Анализ RQ-системы M/GI/GI/1/1 с вызываемыми заявками, ненадежным прибором и дообслуживанием прерванных заявок [1]

С.В. Пауль, А.А. Назаров

Томский государственный университет, г. Томск, Россия

RQ-системы характеризуются тем фактом, что блокированные пользователи не теряются, а повторяют свою попытку захвата прибора через некоторое время. Это явление возникает в различных реальных системах связи со случайным доступом [1], где несколько пользователей используют один канал связи. Также эти ситуации возникают и в системах обслуживания, таких, как call-центры, где клиенты, которые не могут связаться с оператором, совершают свой звонок позже [2, 3].

С точки зрения оптимального управления, в системах обслуживания, таких, как центры обработки вызовов, время простоя оператора должно использоваться для повышения производительности. Поэтому оператор не только принимает вызовы извне, но также выполняет исходящие вызовы в режиме простоя [4]. Эти ситуации моделируются системами с двумя типами заявок, где сервер обслуживает входящие и вызываемые вызовы. В последнее время такие системы широко изучаются [5–9].

В предложеных системах могут возникать ситуации, при которых работа обслуживающего устройства может быть прервана поломкой, после чего в течение некоторого времени (периода восстановления) происходит его ремонт.

Системы с ненадежным прибором часто являются предметом современных исследований [10], результаты которых могут применяться в работе с мультимедийными приложениями. Кроме того, системы с выходящими из строя приборами часто появляются при анализе транспортных систем. Примером могут послужить работы [11, 12].

В предложенной работе рассматривается RQ-система M/GI/GI/1/1 с двумя классами заявок, ненадежным прибором и дообслуживанием прерванных заявок. Для предложенной системы найдено распределение вероятностей состояний прибора и условие существования стационарного режима.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 18-01-00277 от 30.01.2018.

Математическая модель и постановка задачи

Рассмотрим однолинейную RQ-систему с вызываемыми заявками и ненадежным прибором. На вход системы поступает простейший поток заявок с интенсивностью λ.

Заявка входящего потока, поступая в систему и обнаруживая прибор свободным, занимает его, а прибор начинает обслуживание в течение времени, распределенного с функцией $B_1(x)$. Если в момент поступления заявки прибор занят, то она мгновенно уходит на орбиту и осуществляет там случайную задержку в течение экспоненциально-распределенного времени с параметром σ, завершив которую повторно обращается к прибору с попыткой получить обслуживание.

Когда прибор свободен, он вызывает из внешней среды (не с орбиты) с интенсивностью α дополнительные заявки, время обслуживания которых имеет функцию распределения $B_2(x)$.

Будем рассматривать систему с ненадежным прибором, который на интервалах обслуживания поступивших заявок с интенсивностью γ выходит из строя и восстанавливается с интенсивностью μ. В свободном состоянии и при обслуживании вызываемых заявок прибор надежен и не может выходить из строя.

Если во время обслуживания поступившей заявки прибор выходит из строя, то обслуживаемая заявка остается ждать на приборе и, как только прибор восстанавливается, она дообслуживается.

Когда прибор обслуживает вызываемую заявку или прибор находится в состоянии восстановления, заявки входящего потока уходят на орбиту.

Обозначим процесс $i(t)$ – число заявок в системе в момент времени t, поступивших (не вызванных) в систему.

Ставится задача – нахождение условий существования стационарного режима в рассматриваемой RQ-системе M/GI/GI/1/1 с ненадежным прибором и дообслуживанием прерванных заявок.

Система уравнений Колмогорова

Состояния прибора в момент времени t обозначим $k(t)$:

$$k(t)=\begin{cases}0,\ \text{прибор свободен;}\\ 1,\ \text{прибор занят обслуживанием заявки входящего потока;}\\ 2,\ \text{прибор занят обслуживанием вызываемой заявки;}\\ 3,\ \text{прибор находится в состоянии восстановления.}\end{cases}$$

$z(t)$ – остаточное время обслуживания, когда $k=\overline{1,3}$.

Также обозначим вероятности

$$P\{k(t) = k, i(t)=i, z(t)<z\}= P_k(i, z, t), k=1, 2, 3,$$

$$P\{k(t) = k, i(t)=i\}= P_k(i, t), k= 0. \qquad (1)$$

Так как случайный процесс $\{k(t), i(t), z(t)\}$, k=1, 2, 3, $\{k(t), i(t)\}$, k=0, с переменным числом компонент марковский, то для распределения вероятностей (3) составим систему уравнений Колмогорова. Запишем равенства

Обозначим $P_k(i,\infty,t)=P_k(i,t), \quad k=1,2$. При k = 3 $z(t)$ – остаточное время обслуживания заявки, которая дожидается восстановления прибора для завершения своего обслуживания. Система уравнений Колмогорова для распределения вероятностей в стационарном режиме имеет вид

$$-(\lambda+\alpha+i\sigma)P_0(i)+\frac{\partial P_1(i+1,0)}{\partial z}+\frac{\partial P_2(i,0)}{\partial z}=0,$$

$$\frac{\partial P_1(i,z)}{\partial z}-\frac{\partial P_1(i,0)}{\partial z}-(\lambda+\gamma)P_1(i,z)+\lambda P_1(i-1,z)+$$
$$+\mu P_3(i,z)+\lambda B_1(z)P_0(i-1)+i\sigma B_1(z)P_0(i)=0,$$

$$\frac{\partial P_2(i,z)}{\partial z}-\frac{\partial P_2(i,0)}{\partial z}-\lambda P_2(i,z)+\lambda P_2(i-1,z)+\alpha B_2(z)P_0(i)=0,$$

$$-(\lambda+\mu)P_3(i,z)+\lambda P_3(i-1)+\gamma P_1(i,z)=0. \qquad (2)$$

Введем частичные характеристические функции, обозначив $j=\sqrt{-1}$

$$H_0(u)=\sum_{i=0}^{\infty}e^{jui}P_0(i),\quad H_k(u,z)=\sum_{i=1}^{\infty}e^{jui}P_k(i,z),\quad k=\overline{1,3}. \qquad (3)$$

Тогда, применяя (2), запишем систему уравнений для функций (3)

$$-(\lambda+\alpha)H_0(u)+e^{-ju}\frac{\partial H_1(u,0)}{\partial z}+\frac{\partial H_2(u,0)}{\partial z}+j\sigma H_0'(u)=0,$$

$$\frac{\partial H_1(u,z)}{\partial z}-\frac{\partial H_1(u,0)}{\partial z}+\left(\lambda\left(e^{ju}-1\right)-\gamma\right)H_1(u,z)+$$
$$+\mu H_3(u,z)+B_1(z)\left\{\lambda e^{ju}H_0(u)-j\sigma H_0'(u)\right\}=0,$$

$$\frac{\partial H_2(u,z)}{\partial z}-\frac{\partial H_2(u,0)}{\partial z}+\lambda\left(e^{ju}-1\right)H_2(u,z)+\alpha B_2(z)H_0(u)=0\ ,$$

$$\left(\lambda\left(e^{ju}-1\right)-\mu\right)H_3(u,z)+\gamma H_1(u,z)=0\ . \tag{4}$$

В системе (4) выполним предельный переход, устремив $z\to\infty$, и суммирование полученных уравнений, получим уравнение

$$-\frac{\partial H_1(u,0)}{\partial z}+\lambda e^{ju}\left[H_0(u)+H_1(u)+H_2(u)+H_3(u)\right]=0. \tag{5}$$

Здесь $H_k(u,\infty)=H_k(u),\quad k=\overline{1,3}$. Так как

$$H_0(u)+H_1(u)+H_2(u)+H_3(u)=H(u), \tag{6}$$

равенство (6) позволяет в системе (5) исключить первое уравнение, заменив его на уравнение (6), тогда систему уравнений для частичных характеристических функций (5) перепишем в виде

$$\frac{\partial H_1(u,z)}{\partial z}-\frac{\partial H_1(u,0)}{\partial z}+\left(\lambda\left(e^{ju}-1\right)-\gamma\right)H_1(u,z)+$$
$$+\mu H_3(u,z)+B_1(z)\left\{\lambda e^{ju}H_0(u)-j\sigma H_0'(u)\right\}=0\ ,$$

$$\frac{\partial H_2(u,z)}{\partial z}-\frac{\partial H_2(u,0)}{\partial z}+\lambda\left(e^{ju}-1\right)H_2(u,z)+\alpha B_2(z)H_0(u)=0\ ,$$

$$\left(\lambda\left(e^{ju}-1\right)-\mu\right)H_3(u,z)+\gamma H_1(u,z)=0\ ,$$

$$\lambda e^{ju}H(u)-\frac{\partial H_1(u,0)}{\partial z}=0.$$

Распределение вероятностей числа заявок в RQ-системе с дообслуживанием заявок

Докажем следующее утверждение.

Теорема. Для рассматриваемой RQ-системы с дообслуживанием, обозначая $b_1=\int\limits_0^\infty xdB_1(x)$, $b_2=\int\limits_0^\infty xdB_2(x)$, вероятности r_k = $P\{k(t)=k\}$, $k=\overline{0,3}$, состояний прибора имеют вид

$$r_0 = \frac{1}{1+\alpha b_2}\left\{1 - \frac{\mu+\gamma}{\mu}\cdot\lambda b_1\right\},\ r_1 = \lambda b_1,\ r_2 = \alpha b_2 r_0,\ r_3 = \frac{\gamma}{\mu} r_1. \tag{8}$$

Доказательство. Обозначим

$$H_k(0,s) = r_k(s),\ H_0(u)\big|_{u=0} = r_0,\ H_0'(u)\big|_{u=0} = jm_0,$$

$$\left.\frac{\partial H_k(u,z)}{\partial z}\right|_{u=0} = r_k'(z), \qquad \left.\frac{\partial H_k(u,0)}{\partial z}\right|_{u=0} = r_k'(0), \quad k = 1,2, \tag{9}$$

тогда при $u = 0$ из системы (8) получим систему уравнений:

$$r_1'(z) - r_1'(0) - \gamma r_1(z) + \mu r_3(z) + B_1(z)\{\lambda r_0 + \sigma m_0\} = 0,$$

$$r_2'(z) - r_2'(0) + \alpha B_2(z) r_0 = 0,$$

$$-\mu r_3(z) + \gamma r_1(z) = 0,$$

$$\lambda - r_1'(0) = 0. \tag{10}$$

Складываем первое и третье уравнения системы (10), получим

$$r_1'(z) = r_1'(0) - B_1(z)\{\lambda r_0 + \sigma m_0\}.$$

Из четвертого уравнения имеем

$$r_1'(0) = \lambda.$$

Тогда

$$r_1'(z) = \lambda - B_1(z)\{\lambda r_0 + \sigma m_0\},$$

$$r_2'(z) = r_2'(0) - \alpha B_2(z) r_0. \tag{11}$$

Устремим $z \to \infty$, получим, что выполняются равенства

$$\lambda = \lambda r_0 + \sigma m_0,$$

$$r_2'(0) = \alpha r_0.$$

Систему (11) перепишем в виде

$$r_1(z) = \lambda \int_0^z (1 - B_1(x))dx,\ r_2(z) = \alpha r_0 \int_0^z (1 - B_2(x))dx. \tag{12}$$

При $z \to \infty$ из этих равенств и третьего уравнения системы (10) получим выражения

$$r_1 = \lambda b_1,\ r_2 = \alpha b_2 r_0,\ r_3 = \frac{\gamma}{\mu} r_1. \tag{13}$$

Значение вероятности r_0 найдем из условия нормировки в виде первого равенства в (8). Теорема доказана.

Следствие. Условием существования стационарного режима в рассматриваемой RQ-системе с дообслуживанием является выполнение неравенства

$$\lambda < \frac{\mu}{\mu+\gamma} \cdot \frac{1}{b_1} \tag{14}$$

Доказательство. Условие (14) следует из положительности вероятности r_0 в (10). Следствие доказано.

Определим пропускную способность S системы как максимальное среднее число заявок, которые могут быть обслужены в рассматриваемой системе за единицу времени. В силу неравенства (14) значение S для рассматриваемой RQ-системы с вызываемыми заявками и ненадежным прибором определяется равенством

$$S = \frac{\mu}{\mu+\gamma} \cdot \frac{1}{b_1}. \tag{15}$$

Если значение параметра λ входящего потока определять равенством $\lambda = \rho S$, то при любых значениях параметра $0 < \rho < 1$ в рассматриваемой RQ-системе существует стационарный режим, а вероятности r_k из (8) состояний прибора можно записать в виде

$$r_0 = \frac{1-\rho}{1+\alpha b_2},\ r_1 = \rho\frac{\mu}{\mu+\gamma},\ r_2 = \alpha b_2 \frac{1-\rho}{1+\alpha b_2},\ r_3 = \frac{\gamma}{\mu+\gamma}\rho, \tag{16}$$

который не зависит от вида функций распределения $B_1(x)$ и $B_2(x)$ времени обслуживания как поступающих, так и вызываемых заявок. При этом интенсивность λ входящего потока линейно зависит от S, которая в силу (15) не зависит от вида функций распределения $B_1(x)$ и $B_2(x)$.

Заключение

В работе была рассмотрена RQ-система M/GI/GI/1/1 с двумя классами заявок, ненадежным прибором и дообслуживанием прерваных заявок. Для предложеной модели найдено распределение вероятностей состояний прибора и условие существования стационарного режима.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Artalejo J.R., Gomez-Corral A.* Retrial queueing systems: a computational approach. Springer, 2008. P. 315.
2. *Falin G.I., Templeton J.G.C.* Retrial Queues. London: Chapman and Hall, 1997.
3. *Bhulai S., Koole G.* A queueing model for call blending in call centers // IEEE Transactions on Automatic Control. 2003. V. 48. P. 1434–1438.
4. *Deslauriers A., L'Ecuyer P., Pichitlamken J., Ingolfsson A. Avramidis A. N.* Markov chain models of a telephone call center with call blending. Computers and Operations Research. 2007. V. 34. P. 1616–1645.
5. *Choi B.D., Choi K.B., LeeY.W.* M/G/1 retrial queueing systems with two types of calls and finite capacity // Queueing Systems. 1995. V. 19. P. 215–229.
6. *Tran-Gia P., Mandjes M.* Modeling of customer retrial phenomenon in cellular mobile networks // IEEE Journal on Selected Areas in Communications. 1997. V. 15. P. 1406–1414.
7. *Artalejo J.R., Phung-Duc T.* Markovian retrial queues with two way communication // J. Industrial and Management Optimization. 2012. V. 8. P. 781–806.
8. *Artalejo J.R., Phung-Duc T.* Single server retrial queues with two way communication // Applied Mathematical Modelling. 2013. V. 37. No. 4. P. 1811–1822.
9. *Nazarov A., Paul S., Gudkova I.* Asymptotic Analysis of Markovian Retrial Queue with Two-Way Communication under Low Rate of Retrials Condition // Proc. 31st European Conference on Modelling and Simulation, ECMS, Budapest, 2017. P. 687–693.
10. *Djellab N.V.* On the M/G/1 retrial queue subjected to breakdowns // RAIRO – Operations Research. 2002. V.36. No. 4. P. 299–310.
11. *Афанасьева Л.Г., Булинская Е.В.* Некоторые задачи для потоков взаимодействующих частиц // Современные проблемы математики и механики. 2009. С. 55–67.
12. *Афанасьева Л.Г., Булинская Е.В.* Математические модели транспортных систем, основанные на теории очередей // Труды МФТИ. 2010. Вып. 4(2). С. 6–21.

Пауль Светлана Владимировна, к.ф.-м.н., доцент paulsv82@mail.ru;
Назаров Анатолий Андреевич, д.т.н., профессор, nazarov.tsu@gmail.com