Использование сетей массового обслуживания с групповыми переходами требований в качестве моделей транспортных систем

Е.П. Станкевич

Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского, г. Саратов, Россия

Сети массового обслуживания с групповыми переходами требований являются удобным и эффетивным инструментом для исследования и оптимизации дискретных сложных систем с сетевой структурой и стохастическим характером функционирования. Поэтому в настоящее время большое внимание уделяется разработке методов анализа сетей массового обслуживания с групповыми переходами требований и методов управления сетями обслуживания данного класса [1–4]. В данной работе рассматривается замкнутая сеть массового обслуживания с групповыми переходами требований трех классов. Структура, принципы функционирования и методы анализа рассматриваемой неоднородной сети обслуживания подробно описаны в [3]. Системы сети обслуживания могут быть объединены в непересекающиеся кластеры систем обслуживания. Метод управления вероятностями завершения обслуживания в кластерах однородных сетей массового обслуживания, приведенный в [2], в данной работе обобщен для неоднородных сетей обслуживания. Получена мультипликативная форма стационарного распределения.

Описание модели

Рассматренная сеть массового обслуживания является математической моделью гипотетической транспортной сети. Системы массового обслуживания отображают дороги со светофорами, а требования трех классов – автомобили, движущиеся по дорогам. Требования первого класса – это автомобили, движущиеся на зеленый свет, второго класса – на желтый, третьего класса – автомобили, попавшие под красный свет светофора, ожидающие зеленого. Элементы маршрутной матрицы сети обслуживания отображают движение автомобилей на перекрестках или случаи, когда автомобиль, двигаясь по одной дороге, попадает под действие другого света светофора. Управление вероятностями завершения обслуживания в кластерах систем соответствует управлению длительностью работы определенного света светофора.

Пусть N – замкнутая сеть массового обслуживания с L системами массового обслуживания S_i, i=1,…,L, в которой обслуживаются требования трех классов. Вероятности перехода требований между системами сети определяются неприводимой маршрутной матрицей $\Theta=(\theta_{ik,jl})$, i, j=1,…,L, k, l=1,2,3, где $\theta_{ik,jl}$ – вероятность того, что требование класса k после завершения обслуживания в системе S_i поступает в систему S_j с изменением своего класса на l. Начальное число требований различных классов определяется вектором $H=(H_k)$, k=1,2,3, где H_k – начальное число требований класса k в сети, $\hat{H}=\sum_{k=1}^{3} H_k$. Система S_i, i=1,…,L, включает $\hat{H}$ одинаковых обслуживающих приборов. Предполагается, что длительность обслуживания в системе S_i, $1 \le i \le L$, требований класса k является дискретной случайной величиной, имеющей геометрическое распределение с пармаетром μ_{ik}, $0<\mu_{ik}<1$, i=1,…,L, k=1,2,3 (данные ограничения на значения μ_{ik} не влияют на общность полученных результатов).

Через интервалы времени единичной длительности, называемые слотами, в каждую систему S_i, $1 \le i \le L$, поступают управляющие сигналы, по которым обслуженные в системе S_i требования выходят из нее, освобождая занимаемые ими приборы. Состояние сети N определяется вектором $s=(s_i)$, $s_i=(s_{ik})$, i=1,…,L, k=1,2,3, где s_{ik} – число требований класса k, находящихся в системе S_i. Обозначим через X множество состояний сети N, а через $I=\{1,\dots,L\}$ – множество номеров систем массового обслуживания. В конце слота формируется вектор уходящих из систем требований $d=(d_i)$, $d_i=(d_{ik})$, i=1,…,L, k=1,2,3, где d_{ik} – число требований класса k, выходящих из системы S_i после завершения обслуживания. Затем каждое требование осуществляет переход из системы S_i в систему S_j независимо от других требований с вероятностью $\theta_{ik,jl}$. Требования класса k, поступающие в систему S_j, образуют вектор входящих требований $a=(a_j)$, $a_j=(a_{jk})$, j=1,…,L, k=1,2,3, где a_{jk} – число требований класса k, поступающих в систему S_j. Алгоритмы перехода сети N из состояния s в состояние s' подробно описаны в [3].

Сеть N имеет мультипликативную форму стационарного распределения [3]

$$\pi_s = \frac{1}{G}\prod_{i=1}^{L}\prod_{k=1}^{3}\frac{\omega_{ik}^{s_{ik}}}{s_{ik}!(\mu_{ik})^{s_{ik}}},\ s \in X,$$

где
$$G = \sum_{s\in X}\prod_{i=1}^{L}\prod_{k=1}^{3}\frac{\omega_{ik}^{s_{ik}}}{s_{ik}!(\mu_{ik})^{s_{ik}}}.$$

Здесь $\omega=(\omega_i)$, $\omega_i=(\omega_{ik})$, i=1,…,L, k=1,2,3, – вектор относительных интенсивностей потоков требований в сети N, который является решением системы уравнений потоков

$$\omega_{ik} = \sum_{j=1}^{L}\sum_{l=1}^{3}\omega_{jl}\theta_{jl,ik},\ i=1,\ldots,L,\ k=1,2,3,$$

с условием
$$\sum_{i=1}^{L}\sum_{k=1}^{3}\omega_{ik} = 1.$$

Рассмотрим сеть N^C, структура и принцип функционирования которой такие же, как у сети N, отличие состоит в том, что системы сети N^C принадлежат одному из R непересекающихся кластеров N_r, r=1,…,R, и в сети N^C осуществляется управление потоками, реализуемое посредством изменения вероятностей завершения обслуживания требований в слоте. С каждым из кластеров N_r связано множество I_r номеров систем. Предполагается, что вероятности завершения обслуживания требований определенного класса k в слоте в системах одного кластера одинаковые и равны $\hat{\mu}_{rk}$,. Длительность обслуживания требований в системе S_i, $i \in I_r$, имеет геометрическое распределение с параметром $\hat{\mu}_{rk}$, $0<\hat{\mu}_{rk}<1$, r=1,…,R, k=1,2,3.

Введем следующие обозначения для числа требований класса k, k=1,2,3, в кластере N_r, r=1,…,R:

$$n_{rk}(s) = \sum_{j\in I_r} s_{jk},$$

$$m_{rk}(d)\sum_{j\in I_r} d_{jk},$$

то есть $n(s)=(n_r(s))$, $n_r(s)=(n_{rk}(s))$, r=1,…,R, k=1,2,3, представляет вектор числа требований в кластерах, а $m(d)=(m_r(d))$, $m_r(d)=(m_{rk}(d))$, $r=1,\ldots,R$, $k=1,2,3$, – вектор числа требований, уходящих из кластеров.

Учитывая, что для сети N^C с R кластерами вероятность формирования вектора d, когда сеть находится в состоянии s, имеет вид

$$p_{s,d}=\prod_{r=1}^{R}\prod_{k=1}^{3}\prod_{i\in I_r}\binom{s_{ik}}{d_{ik}}\hat{\mu}_{rk}^{m_{rk}(d)}(1-\hat{\mu}_{rk})^{n_{rk}(s)-m_{rk}(d)},$$

и используя результаты теоремы для однородной сети массового обслуживания [2], получаем, что для сети N^C с R кластерами стационарные вероятности состояний имеют вид

$$\pi_s=\frac{1}{G}\prod_{r=1}^{R}\prod_{k=1}^{3}\left(\frac{1}{\hat{\mu}_{rk}}\right)^{n_{rk}(s)}\prod_{i\in I_r}\frac{\omega_{ik}^{s_{ik}}}{s_{ik}!},\ s\in X,$$

где
$$G=\sum_{s\in X}\prod_{r=1}^{R}\prod_{k=1}^{3}\left(\frac{1}{\hat{\mu}_{rk}}\right)^{n_{rk}(s)}\prod_{i\in I_r}\frac{\omega_{ik}^{s_{ik}}}{s_{ik}!}.$$

Предположим, что требуется, чтобы число требований в кластере N_1 не превосходило некоторого фиксированного числа M_1. Этого можно достичь уменьшением вероятностей завершения обслуживания требований в слоте в системах обслуживания других кластеров посредством использования множителя ε_r в кластере N_r, $r=2,\ldots,R$, когда $n_1(s)>M_1$, $s\in X$. Таким образом, получим обслуживание в сети, учитывающее взаимную зависимость кластеров.

Обозначим $\mathbf{1}(A)$ индикатор события A, то есть $\mathbf{1}(A)=1$, если событие A произошло, и $\mathbf{1}(A)=0$ в противном случае.

Используя результаты работы [2], для сети N^C с R взаимозависимыми кластерами и тремя классами требований, если требуется, чтобы $n_1(s)\le M_1$, получаем, что стационарные вероятности состояний имеют вид

$$\pi_s=\frac{1}{G}\left[\prod_{r=2}^{R}\varepsilon_r-\left(\prod_{r=2}^{R}\varepsilon_r-1\right)\mathbf{1}(n_1(s)\le M_1)\right]\prod_{r=1}^{R}\prod_{k=1}^{3}\left(\frac{1}{\hat{\mu}_{rk}}\right)^{n_{rk}(s)}\prod_{i\in I_r}\frac{\omega_{ik}^{s_{ik}}}{s_{ik}!},\ s\in X,$$

где

$$G=\sum_{s\in X}\left[\prod_{r=2}^{R}\varepsilon_r-\left(\prod_{r=2}^{R}\varepsilon_r-1\right)\mathbf{1}(n_1(s)\le M_1)\right]\prod_{r=1}^{R}\prod_{k=1}^{3}\left(\frac{1}{\hat{\mu}_{rk}}\right)^{n_{rk}(s)}\prod_{i\in I_r}\frac{\omega_{ik}^{s_{ik}}}{s_{ik}!}.$$

Заключение

Одной из причин автомобильных пробок на дорогах являются неправильно отрегулированные светофоры. Целью приведенного метода управления вероятностями завершения обслуживания требований в системах является ограничение сверху числа требований, которые могут находиться в системе. Другими словами, в данной работе приведен метод управления длительностями работы светофора для того, чтобы число автомобилей, движущихся по определенной дороге, не превосходило заранее заданного числа. Заметим, что в транспортной сети по дороге может двигаться конечное число автомобилей. В системах обслуживания рассматриваемой сети, бесконечное число обслуживающих приборов. Это ограничение снимается введением максимального числа требований, которые могут находиться в системе обслуживания.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Boucherie R.J., Dijk N.M.* Product forms for queueing networks with state-dependent multiple job transitions // Adv. Appl. Prob. 1991. V. 23. No. 1. P. 152–187.
2. *Митрофанов Ю.И., Долгов В.И., Рогачко Е.С., Станкевич Е.П.* Сети массового обслуживания с групповыми переходами требований, блокировками и кластерами // Известия Сарат. ун-та. Нов. сер. Серия Математика. Механика. Информатика, 2013. Т. 13. Вып. 2. Ч. 2. С. 20–31.
3. *Митрофанов Ю.И., Рогачко Е.С., Станкевич Е.П.* Анализ неоднородных сетей массового обслуживания с групповыми переходами требований // Известия Сарат. ун-та. Нов. сер. Серия Математика. Механика. Информатика. 2011. Т. 11. Вып. 3. Ч. 1. С. 41–46.
4. *Тананко И.Е., Фокина Н.П.* Анализ замкнутых ненадежных сетей массового обслуживания с групповыми переходами требований // Известия Сарат. ун-та. Нов. сер. Серия Математика. Механика. Информатика. 2013. Т. 13. Вып. 2. Ч. 1. С. 111–117.

Станкевич Елена Петровна, старший преподаватель, stankevichelena@mail.ru