросов распределением фазового типа, разработка численного метода для расчёта матричных параметров функции распределения.

Для достижения поставленной цели были решены следующие **задачи**:

1. Построение математических моделей открытых сетей массового обслуживания произвольной топологии с делением и слиянием требований с бесконечноприборными и одноприборными обслуживающими системами.
2. Разработка методов анализа сетей массового обслуживания произвольной топологии с делением и слиянием требований: нахождение вида функции распределения для длительности пребывания требований в сети обслуживания, определение её параметров; нахождение стационарного распределения сети обслуживания; построение алгоритмов по полученным результатам.
3. Исследование зависимости характеристик сетей массового обслуживания от их параметров, прежде всего интенсивностей обслуживания и маршрутизации. Решение задачи оптимизации — минимизация математического ожидания длительности пребывания требований в сети обслуживания.
4. Разработка и реализация алгоритмов для расчёта стационарных характеристик и оптимизации сетей обслуживания.

Научная новизна результатов, представленных в диссертации. Постановка задач и полученные результаты являются новыми.

1. Предложены математические модели сетей массового обслуживания с делением и слиянием требований, позволяющие учитывать произвольную топологию, многократное деление и объединение фрагментов, зависимость маршрутизации от типа фрагментов, а также наличие сложных взаимосвязей между фрагментами одного требования, что позволяет повысить адекватность представления реальных систем с параллельным и распределённым принципами функционирования.
2. Доказано, что длительность пребывания требований в сети массового обслуживания произвольной топологии с делением и слиянием требований в случае бесконечноприборных базовых систем имеет фазовое распределение. Разработаны алгоритмы, позволяющие найти параметры фазового распределения длительности пребывания требований в сети обслуживания.
3. Получена форма стационарного распределения вероятностей состояний элементарной сети обслуживания с бесконечноприборными базовыми системами. Для определения стационарного распределения предложено использовать специальную сеть размещений.

Разработан алгоритм построения сети размещений для элементарной сети обслуживания. Показано, что сеть размещений является сетью Джексона. Найдена связь между стационарными распределениями исходной сети с делением и слиянием требований и соответствующей сети размещений.

4. Для сетей обслуживания с одноприборными базовыми системами предложен подход для приближенного нахождения стационарных характеристик, основанный на идее декомпозиции и агрегирования, который позволяет использовать ранее полученные автором результаты, связанные с анализом сетей с бесконечноприборными базовыми системами. Проведено исследование точности получаемых характеристик посредством разработанного комплекса программ имитационного и численного анализа сетей массового обслуживания с делением и слиянием требований.

Методы исследования. В диссертационной работе использовались методы теории вероятностей, случайных процессов, теории цепей Маркова, теории массового обслуживания, теории сетей массового обслуживания, имитационного моделирования.

Теоретическая и практическая значимость работы. Предложенные модели существенно расширяют круг задач, решаемых в теории массового обслуживания, поскольку позволяют рассмотреть особенности структуры и функционирования сетей обслуживания, возникающие в случае произвольной топологии сетей и связанные прежде всего с усложнением применяемых методов маршрутизации фрагментов, возможностью многократного деления и объединения фрагментов, а также наличием зависимостей между фрагментами одного требования.

Получен вид функции распределения длительности пребывания требований в сети обслуживания произвольной топологии с делением и слиянием требований. Указанная характеристика сети обслуживания является ключевым показателем качества обслуживания для реальных систем, моделируемых посредством моделей теории массового обслуживания. Найдено стационарное распределение вероятностей состояний элементарной сети обслуживания с бесконечноприборными базовыми системами путём построения соответствующей сети размещений. Показано, что сеть размещений является сетью Джексона, что существенно уменьшает вычислительную сложность нахождения стационарного распределения.

Представленные в диссертационной работе результаты могут быть применены для математического моделирования стохастических систем с параллельным и распределённым принципами функционирования, для решения задач анализа, оптимизации и синтеза указанных систем. В качестве примера в диссертации рассмотрена модель сети передачи данных с многопутевой маршрутизацией в виде сети массового обслуживания произвольной топологии с делением и слиянием требований.

Предложенные математические модели также могут быть применены для решения задач:

– проектирования сети передачи данных с заданной пропускной способностью,
– расчёта характеристик производительности GRID-системы и оптимизации её архитектуры,
– нахождения условий для обеспечения некоторого уровня качества обслуживания пользователей распределённой базы данных.

Связь работы с крупными научными проектами. В основу диссертации положены результаты научных исследований, выполненных при участии автора в Саратовском государственном университете, по включённой в план научно-исследовательских работ университета теме: «Развитие теории и методов анализа сетей массового обслуживания с групповыми переходами требований, распределением нагрузки и нестационарными структурами, разработка методов управления сетями и методов анализа сетей с управлением» (шифр «Ресурс», регистрационный № АААА-А17-117110220045-8).

Достоверность полученных точных результатов обеспечивается корректными доказательствами всех приведённых в работе утверждений. Достоверность приближённых методов подтверждают результаты имитационного моделирования.

Положения, выносимые на защиту. На защиту выносятся следующие результаты исследования:

1. Математические модели сетей массового обслуживания произвольной топологии с делением и слиянием требований.
2. Нахождение вероятностных характеристик сетей массового обслуживания произвольной топологии с делением и слиянием требований.
3. Комплекс программ имитационного и численного анализа сетей массового обслуживания произвольной топологии с делением и слиянием требований.

Личное участие автора в получении результатов, изложенных в диссертации. Личное участие автора заключается в исследовании рассматриваемых моделей, получении аналитических результатов для них, разработке программ численного и имитационного моделирования.

Соответствие паспорту специальности Диссертационная работа выполнена в соответствии с паспортом специальности 05.13.18 «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ» и включает оригинальные результаты в области математического моделирования, численных методов и комплексов программ.

Исследование, представленное в работе, соответствует следующим разделам паспорта специальности: п. 1 (Разработка новых математических методов моделирования объектов и явлений): разработан новый метод моделирования систем с параллельным и распределённым принципами обработки, к которым прежде всего можно отнести вычислительные и информационно-телекоммуникационные системы, в виде сети массового обслуживания произвольной топологии с делением и слиянием требований; п. 2 (Развитие качественных и приближённых аналитических методов исследования математических моделей): модифицирован и развит метод представления функции распределения длительности пребывания требований в сети распределением фазового типа для сетей обслуживания произвольной топологии с делением и слиянием требований, в том числе получен алгоритм для расчёта параметров функции распределения; п. 4 (Реализация эффективных численных методов и алгоритмов в виде комплексов проблемно-ориентированных программ для проведения вычислительного эксперимента): разработаны алгоритмы для расчёта вероятностно-временных характеристик сетей массового обслуживания с делением и слиянием требований, которые были реализованы в виде комплекса программ, предназначенного для оценки параметров вычислительных и информационно-телекоммуникационных систем с распределённой и параллельной обработкой, для расчёта вероятностно-временных характеристик модели сети с очередями и делением и слиянием требований разработана программа имитационного моделирования, проведены вычислительные эксперименты и дана оценка точности приближённых формул.

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 9 работах, из них 3 статьи в журналах, входящих в Перечень рецензируемых научных изданий, рекомендованных Высшей аттестационной комиссией при Минобрнауки Российской Федерации для опубликования основных научных результатов диссертации, 5 — в сборниках тезисов и материалов конференций, также получено 1 свидетельство о регистрации программы для ЭВМ.

В работах, опубликованных в соавторстве, вклад соискателя состоит в получении теоретических результатов и их интерпретации, а вклад научного руководителя — в постановке задач и обсуждении методов их решения.

Степень достоверности и апробация результатов. Основные результаты работы докладывались и обсуждались на научных семинарах и конференциях:

– научный семинар кафедры системного анализа и автоматического управления Саратовского государственного университета (2015–2018 г.),
– XXII Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов-2015» (2015 г., МГУ, Москва),

– XVI Всероссийский симпозиум по прикладной и промышленной математике (осенняя сессия), (2015 г., Сочинский государственный университет, Сочи – Дагомыс),
– Всероссийская конференция с международным участием «Информационно-телекоммуникационные технологии и математическое моделирование высокотехнологичных систем» (2016, 2017 г., РУДН, Москва),
– Международная научная конференция «Компьютерные науки и информационные технологии» (2016 г., СГУ, Саратов),
– XVI Международная конференция имени А.Ф. Терпугова «Информационные технологии и математическое моделирование» (2017 г., Казанский национальный исследовательский технологический университет, Казань).

Содержание работы

Во **введении** описывается актуальность исследований, проводимых в рамках диссертационной работы, определяются цель и задачи, обосновываются научная новизна, теоретическая и практическая значимость представляемой работы.

Первая глава содержит обзор основных опубликованных результатов по исследованию сетей массового обслуживания с делением и слиянием требований. В первом разделе приведены результаты работ, посвящённых сетям массового обслуживания, состоящим из параллельных систем обслуживания. Во втором разделе обсуждаются результаты для сетей обслуживания с произвольной топологией. Примеры использования сетей данного класса для моделирования реальных систем обсуждаются в третьем разделе. Четвёртый раздел посвящён методам анализа длительности пребывания требований в сетях массового обслуживания.

Вторая глава посвящена анализу открытых сетей обслуживания с делением и слиянием требований произвольной топологии в случае бесконечноприборных базовых систем обслуживания.

В *разделе 2.1* введено формальное описание для сетей обслуживания с произвольной топологией. Пусть $\mathcal{N}$ — открытая сеть массового обслуживания с одним классом требований, состоящая из L систем массового обслуживания $N_1, \ldots, N_L$. В сеть обслуживания из источника N_0 поступает пуассоновский поток требований с интенсивностью Λ_0. Каждое из требований может многократно делиться на части, называемые фрагментами. Обслуживание фрагментов требования происходит независимо друг от друга в системах сети $\mathcal{N}$. Каждый из фрагментов может снова разделиться на новые фрагменты. Требование покидает сеть только после объединения всех своих обслуженных фрагментов. Далее будем использовать термин «фрагмент» для описания и требования, и его частей.

Обозначим через $X = \{1, \ldots, L\}$, множество номеров систем обслуживания. Системы в сети $\mathcal{N}$ поделены на три непустых, непересекающихся множества базовых систем, дивайдеров и интеграторов, описываемые далее, и для нумерации систем вводятся следующие множества:

– $X_{\mathcal{S}} = \left\{x_1^{\mathcal{S}}, \ldots, x_M^{\mathcal{S}}\right\}$ — номера *базовых систем*;
– $X_{\mathcal{F}} = \left\{x_1^{\mathcal{F}}, \ldots, x_K^{\mathcal{F}}\right\}$ — номера *дивайдеров*;
– $X_{\mathcal{J}} = \left\{x_1^{\mathcal{J}}, \ldots, x_K^{\mathcal{J}}\right\}$ — номера *интеграторов*.

Число дивайдеров K совпадает с числом интеграторов, а $X = X_{\mathcal{S}} \cup X_{\mathcal{F}} \cup X_{\mathcal{J}}$. Вводятся следующие обозначения:

– S_i — базовая система $N_{x_i^{\mathcal{S}}}$, $i = 1, \ldots, M$;
– F_j — дивайдер $N_{x_j^{\mathcal{F}}}$, $j = 1, \ldots, K$;
– J_k — интегратор $N_{x_k^{\mathcal{J}}}$, $k = 1, \ldots, K$.

Опишем системы обслуживания, относящиеся к каждому из трёх множеств:

– $\mathcal{S} = \left\{N_{x_1^{\mathcal{S}}}, \ldots, N_{x_M^{\mathcal{S}}}\right\} = \{S_1, \ldots, S_M\}$ — базовые системы обслуживания — множество систем массового обслуживания с бесконечным числом одинаковых обслуживающих приборов. Длительность обслуживания фрагмента на приборе системы S_i является случайной величиной с экспоненциальным распределением и параметром μ_i, $i = 1, \ldots, M$.
– $\mathcal{F} = \left\{N_{x_1^{\mathcal{F}}}, \ldots, N_{x_K^{\mathcal{F}}}\right\} = \{F_1, \ldots, F_K\}$ — дивайдеры — множество одноприборных систем массового обслуживания. Обслуживание в дивайдере F_k, $k = 1, \ldots, K$, заключается в мгновенном делении поступающего фрагмента на фиксированное число $d_k \geq 2$ новых фрагментов, которые затем мгновенно покидают дивайдер.
– $\mathcal{J} = \left\{N_{x_1^{\mathcal{J}}}, \ldots, N_{x_K^{\mathcal{J}}}\right\} = \{J_1, \ldots, J_K\}$ — интеграторы — множество бесконечноприборных систем массового обслуживания. Процесс обслуживания в интеграторе заключается в следующем: каждый поступающий фрагмент занимает свободный прибор и ожидает поступления в интегратор последнего из всех фрагментов, принадлежащих до разделения тому же самому ранее единому фрагменту. Сразу после наступления этого события эти фрагменты мгновенно освобождают приборы, объединяются в исходный фрагмент, который покидает интегратор.

Для каждого фрагмента в сети $\mathcal{N}$ введём в рассмотрение сигнатуру фрагмента. которая описывает фрагмент и отражает его связи с другими фрагментами требования.

Определение 1. Пусть σ — некоторый произвольный фрагмент в сети обслуживания, который получен непосредственно в результате деления фрагмента σ^* в дивайдере F_k. Пусть i — номер фрагмента σ при делении, $i \in \{1, \ldots, d_k\}$. *Сигнатурой фрагмента* σ назовём тройку (σ^*, k, i).

В том случае, когда σ является поступающим из источника требованием, сигнатура имеет вид $(\sigma, 0, 1)$.

Если фрагмент σ имеет сигнатуру (σ^*, k, i), то будем записывать это $\sigma \sim (\sigma^*, k, i)$.

Пусть фрагмент σ поступает в некоторый дивайдер F_k, $k \in \{1, \ldots, K\}$, который делит фрагмент σ на d_k новых фрагментов $\{\sigma_1, \ldots, \sigma_{d_k}\}$, $\sigma_i \sim (\sigma{,}k{,}i)$, $i = 1, \ldots, d_k$. Фрагменты, полученные в результате деления, мгновенно покидают F_k и распределяются по системам сети обслуживания. Предполагается, что базовые системы не изменяют сигнатуру фрагмента. Любой из полученных при делении на дивайдере фрагментов может снова разделиться на новые фрагменты при поступлении в другой дивайдер. Объединение фрагментов $\{\sigma_1, \ldots, \sigma_{d_k}\}$ происходит в интеграторе, маршрутизация фрагментов задаётся так, что все фрагменты σ_i, $i = 1, \ldots, d_k$, полученные в результате деления в F_k, должны впоследствии поступить и быть объединены только в соответствующем интеграторе J_k. Поступление указанных фрагментов в интеграторы $J_l, l \neq k$, не допускается.

Любой фрагмент $\sigma_i \in \{\sigma_1, \ldots, \sigma_{d_k}\}$, поступающий в интегратор J_k, пребывает в нём до тех пор, пока не поступят все оставшиеся фрагменты из данного множества. После этого фрагменты $\{\sigma_1, \ldots, \sigma_{d_k}\}$ освобождают обслуживающие приборы, мгновенно объединяются в исходный фрагмент σ, который покидает J_k, переходя в другую систему обслуживания или источник требований.

Фрагмент σ с сигнатурой (σ^*, k, i), будем называть k-фрагментом. Возвращение фрагмента в источник требований N_0 возможно только в случае, когда он является требованием (0-фрагментом).

Для описания маршрута фрагмента вводится *вектор перемещений* $\boldsymbol{v}$.

Определение 2. Пусть произвольный фрагмент σ характеризуется сигнатурой (σ_m, k_m, i_m), и при этом $\sigma_n \sim (\sigma_{n-1}, k_{n-1}, i_{n-1})$, $n = m, m-1, \ldots, 2$, $\sigma_1 \sim (\sigma_1, 0, 1)$. Вектор $\boldsymbol{v} = (k_0, k_1, \ldots, k_m) = (0, k_1, \ldots, k_m)$ назовём *вектором перемещений* для k_m-фрагмента σ, где k_m — *ведущий элемент* вектора перемещений.

Предполагается такая маршрутизация фрагментов, при которой вектор перемещений каждого фрагмента не может содержать одинаковых элементов, то есть $k_i \neq k_j,\ i \neq j,\ \ i{,}j = 1, \ldots, m$. Обозначим через $\mathcal{V}$ *множество допустимых векторов перемещений.* Пусть $\boldsymbol{v} = (0, k_1, \ldots, k_m)$, тогда через $(\boldsymbol{v}, k_{m+1})$ обозначим вектор $(0, k_1, \ldots, k_m, k_{m+1})$.

Маршрутизация фрагментов в сети обслуживания $\mathcal{N}$ определена посредством *набора матриц передач* $\boldsymbol{\Theta} = \left(\boldsymbol{\Theta}^{(0)}, \boldsymbol{\Theta}^{(1)}, \ldots, \boldsymbol{\Theta}^{(K)}\right)$, где $\boldsymbol{\Theta}^{(k)} = \left(\theta_{i,j}^{(k)}\right)$, $i{,}j = 0{,}1, \ldots, L,\ k = 0{,}1, \ldots, K$.

Элемент матрицы передачи $\theta_{i,j}^{(k)}$ задаёт

– вероятность перехода k-фрагмента из N_i в N_j, если $N_i \notin \mathcal{F}$;
– число k-фрагментов, полученных при делении фрагмента в дивайдере N_i, которые перейдут в N_j, если $N_i \in \mathcal{F}$.

Следовательно, верны следующие выражения:

$$\theta^{(k)}_{x_i^{\mathcal{F}},j} = 0, \quad i = 1, \ldots, K, i \neq k,\ j = 0,1, \ldots, L;$$

$$\sum_{j=0}^{L} \theta^{(k)}_{x_k^{\mathcal{F}},j} = d_k.$$

Полагаем, что набор $\boldsymbol{\Theta}$ обеспечивает корректную маршрутизацию, то есть маршрутизация фрагментов удовлетворяет условиям, указанным выше.

Раздел 2.2 посвящён методам анализа рассматриваемой сети обслуживания. Пусть $\lambda^{(\boldsymbol{v})}_{in}(N_i)$, $\lambda^{(\boldsymbol{v})}_{out}(N_i)$ — *интенсивности входящего и выходящего потоков фрагментов* с вектором перемещений $\boldsymbol{v} \in \mathcal{V}$ для системы обслуживания N_i, $i = 1, \ldots, L$. *Суммарные интенсивности* входящего $\Lambda_{in}(N_i)$ и выходящего $\Lambda_{out}(N_i)$ потоков фрагментов для систем N_i, $i = 1, \ldots, L$, определяются следующими выражениями:

$$\Lambda_{in}(N_i) = \sum_{\boldsymbol{v} \in \mathcal{V}} \lambda^{(\boldsymbol{v})}_{in}(N_i), \qquad \Lambda_{out}(N_i) = \sum_{\boldsymbol{v} \in \mathcal{V}} \lambda^{(\boldsymbol{v})}_{out}(N_i).$$

Пусть для вектора перемещений $\boldsymbol{v} \in \mathcal{V}$, k определяет его ведущий элемент. Для интенсивностей входящих и выходящих потоков в стационарном режиме функционирования сети обслуживания верны следующие выражения:

$$\lambda^{(0)}_{in}(N_j) = \Lambda_0 \theta^{(0)}_{0,j} + \sum_{i \in X_{\mathcal{S}} \cup X_{\mathcal{J}}} \lambda^{(0)}_{out}(N_i)\theta^{(0)}_{i,j}, \quad k = 0; \tag{1}$$

$$\lambda^{(\boldsymbol{v})}_{in}(N_j) = \sum_{i \in X_{\mathcal{S}} \cup X_{\mathcal{J}}} \lambda^{(\boldsymbol{v})}_{out}(N_i)\theta^{(k)}_{i,j} + \frac{1}{d_k}\lambda^{(\boldsymbol{v})}_{out}(F_k)\theta^{(k)}_{x_k^{\mathcal{F}},j}, \quad k > 0; \tag{2}$$

где $j = 1, \ldots, L$.

Справедливо, что

$$\lambda^{(\boldsymbol{v})}_{out}(S_i) = \lambda^{(\boldsymbol{v})}_{in}(S_i), \quad i = 1, \ldots, M, \tag{3}$$

$$\lambda^{(\boldsymbol{v},k)}_{out}(F_k) = d_k \lambda^{(\boldsymbol{v})}_{in}(F_k), \quad \lambda^{(\boldsymbol{v})}_{out}(J_k) = \frac{1}{d_k}\,\lambda^{(\boldsymbol{v},k)}_{in}(J_k), \quad k = 1, \ldots, K. \tag{4}$$

$$\lambda^{(\boldsymbol{v})}_{in}(F_k) = \lambda^{(\boldsymbol{v})}_{out}(J_k), \quad k = 1, \ldots, K. \tag{5}$$

Интенсивности входящих и выходящих потоков фрагментов для всех $\boldsymbol{v} \in \mathcal{V}$ являются решением уравнений (1), (2), вместе с дополнительными условиями (3) и (4). Также для вычисления интенсивностей потоков фрагментов предлагается использовать алгоритм, обладающий меньшей вычислительной сложностью, чем непосредственное решение указанных уравнений.

Утверждение 1. Математическое ожидание $\mathsf{E}\left[x_i\right]$ числа фрагментов x_i в системе S_i определяется следующим выражением

$$\mathsf{E}\left[x_i\right] = \frac{\Lambda_{in}(S_i)}{\mu_i}, \quad i = 1, \ldots, M.$$

Определение 3. Множество $\mathcal{H}_k \subset \{N_1, \ldots, N_L\}$, $k \in \{1, \ldots K\}$, таких систем обслуживания, в которые могут поступить фрагменты с вектором перемещений, содержащим k, будем называть *подсетью порождённой дивайдером* F_k. Положим дополнительно, что $F_k \in \mathcal{H}_k$.

Определение 4. Пусть сеть обслуживания $\mathcal{N}$ функционирует в стационарном режиме. Обозначим через τ_k, $k = 1, \ldots, K$, случайную величину, равную длительности интервала времени от момента разделения в дивайдере F_k произвольного фрагмента до момента объединения всех его частей в интеграторе J_k. Будем называть τ_k *длительностью реакции подсети* $\mathcal{H}_k$.

Определение 5. Матрицу $\mathbf{\Theta}^{(k)}$ из набора матриц передач $\mathbf{\Theta}$ назовём *элементарной матрицей*, если все столбцы, соответствующие переходам в дивайдеры, состоят из нулей, то есть

$$\theta^{(k)}_{i,x^{\mathcal{F}}_j} = 0, \quad i = 0,1, \ldots, L,\ j = 1, \ldots, K.$$

Определение 6. Пусть для некоторого $k \in \{1, \ldots, K\}$, $\mathbf{\Theta}^{(k)}$ — элементарная матрица, тогда будем называть подсеть $\mathcal{H}_k$ *элементарной подсетью.*

Положим, что $\mathcal{H}_k$, $k \in \{1, \ldots, K\}$, есть элементарная подсеть. Обозначим через $\mathcal{A}(k)$ множество номеров базовых систем обслуживания, в которые переходят фрагменты непосредственно после деления в F_k,

$$\mathcal{A}(k) = \left\{ j \in \{1, \ldots, M\} \colon \theta^{(k)}_{x^{\mathcal{F}}_k, x^{\mathcal{S}}_j} > 0 \right\}. \tag{6}$$

Пусть $\theta^{(k)}_{x^{\mathcal{F}}_k, x^{\mathcal{S}}_i} > 0$, тогда определим (k,i)-*ветвь подсети* как упорядоченную последовательность $\mathcal{B}(k,S_i)$ номеров таких базовых систем S_{b_j}, $j = 2, \ldots, c_{\mathfrak{b}}$, в которые возможно поступление k-фрагментов из системы S_i,

$$\mathcal{B}(k,S_i) = (b_1, b_2, \ldots, b_{c_{\mathfrak{b}}}),$$

$$b_1 = i, \quad b_2 < b_3 < \cdots < b_{c_{\mathfrak{b}}}.$$

Пусть случайная величина ξ имеет непрерывное фазовое распределение[6] порядка m, характеризуемое параметрами $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{A})$, тогда обозначим это как $\xi \sim \mathrm{PH}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{A})$, здесь $\boldsymbol{\alpha}$ — субстохастический вектор размера m, $\boldsymbol{A}$ — обратимая квадратная матрица порядка m — субгенератор, то есть выполнены следующие условия: все диагональные элементы отрицательные, все недиагональные элементы неотрицательные, все элементы вектора $\boldsymbol{A1}$ неположительные, где $\mathbf{1}$ — вектор-столбец из единиц.

Известно[7] что если $\xi \sim \mathrm{PH}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{A})$ и $\eta \sim \mathrm{PH}(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{B})$ являются независимыми случайными величинами, то $\max\{\xi,\eta\}$ имеет фазовое распределение $\mathrm{PH}(\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{C})$, где $(\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{A}) \vee (\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{B})$, а операция "$\vee$" определена следующим образом

$$\boldsymbol{\gamma} = (\boldsymbol{\alpha} \otimes \boldsymbol{\beta}, (1-\boldsymbol{\beta}\mathbf{1})\boldsymbol{\alpha}, (1-\boldsymbol{\alpha}\mathbf{1})\boldsymbol{\beta})\,, \tag{7}$$

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} \oplus \boldsymbol{B} & \boldsymbol{I} \otimes (-\mathbf{B1}) & (-\mathbf{A1}) \otimes \boldsymbol{I} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix}, \tag{8}$$

здесь $\oplus$, $\otimes$ — символы операций суммы и произведения Кронекера, $\boldsymbol{I}$ — единичная матрица.

Для каждого фрагмента в элементарной подсети процесс прохождения им ветви описывается в виде поглощающей цепи Маркова, а соответствующая длительность тогда будет иметь фазовое распределение. Очевидно, что длительность реакции элементарной подсети является максимумом из указанных величин. Для длительностей прохождения фрагментами ветвей подсети были определены их параметры, что позволило в результате использования представленного выше утверждения для максимума случайных величин сформулировать следующую теорему.

Теорема 1. *Длительность реакции τ_k элементарной подсети $\mathcal{H}_k$, $k \in \{1,\dots,K\}$, имеет фазовое распределение $\mathrm{PH}\left(\boldsymbol{\alpha}^{(k)},\boldsymbol{A}^{(k)}\right)$, где*

$$(\boldsymbol{\alpha}^{(k)},\boldsymbol{A}^{(k)}) = \bigvee_{j\in\mathcal{A}(k)} \left(\bigvee_{l=1}^{\theta^{(k)}_{x^{\mathcal{F}}_k,x^{\mathcal{S}}_j}} \left(\hat{\boldsymbol{\alpha}}^{(j)},\hat{\boldsymbol{A}}^{(j)}\right) \right),$$

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}}^{(j)} = \left(\hat{\alpha}^{(j)}_n\right), \quad n = 1,\dots,c_{\boldsymbol{b}},$$

$$\hat{\alpha}^{(j)}_1 = 1,$$

[6] Neuts M. Matrix-Geometric Solutions in Stochastic Models: An Algorithmic Approach. Baltimore : The Johns Hopkins University Press, 1981.

[7] He Q.-M. Fundamentals of Matrix-Analytic Methods. New York : Springer, 2014. 349 p.

$$\hat{\boldsymbol{A}}^{(j)} = \left(\hat{a}^{(j)}_{n,m}\right), \quad n,m = 1,\ldots,c_{\boldsymbol{b}},$$

$$\hat{a}^{(j)}_{n,m} = \mu_{b_n}\theta^{(k)}_{n^*,m^*}, \quad n \neq m,$$

$$\hat{a}^{(j)}_{n,n} = -\mu_{b_n}.$$

Здесь $(b_1,\ldots,b_{c_{\boldsymbol{b}}}) = \mathcal{B}(k,S_j)$,

$$n^* = x^{\mathcal{S}}_{b_n}, \quad m^* = x^{\mathcal{S}}_{b_m}.$$

Замечание 1. Элементарная подсеть $\mathcal{H}_k$ может быть представлена как система обслуживания типа $\cdot/\mathrm{PH}(\boldsymbol{\alpha}^{(k)}, \boldsymbol{A}^{(k)})/\infty$.

Теорема 1 позволяет рассматривать обслуживание фрагмента в элементарной подсети в виде процесса эволюции некоторой поглощающей цепи Маркова. Указанную цепь Маркова можно рассмотреть как модель процесса обслуживания некоторого фрагмента в подсети обслуживания, состоящей только из базовых систем.

На основании указанного замечания, предлагается процедура модификации исходной сети обслуживания $\mathcal{N}$, при которой элементарная подсеть $\mathcal{H}_k$ замещается другой подсетью, не содержащей дивайдеров и интеграторов, с таким же распределением длительности пребывания фрагментов в ней. Данную процедуру будем называть *редукцией сети обслуживания $\mathcal{N}$ относительно элементарной подсети $\mathcal{H}_k$*. Последовательное применение процедуры редукции позволяет найти распределение длительности пребывания требований в сети массового обслуживания.

Теорема 2. *Длительность пребывания требований в сети массового обслуживания $\mathcal{N}$ с делением и слиянием требований имеет фазовое распределение.*

Раздел 2.3 содержит подробный пример использования разработанных методов.

В *разделе 2.4* рассматривается задача нахождения стационарного распределения для элементарной сети обслуживания с делением и слиянием требований. Пусть $\mathcal{N}$ — открытая сеть массового обслуживания с делением и слиянием требований, состоящая из дивайдера F, интегратора J, базовых систем $S_1,\ldots,S_M$. Предполагается, что каждое требование из источника непосредственно поступает в дивайдер F, где делится на d фрагментов, объединение фрагментов происходит затем в интеграторе J, а полученное требование возвращается в источник. Будем называть такую сеть *элементарной* сетью обслуживания.

Состояние сети $\mathcal{N}$ определяется вектором $\boldsymbol{x} = (x_1,\ldots,x_M)$, где x_i — число фрагментов в системе S_i. Процесс $\{\boldsymbol{x}(t), t > 0\}$ является цепью Маркова с непрерывным временем и счётным множеством состояний.

Определение 7. Пусть фрагмент σ делится в дивайдере F на фрагменты $\{\sigma_1, \dots, \sigma_d\}$, тогда под *способом размещения* требования в сети обслуживания будем понимать мультимножество $\boldsymbol{l}$, состоящее из d элементов и определяемое следующим образом:

$$\boldsymbol{l} = \{N(\sigma_1), \dots, N(\sigma_d)\},$$

где $N(\sigma_i)$ обозначает систему, в которой находится фрагмент σ_i.

Процесс $\{\boldsymbol{l}(t), t > 0\}$, описывающий переход фрагментов некоторого требования от момента деления в дивайдере до момента объединения в интеграторе, является поглощающей цепью Маркова на множестве $\boldsymbol{L} = \{\boldsymbol{l}_0, \dots, \boldsymbol{l}_X\}$ всех размещений с поглощающим состоянием $\boldsymbol{l}_0 = \{J, \dots, J\}$ и начальным $\boldsymbol{l}_1 = \mathcal{A}(F)$.

Определение 8. Сопоставим цепи Маркова $\{\boldsymbol{l}(t), t > 0\}$ сеть Джексона $\mathcal{N}^{\boldsymbol{L}}$ с бесконечным числом обслуживающих приборов в системах обслуживания так, что источнику требований будет соответствовать поглощающее состояние $\boldsymbol{l}_0$, а каждой системе в сети $\mathcal{N}^{\boldsymbol{L}}$ поставим во взаимнооднозначное соответствие некоторое непоглощающее состояние из $\boldsymbol{L}$. Будем называть сеть $\mathcal{N}^{\boldsymbol{L}}$ *сетью размещений.* Далее будем использовать элементы из $\boldsymbol{L}$ для обозначения соответствующих им систем обслуживания или источника в сети $\mathcal{N}^{\boldsymbol{L}}$.

Сеть обслуживания $\mathcal{N}^{\boldsymbol{L}}$ содержит X систем. Обозначим через y_j число требований в системе обслуживания сети $\mathcal{N}^{\boldsymbol{L}}$, соответствующее способу размещения $\boldsymbol{l}_j$. Пусть сеть $\mathcal{N}^{\boldsymbol{L}}$ находится в состоянии $\boldsymbol{y} = (y_1, \dots, y_X)$, тогда число фрагментов x_i в системе S_i сети обслуживания $\mathcal{N}$

$$x_i = \sum_{j=1}^{X} y_j \, \varphi(\boldsymbol{l}_j, S_i), \quad i = 1, \dots M, \tag{9}$$

где $\varphi(\boldsymbol{l}_j, S_i)$ обозначает число вхождений элемента S_i в мультимножество $\boldsymbol{l}_j$.

Известно, что для сети $\mathcal{N}^{\boldsymbol{L}}$, стационарное распределение вероятностей состояний имеет мультипликативную форму[8],

$$\pi(y_1, \dots, y_X) = \prod_{i=1}^{X} \pi_i(y_i), \tag{10}$$

где $\pi_i(y_i)$ — стационарная вероятность пребывания y_i требований в системе с номером i.

[8]Вишневский В. М. Теоретические основы проектирования компьютерных сетей. Москва : Техносфера, 2003. 512 с.

Элементы множества $\boldsymbol{L}_i \subset \boldsymbol{L}$ будем называть значимыми способами размещения для системы S_i, если для любого $\boldsymbol{l} \in \boldsymbol{L}_i$, выполняется $\varphi(\boldsymbol{l}, S_i) > 0$.

Теорема 3. *Для сети $\mathcal{N}$ стационарная вероятность $p_i(x_i)$ того, что система S_i содержит x_i фрагментов*

$$p_i(x_i) = \sum_{u_i((y_{r_1},\ldots,y_{r_m}))=x_i} \pi_{r_1}(y_{r_1}) \ldots \pi_{r_m}(y_{r_m}), \tag{11}$$

где r_j, $j = 1, \ldots, m$, есть множество номеров значимых состояний для системы S_i, $u_i(\boldsymbol{y}) = \sum_{j=1}^{X} y_j \, \varphi(\boldsymbol{l}_j, S_i)$.

Следствие 1. Для сети $\mathcal{N}$ стационарная вероятность $p(x_1, \ldots, x_M)$ определяется как

$$p(x_1, \ldots, x_M) = \sum_{\substack{u_1(\boldsymbol{y})=x_1, \\ \cdots \\ u_M(\boldsymbol{y})=x_M}} \pi_1(y_1) \ldots \pi_X(y_X). \tag{12}$$

Таким образом, задача нахождения стационарного распределения для элементарной сети с делением и слиянием требований сводится к определению соответствующей сети размещений, для построения которой необходимо найти все способы размещения фрагментов некоторого требования по сети обслуживания. Поиск осуществляется начиная с начального состояния $\boldsymbol{l}_1 = \mathcal{A}(F)$ соответствующей цепи Маркова, на каждом шаге определяются смежные размещения для всех полученных ранее размещений, вычисляются интенсивности переходов в смежные размещения. Таким образом происходит перебор всех допустимых размещений. Алгоритм построения сети размещений представлен в диссертации и здесь не приводится.

Третья глава посвящена исследованию открытых сетей массового обслуживания произвольной топологии с делением и слиянием требований, зависимых от нагрузки.

В *разделе 3.1* рассматривается открытая бесконечноприборная сеть обслуживания $\mathcal{N}$ с делением и слиянием требований, в которой интенсивность обслуживания фрагментов одним прибором базовой системы сети *зависит от интенсивности поступающего в эту систему потока.* Пусть для базовых систем известны интенсивности входящего потока $\Lambda_{in}(S_i)$, $i = 1, \ldots, M$, тогда интенсивность обслуживания $\hat{\mu}_i$ фрагментов прибором базовой системы S_i определяется следующей зависимостью

$$\hat{\mu}_i = \mu_i - \Lambda_{in}(S_i), \quad i = 1, \ldots, M, \tag{13}$$

где μ_i есть заданные константы. Длительность пребывания фрагментов в базовой системе S_i имеет экспоненциальное распределение с параметром $\hat{\mu}_i$. Для анализа сети обслуживания $\mathcal{N}$ можно использовать методы, изложенные в предыдущей главе.

Пусть топология и маршрутизация в сети обслуживания $\mathcal{N}^f$ совпадают с сетью $\mathcal{N}$, но *все базовые системы являются одноприборными*, а интенсивность обслуживания фрагментов прибором базовой системы S_i не зависит от интенсивности поступающего в неё потока и равна μ_i.

Задачу анализа сети обслуживания $\mathcal{N}^f$ с одноприборными базовыми системами можно свести к известной задаче анализа сети $\mathcal{N}$ с бесконечноприборными базовыми системами с соответствующим образом выбранными интенсивностями обслуживания, которые будут зависеть от нагрузки. Данный метод анализа является приближённым, анализ его точности производится методами имитационного моделирования в главе 4.

В *разделе 3.2* рассматривается задача оптимизации *квазиэлементарной* сети обслуживания — сети с делением и слиянием требований, в которой все подсети, порождаемые дивайдерами, являются элементарными, а требования из источника поступают непосредственно в дивайдеры и после объединения соответствующих фрагментов в интеграторах сразу возвращаются в источник.

Предполагается, что каждое поступающее в сеть обслуживания требование имеет *вес* $w = 1$. Требование, поступившее на дивайдер F_k, $k = 1, \ldots, K$, мгновенно делится на фрагменты, которые распределяются по базовым системам в соответствии с распределением весов $\mathcal{W}$,

$$\mathcal{W} = \{w_k(l)\colon k = 1, \ldots, K, l \in \mathcal{A}(k)\}.$$

Фрагмент с весом $w_k(l) \in (0,1]$ поступает в базовую систему S_l, $l \in \mathcal{A}(k)$, где множество $\mathcal{A}(k)$ определяется выражением (6).

Выполняется *закон сохранения веса*

$$\sum_{l \in \mathcal{A}(k)} w_k(l) = 1, \quad k = 1, \ldots, K.$$

Фрагменты, полученные при делении в дивайдере F_k, будем так же называть k-фрагментами, если же дополнительно известно, что k-фрагмент поступил из F_k *непосредственно в* S_l, то будем называть его (k,l)-*фрагментом.*

Длительность пребывания фрагмента в базовой системе S_i, $i = 1, \ldots, M$, имеет *экспоненциальное распределение с параметром* $\hat{\mu}_i$,

$$\hat{\mu}_i = \mu_i - \Lambda^*_{in}(S_i),$$

где $\Lambda^*_{in}(S_i)$ есть *суммарная взвешенная интенсивность* входящего в S_i потока. Предполагается, что выполнено условие

$$\mu_i - \Lambda^*_{in}(S_i) > 0, \quad i = 1, \ldots, M.$$

Зависимость параметра $\hat{\mu}_i$ длительности обслуживания может быть выбрана исходя их технических особенностей функционирования реальной системы.

Для систем обслуживания N_i, $i = 1, \ldots, L$, обозначим через
– $\lambda_{in}^{(k,l)}(N_i)$, $\lambda_{out}^{(k,l)}(N_i)$ *интенсивности входящего и выходящего потоков* (k,l)*-фрагментов*;
– $\lambda_{in}^{(0)}(N_i)$, $\lambda_{out}^{(0)}(N_i)$ *интенсивности входящего и выходящего потоков* (0)*-фрагментов.*

Суммарная взвешенная интенсивность $\Lambda_{in}^{*}(N_i)$ входящего в N_i потока фрагментов определяется выражением

$$\Lambda_{in}^{*}(N_i) = \lambda_{in}^{(0)}(N_i) + \sum_{k=1}^{K} \sum_{l \in \mathcal{A}(k)} \lambda_{in}^{(k,l)}(N_i) w_k(l). \tag{14}$$

Рассмотрим задачу нахождения для каждого дивайдера F_k, $k = 1, \ldots, K$, такого *распределения весов* $\{w_k^{*}(l) : l \in \mathcal{A}(k)\}$, которое *минимизирует математическое ожидание длительности пребывания требований в сети обслуживания.* Предполагается, что найденное распределение может иметь нулевые компоненты, что будет означать запрет поступления фрагментов в соответствующие базовые системы.

Для решения поставленной задачи минимизации приемлемым способом является использование численных методов нелинейной оптимизации.

Моделирование сетей передачи данных с многопутевой маршрутизацией на примере протокола MPTCP рассмотрено в *разделе 3.3.* При данном виде маршрутизации поток от источника к получателю делится на некоторое число субпотоков, передача которых производится по различным маршрутам. Посредством этого достигается эффективное распределение нагрузки и увеличивается пропускная способность сети. Однако при этом возникает необходимость, связанная с синхронизацией всех субпотоков.

Исходя из указанных особенностей, в качестве модели сети передачи данных с многопутевой маршрутизацией, предложено использовать сети массового обслуживания с делением и слиянием требований. Рассматривается следующая сеть передачи данных, состоящая из
– множества терминалов (пользователей) $\mathcal{U} = \{U_1, U_2, \ldots, U_{c_{\mathcal{U}}}\}$,
– множества маршрутизаторов $\mathcal{R} = \{R_1, R_2, \ldots, R_{c_{\mathcal{R}}}\}$.

Терминалы и маршрутизаторы соединены в сеть передачи данных посредством каналов связи. Терминал $U \in \mathcal{U}$ может одновременно посылать и принимать данные, то есть терминал поддерживает несколько соединений, каждое из которых осуществляет приём, либо передачу данных. На выходе из терминала потоки данных делятся на несколько субпотоков, а при поступлении в терминал объединяются.

Пусть между двумя терминалами установлено соединение, в котором отправителем является U_i, а получателем U_j, в таком случае будем обозначать это соединение упорядоченной парой (U_i, U_j). Для каждой пары задана интенсивность потока $\lambda(U_i, U_j)$ от источника U_i к получателю U_j, предполагается, что при передаче поток от U_i делится на $d_{i,j}$ субпотоков, которые затем объединяются у получателя U_j.

Поток (субпоток) состоит из однотипных пакетов, который в модели представлен потоком требований (фрагментов). Маршрутизатор $R \in \mathcal{R}$ принимает поступающие в него потоки данных, выполняет обработку и перенаправляет их на выходные порты (каналы). В качестве модели маршрутизатора используется бесконечноприборная система массового обслуживания с экспоненциальной длительностью обслуживания. Каналы представлены также бесконечноприборными системами массового обслуживания с экспоненциальной длительностью обслуживания. Предполагается, что *интенсивность обслуживания зависит от нагрузки.* Описанная модель является сетью массового обслуживания произвольной топологии с делением и слиянием требований.

В **четвёртой главе** приведено описание разработанного комплекса программ для анализа сетей обслуживания произвольной топологии с делением и слиянием требований. Приводится краткое описание структуры программ, примеры их использования, обсуждаются полученные результаты.

Представленный проблемно-ориентированный комплекс включает программу имитационного моделирования и программу для численных расчётов вероятностных характеристик изучаемых сетей обслуживания. Интерфейс пользователя позволяет быстро описывать исследуемые модели, проводить моделирование, выполнять анализ результатов.

В разработанной имитационной модели сети обслуживания каждому типу систем соответствует описание на языке программирования, оформленное в виде некоторого класса. Требования и фрагменты в имитационной модели представлены также объектами некоторого класса, наделённого существенными для данной модели значениями. Имитационная модель является дискретно-событийной, то есть процесс функционирования сети обслуживания в имитационной модели представлен логически связанной последовательностью событий, характеризуемой интервалами времени между событиями и типом событий. Управление работой модели производится ведущей программой.

Программа для численного анализа сети обслуживания реализует предложенные в работе методы.

Программный комплекс применяется для исследования возможности использования бесконечноприборных моделей с зависимой от нагрузки интенсивностью обслуживания для приближённого анализа аналогичных сетей с одноприборными базовыми системами. Рассматривается сеть обслуживания $\mathcal{N}^f$ с одноприборными базовыми системами и вектором интенсивностей обслуживания $\boldsymbol{\mu} = (2, 2, 2, 3)$, топология которой определена на рисунке 1. Метки на соответствующих дугах задают вероятности перехода между системами сети обслуживания или число фрагментов, поступающих в базовые системы из дивайдера F.

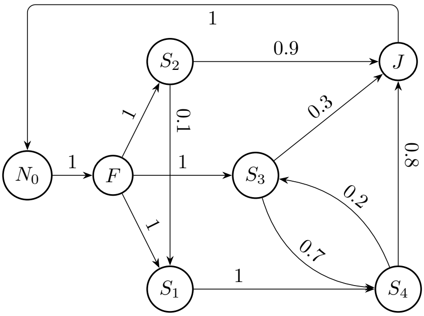

Рис. 1 — Пример сети обслуживания с делением и слиянием требований

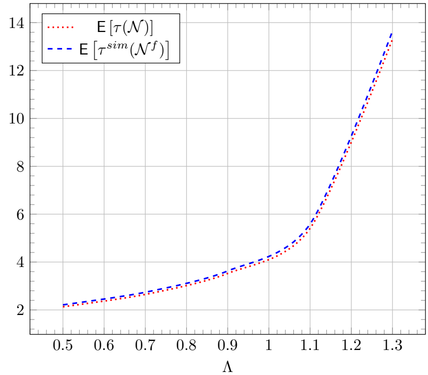

Рис. 2 — Сравнение для длительности пребывания требований в СеМО

Определяется соответствующая сеть $\mathcal{N}$ с бесконечноприборными базовыми системами, зависимыми от нагрузки. На рисунке 2 изображены графики зависимости математического ожидания $\mathsf{E}\left[\tau(\mathcal{N})\right]$ длительности пребывания требований в сети обслуживания $\mathcal{N}$ и оценки $\mathsf{E}\left[\tau^{sim}(\mathcal{N}^f)\right]$ для сети $\mathcal{N}^f$, вычисленной в результате имитационного моделирования (объём выборки для получения статистических оценок составил 50000), в зависимости от интенсивности Λ поступающего в сеть потока.

Разработанный комплекс позволяет также найти расстояние Δ Колмогорова,

$$\Delta = \sup_t \left| F_{emp}(t) - F(t) \right|,$$

где F_{emp} есть выборочная функция распределения, построенная по выборке, F — некоторая заданная функция распределения.

Пусть $F_{emp}(t)$ есть выборочная функция распределения длительности пребывания требований в сети $\mathcal{N}^f$, $F(t)$ — соответствующая функция распределения для сети $\mathcal{N}$. Таблица 1 содержит полученные результаты вычисления статистики Δ при различных значениях интенсивности входящего потока.

Таблица 1 — Расстояние Колмогорова

Λ	0.5	0.7	0.9	1.1	1.3
Δ	0.0246	0.1049	0.1248	0.0899	0.0780

Проведённые эксперименты на разработанной имитационной модели показывают, что полученное в разделе 3.1 приближение для математического ожидания длительности пребывания требований в сети обслуживания является допустимым для реальных технических задач. Максимальная относительная погрешность при этом составила не более 5%, средняя относительная погрешность не более 4%.

В **заключении** приведены основные результаты работы.

Публикации автора по теме диссертации

Статьи в журналах, включённых в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание учёной степени кандидата наук, на соискание учёной степени доктора наук:

1. **Осипов О. А.** Система обслуживания с делением и слиянием требований, в которой требование занимает все свободные обслуживающие приборы / О. А. Осипов // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия: Математика. Информатика. Физика. – 2018. – Т. 26, № 1. – С. 28–38. – DOI: 10.22363/2312-9735-2018-26-1-28-38. – 0,75 а.л.

2. **Осипов О. А.** Анализ RQ-сети массового обслуживания с делением и слиянием требований / О. А. Осипов // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2018. – № 43. – С. 49–55. – DOI: 10.17223/19988605/43/6. – 0,72 а.л.

Web of Science:

Osipov O. A. Analysis of fork/join queueing networks with retrials / O. A. Osipov // Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie vychislitelnaja tehnika i informatika – Tomsk state university journal of control and computer science. – 2018. – № 43. – P. 49–55.

3. **Осипов О. А.** Сети массового обслуживания произвольной топологии с делением и слиянием требований: случай бесконечноприборных систем обслуживания / О. А. Осипов, И. Е. Тананко // Вестник Тверского государственного университета. Серия: Прикладная математика. – 2017. – № 4. – С. 43–58. – DOI: 10.26456/vtpmk188. – 1,18 / 0,59 а.л.

Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ:

4. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2014662807. Анализ сетей массового обслуживания с разделением и слиянием требований и управлением потоками / **Осипов О. А.** (RU); правообладатель: Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского» (RU). Заявка № 2014662807; дата поступления – 15.10.2014; дата государственной регистрации в Реестре программ для ЭВМ – 09.12.2014.

Публикации в прочих научных изданиях:

5. **Осипов О. А.** Построение модели системы распределённых вычислений в виде системы массового обслуживания с делением и слиянием требований / О. А. Осипов // Информационно-телекоммуникационные технологии и математическое моделирование высокотехнологичных систем: материалы всероссийской конференции с международным участием. Москва, 24–28 апреля 2017 г. – Москва, 2017. – С. 135–136. – 0,12 а.л.

6. Тананко И. Е. Методология имитационного моделирования открытых сетей массового обслуживания произвольной топологии с делением и слиянием требований / И. Е. Тананко, **О. А. Осипов** // Компьютерные науки и информационные технологии: материалы международной научной конференции. Саратов, 30 июня – 02 июля 2016 г. – Саратов, 2016. – С. 408–411. – 0,26 / 0,13 а.л.

7. **Осипов О. А.** Моделирование сетей передачи данных с многопутевой маршрутизацией сетями массового обслуживания с делением и слиянием требований / О. А. Осипов, И. Е. Тананко // Информационно-телекоммуникационные технологии и математическое моделирование высокотехнологичных систем: материалы всероссийской конференции с международным участием. Москва, 18–22 апреля 2016 г. – Москва, 2016. С. 110–112. – 0,17 / 0,09 а.л.

8. **Осипов О. А.** О сети массового обслуживания с делением и слиянием требований с ограничением на фрагментацию / О. А. Осипов // Обозрение прикладной и промышленной математики. – 2015. – Т. 22, вып. 4 : тезисы докладов XVI Всероссийского симпозиума по прикладной и промышленной математике. Сочи, 27 сентября – 04 октября 2015 г. – С. 490–491. – 0,06 а.л.

9. **Осипов О. А.** Исследование сетей массового обслуживания с делением и слиянием требований / О. А. Осипов // Ломоносов-2015: материалы международного молодежного научного форума. Москва, 13–17 апреля 2015 г. – Москва, 2015. – 1 с. – URL: `https://lomonosov-msu.ru/archive/Lomonosov_2015/data/6968/uid80683_report.pdf` (дата обращения: 17.10.2018). – 0,07 а.л.

Подписано в печать 05.04.2019. Формат 60×84 1/16. Бумага офсетная.
Гарнитура Times New Roman. Печать RISO. Объём 1 печ. л.
Тираж 100 экз. Заказ № 043

Отпечатано с готового оригинал-макета
Центр полиграфических и копировальных услуг
Предприниматель Кравчук Е. Ю. ИНН 645500116759
410012, Саратов, ул. Московская, д. 152, офис 311, тел. 26-18-19