На правах рукописи

ЧАН КУАНГ КУИ

МНОГОКАНАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С ОГРАНИЧЕННЫМ СРЕДНИМ ВРЕМЕНЕМ ПРЕБЫВАНИЯ ЗАЯВКИ В ОЧЕРЕДИ

05.13.18 – Математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание учёной степени
кандидата технических наук

Казань - 2018

Работа выполнена на кафедре интеллектуальных систем и управления информационными ресурсами федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Казанский национальный исследовательский технологический университет»

Научный руководитель	доктор физико-математических наук, профессор Кирпичников Александр Петрович
Официальные оппоненты	Тарасов Вениамин Николаевич, доктор технических наук, профессор, федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Поволжский государственный университет телекоммуникаций и информатики», заведующий кафедрой программного обеспечения и управления в технических системах
	Моисеева Светлана Петровна, доктор физико-математических наук, профессор, федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский Томский государственный университет», профессор кафедры теории вероятностей и математической статистики
Ведущая организация	Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Казанский национальный исследовательский технический университет имени А.Н. Туполева-КАИ»

Защита состоится 25 декабря 2018 года в 16.30 часов на заседании диссертационного совета Д 212.080.13, созданного на базе ФГБОУ ВО «Казанский национальный исследовательский технологический университет», по адресу: 420015, г. Казань, ул. К. Маркса, д.68, зал заседаний Ученого совета (А-330).

Отзывы на автореферат (в двух экземплярах), заверенные гербовой печатью учреждения, просим отправлять по адресу: 420015, г. Казань, ул. К. Маркса, д.68, ФГБОУ ВО «КНИТУ», ученому секретарю диссертационного совета Д 212.080.13.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ФГБОУ ВО «КНИТУ» и по адресу http://www.kstu.ru/servlet/contentblob?id=254795.

Автореферат разослан 2018 года.

Ученый секретарь диссертационного совета Д 212.080.13
доктор технических наук, профессор — Клинов Александр Вячеславович

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования. В теории массового обслуживания особенный интерес всегда вызывали системы массового обслуживания (СМО) с того или иного рода ограничениями на управляющие параметры системы. Дело в данном случае заключается в том, что системы с различными ограничениями весьма часто востребованы при решении самого разного рода прикладных задач в самых различных, порой весьма далеко отстоящих друг от друга предметных областях. В частности, к таким предметным областям можно отнести как традиционно связанную с теорией массового обслуживания логистику, так и такие инновационные области современных приложений, как, например, теория телетрафика, теория телекоммуникаций и многие другие.

Среди задач с ограничениями выделяется класс задач с ограничениями, накладываемыми на среднее время пребывания поступившей в систему заявки как в очереди в ожидании начала обслуживания, так и в системе массового обслуживания в целом (как в очереди, так и под обслуживанием). Говоря другими словами, в СМО данного типа часть заявок являются так называемыми «нетерпеливыми» заявками, которые, подождав некоторое время, могут уйти либо из очереди, либо из системы, в том числе находясь на стадии обслуживания [1-2]. Модели такого типа, однако, являются наименее изученным классом систем массового обслуживания среди всех типов СМО.

Вследствие вышеизложенного задача построения замкнутой и внутренне непротиворечивой математической модели системы массового обслуживания с «нетерпеливыми» заявками является актуальной.

Степень разработанности темы. С точки зрения математики основная задача изучения такого рода систем заключается в следующем. Даже для наиболее удобных для исследования моделей марковского типа, в ходе расчётов появляются суммы бесконечного или конечного числа слагаемых, не сводящиеся, однако, к суммам соответствующих геометрических прогрессий. Таким образом, в данном случае для решения такого рода задач приходится прибегать к приближённым численным схемам, в которых каждая числовая характеристика задачи рассчитывается отдельно от других при помощи суммирования первых нескольких слагаемых соответствующего конечного или бесконечного ряда. При этом невозможно, конечно, получить замкнутое аналитическое решение задачи, хотя можно, пусть и достаточно грубо, оценить основные характеристики системы массового обслуживания данного типа. Для ряда прикладных задач этого вполне хватает, но при этом, как правило, не удаётся более детально изучить процессы, протекающие в системах такого рода. В современных условиях отсутствие замкнутого аналитического решения, в рамках которого все основные числовые характеристики системы рассчитывались бы с требуемой точностью и были бы при этом связаны друг с другом, является значительным пробелом в теории массового обслуживания, понимаемой как прикладная область исследований.

В связи с вышеизложенным, в работах [1, 2] впервые была сделана более или менее успешная попытка нового подхода к изучению систем массового обслуживания с ограничениями на среднее время заявки в очереди или в системе в целом. Смысл этих работ заключается в следующем. Именно, в работе [1] было впервые предложено использовать для суммирования рядов, неподдающихся до этого современным методам анализа, так называемую функцию Г. Миттаг-Леффлера первого порядка, хорошо известную специалистам в области теории функции комплексного переменного и интегральных преобразований. При этом была впервые осуществлена полная математическая формализация соответствующим образом поставленной задачи, включая вычисление первых и вторых моментов соответствующих числовых характеристик системы. В работах [1, 2], однако, содержится решение задачи с ограничением на среднее время лишь в том случае, когда все поступающие в систему массового обслуживания требования, можно назвать «нетерпеливыми» требованиями (заявками). Между тем, с точки зрения возможных приложений, более интересной представляется определённым образом расширенная постановка задачи.

С точки зрения практики было бы весьма интересно рассмотреть такой вариант постановки задачи, в котором так называемые «нетерпеливые» заявки могут покидать очередь лишь тогда, когда её длина превышает некоторое наперёд заданное фиксированное числовое значение. Это значение в дальнейших расчётах мы будем обозначать буквой E. После того, как перед требованием, находящимся в очереди на обслуживание, осталось E заявок, требования перестают покидать очередь и в любом случае дожидаются начала обслуживания, то есть переходят из разряда «нетерпеливых» в разряд «терпеливых» требований. Особенное значение имеет при этом возможность изучения поведения вторых моментов соответствующих величин, характеризующих СМО данного типа.

Вторые моменты вышеуказанных величин при этом являются одними из основных числовых характеристик систем массового обслуживания различных типов. Между тем даже для большинства систем массового обслуживания с простейшим входящим потоком заявок и экспоненциальным временем их обслуживания аналитические формулы этих величин отсутствуют в опубликованной к настоящему времени научной литературе. При этом моменты высших порядков сравнительно хорошо изучены лишь для одноканальных моделей СМО различных типов. Что же касается систем массового обслуживания с большим числом каналов, то в опубликованной к настоящему времени научной литературе можно найти лишь формулы вторых моментов некоторых числовых характеристик для модели с неограниченным объёмом накопителя (в рамках классификации М. Кендалла

– модель M/M/m). Для более же сложных моделей эти характеристики неизвестны, несмотря на большое количество работ, посвящённых различным прикладным аспектам теории массового обслуживания, изданным за последнее время. Изучение этих характеристик, однако, позволяет сделать ряд весьма интересных и значимых для практики выводов о режимах функционирования систем такого рода. Всё вышесказанное в полной мере относится и к системам массового обслуживания с ограниченным средним временем пребывания заявки в очереди в ожидании начала обслуживания.

Цель данной работы заключается в разработке аналитической и имитационной моделей для изучения свойств и характеристик систем массового обслуживания с ограниченным средним временем пребывания заявки в очереди на обслуживание в том случае, когда в системе присутствуют как «нетерпеливые», так и «терпеливые» заявки.

Для достижения поставленной цели в диссертационной работе решаются следующие **задачи**:

1. Построение и анализ математической модели системы массового обслуживания с ограниченным средним временем пребывания заявки в очереди на обслуживание в том случае, когда в системе присутствуют заявки двух типов.
2. Построение имитационной модели системы массового обслуживания указанного типа для изучения функционирования систем такого рода на нестационарных участках траекторий их основных числовых характеристик.

Научная новизна исследований, представленных в диссертационной работе, заключается в следующем:

1. Предложена математическая модель открытой многоканальной системы массового обслуживания с ограниченным средним временем пребывания заявки в очереди на обслуживание. Основным отличием от изученных ранее моделей систем такого рода является впервые введённое допущение, заключающееся в том, что так называемые «нетерпеливые» заявки могут покидать очередь лишь тогда, когда число заявок в очереди превышает некоторое наперёд заданное фиксированное значение E.
2. Получены аналитические выражения для первых и вторых моментов основных дискретных и непрерывных величин, характеризующих системы с очередями. К таким величинам относятся количество занятых каналов обслуживания в обслуживающем многоканальном устройстве, количество заявок, находящихся в очереди в ожидании начала обслуживания, время нахождения одного требования в очереди, а также полное число заявок в системе и полное время пребывания требований в системе в целом (как в очереди, так и под обслуживанием).

3. Построена имитационная структурная модель открытой многоканальной системы массового обслуживания с ограниченным средним временем ожидания заявки в очереди на обслуживание в том случае, если число заявок в очереди превышает некоторое заданное значение E, для исследования поведении систем такого рода на нестационарных участках траекторий их основных числовых характеристик.

Теоретическая и практическая значимость работы. Разработанная модель и полученные в диссертационной работе формулы для вычисления вероятностных и числовых характеристик СМО, предназначены для разработки и решения многочисленных задач в различных предметных областях, имеющих отношение к оптимальному управлению системами массового обслуживания с ограниченным средним временем пребывания заявки в очереди на обслуживание. Подобные математические модели позволяют по известным значениям интенсивности входного потока заявок рассчитать различные параметры, характеризующие производительность системы, а также в каждом конкретном случае исследовать их поведение при изменении нагрузки на систему со стороны входного потока.

Результаты диссертационной работы были использованы для наилучшей организации обслуживания клиентов в сети салонов розничной торговли компании «RBT.ru». Математическая модель, представленная в диссертационной работе, позволяет достаточно гибко описать объекты подобного рода, поскольку в ней учитывается тот факт, что при длительном ожидании в очереди часть потенциальных клиентов может покинуть место торговли, не дожидаясь начала обслуживания. Принятые в соответствии с указанными рекомендациями меры позволили сократить финансовые издержки компании, вызванные неоправданным уменьшением количества клиентов при возрастании нагрузки со стороны входного потока.

Методология и методы исследования. В диссертационной работе применяются методология и методы теории массового обслуживания, теории вероятностей, теории марковских случайных процессов, математической теории телетрафика.

Положения, выносимые на защиту.

1. Основные вероятностные характеристики рассматриваемой СМО, в том числе вероятности стационарных состояний системы, вероятность её полного простоя и вероятность ожидания заявкой начала обслуживания.
2. Аналитические выражения для первых и вторых моментов основных дискретных и непрерывных величин, характеризующих системы с очередями.
3. Имитационная модель открытой многоканальной системы массового обслуживания с ограниченным средним временем ожидания заявки в

очереди на обслуживание в том случае, если число заявок в очереди превышает некоторое заданное значение E.

4. Комплекс программ в инструментальной среде имитационного моделирования GPSS World для изучения нестационарных режимов функционирования рассматриваемых систем массового обслуживания и поведения их основных характеристик во времени.

Степень достоверности и апробация результатов. Достоверность результатов, полученных в диссертации, следует из применяемых строгих математических методов теории массового обслуживания, теории вероятностей, теории марковских случайных процессов и математической теории телетрафика, строгостью проведения математических выкладок и преобразований, а также сравнением с результатами имитационного моделирования соответствующих процессов.

Основные результаты диссертации докладывались на следующих научных конференциях:

1. XXIX Международная научная конференция «Математические методы в технике и технологиях ММТТ-29», Саратов, 2016;
2. I Международная научно-практическая конференция «Проблемы развития современной науки», Пермь; 2016;
3. IX Международная научно-практическая конференция «Современное состояние и перспективы инновационного развития нефтехимии», Нижнекамск, 2016;
4. XXX Международная научная конференция «Математические методы в технике и технологиях ММТТ-30», Санкт-Петербург, 2017;
5. Международная научно-практическая конференция «Тенденции развития логистики и управления цепями поставок», Казань, 2017;
6. Международная научно-практическая конференция «Новая наука: история становления, современное состояние, перспективы развития», Стерлитамак, 2018.

Структура и объём работы. Диссертационная работа состоит из введения,четырёх глав, заключения, включающего итоги данного исследования, рекомендации и перспективы дальнейшей разработки темы, списка использованной литературы и приложения. Диссертация напечатана в 1,5 межстрочных интервала, полный объём 134 страницы, включая 64 рисунка и 1 таблицу. Библиографический список состоит из 92 литературных источников.

Основное содержание работы

Введение включает в себя актуальность темы исследования; степень её разработанности; цели и задачи диссертационного исследования; научную новизну; теоретическую и практическую значимость работы; методологию и методы исследования; положения, выносимые на защиту; степень достоверности и апробацию результатов работы.

Первая глава посвящена изучению вероятностных характеристик систем массового обслуживания с ограниченным средним временем пребывания заявки в очереди.

В параграфе 1.1 осуществлена постановка задачи для более простого случая одноканальной системы массового обслуживания. Получены записанные при помощи функции Г. Миттаг-Леффрера первого порядка аналитические выражения для вероятностей стационарных состояний системы и вероятности её полного простоя, в том случае, когда требования в системе отсутствуют.

В параграфе 1.2 осуществлена общая постановка задачи для многолинейной (многоканальной) системы соответствующего типа. Получены общие выражения для соответствующих вероятностей стационарных состояний системы, которые имеют вид

$$p_k = \frac{\rho^k}{k!} p_0 \quad \text{при} \quad k \le m; \quad p_k = \frac{\rho^k}{m!m^{k-m}} p_0 \quad \text{при} \quad m \le k \le m+E;$$

$$p_k = \frac{\rho^{m+E}}{m!} \frac{\alpha^{k-m-E}}{m^E \left(m/\beta + 1 \right)_{k-m-E}} p_0 \quad \text{при} \quad k \ge m+E,$$

и вероятности её полного простоя

$$p_0 = \left\{ e_{m-1}(\rho) + \frac{\rho^m}{(m-1)!(m-\rho)} \left[1 - \left(\frac{\rho}{m} \right)^E \right] + \right.$$

$$\left. + \frac{\rho^{m+E-1}}{(m-1)!m^E} \left[\Gamma\left(m/\beta \right) E_1\left(\alpha; m/\beta \right) - 1 \right] \right\}^{-1}.$$

где $(a)_i$ - символ Л. Похгаммера, Γ – гамма-функция,

$$E_1(z;\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\xi+k)}$$

– функция Г. Миттаг–Леффлера первого порядка. В этих выражениях ρ - приведённая интенсивность потока заявок (требований), поступающих в систему, которая показывает, сколько требований в среднем поступило в систему массового обслуживания за среднее время обслуживания системой одной заявки, m - число обслуживающих каналов в многоканальном устройстве. Параметр β при этом представляет собой приведённую интенсивность ухода «нетерпеливых» заявок из очереди, то есть показывает, сколько в среднем заявок покидает очередь необслуженными за среднее время обслуживания системой одной заявки. Величина $\alpha=\rho/\beta$, очевидно, показывает, какое среднее число заявок поступает в систему за среднее время пребывания в очереди одной «нетерпеливой» заявки. Показано, что в предельном случае, когда число каналов в обслуживающем многоканальном устройстве равно единице, эти выражения сводятся к полученным выше в параграфе 1.

В параграфе 1.3 получено аналитическое выражение для важнейшей вероятностной характеристики системы с ожиданием – вероятности ожидания начала обслуживания поступившей в систему заявкой, то есть вероятность, того, что потупившее в систему требование найдёт все каналы обслуживания занятыми:

$$p_{ожид}(\beta)=p_{ожид}(0)\left\{1-\left(\frac{\rho}{m}\right)^{E-1}+\left(\frac{\rho}{m}\right)^{E}\frac{m-\rho}{\rho}\Gamma\left(m/\beta\right)E_1\left(\alpha;m/\beta\right)\right\}$$

где $p_{ожид}(0)=\dfrac{\rho^m p_0}{(m-1)!(m-\rho)}$ - известная вероятность ожидания обслуживания заявкой классической модели M/M/m. Показано, что при малых значениях параметра β, то есть когда число «нетерпеливых» заявок мало, вероятность ожидания ведёт себя как

$$p_{ожид}(\beta)\approx p_{ожид}(0)\left\{1-\left(\frac{\rho}{m}\right)^{E}\left[\frac{\rho}{(m-\rho)^2}\beta-\frac{\rho\,(m+2\rho)}{(m-\rho)^4}\beta^2\right]\right\},$$

Здесь же изучено поведение этой величины в некоторых других предельных случаях, необходимых для дальнейших расчётов.

Вторая глава посвящена изучению основных числовых характеристик дискретных величин, характеризующих процессы, протекающие в системах массового обслуживания.

В параграфе 2.1 получены общие выражения для среднего значения (математического ожидания) числа занятых каналов

$$\overline{m}=\rho-(m-\rho)\left[p_{ожид}(0)-p_{ожид}\right],$$

соответственно для коэффициента загрузки системы массового обслуживания. В этом же параграфе получены аналитические выражения, описывающие второй момент (дисперсию) числа занятых каналов в системе данного типа:

$$\sigma_m^2 = \rho - \rho\, p_{ожид} - \left(m - \overline{m}\right)\left(\rho - \overline{m}\right).$$

В параграфе 2.2 вычислено среднего числа требований, одновременно находящихся в очереди в ожидании начала обслуживания (средняя длина очереди),

$$\bar{l} = \frac{\rho\, p_{ожид}(0)}{m - \rho}\left[1 - \left(\frac{\rho}{m}\right)^E\right] + \left(\frac{m - \rho}{\beta} - E\right)\left[p_{ожид}(0) - p_{ожид}\right]$$

которая является одной из важнейших характеристик систем массового обслуживания с ожиданием. Также в этом параграфе содержится подобный вывод формул соответствующего второго момента числа требований, находящихся в очереди в ожидании начала обслуживания, общее выражение которого имеет вид

$$\sigma_l^2 = \frac{\rho\, p_{ожид}(0)}{(m - \rho)^2}\left\{m + \rho - \left(\frac{\rho}{m}\right)^E \left[m + \rho + E(m - \rho)\right]\right\} +$$

$$+ \frac{\rho\, p_{ожид} - (m - \rho)\bar{l}}{\beta}\left(1 - \frac{E}{m - \rho}\beta\right) - \bar{l}^2.$$

В параграфе 2.3 получены статистические характеристики для общего числа требований, одновременно находящихся в системе массового обслуживания данного типа. То есть найдено, во-первых, среднее число требований, одновременно находящихся в системе в целом

$$\bar{k} = \rho + \frac{\rho\, p_{ожид}(0)}{m - \rho}\left[1 - \left(\frac{\rho}{m}\right)^E\right] +$$

$$+ \left[\frac{1 - \beta}{\beta}(m - \rho) - E\right]\left[p_{ожид}(0) - p_{ожид}\right],$$

и во-вторых, дисперсия общего числа заявок, находящихся в рассматриваемой СМО

$$\sigma_k^2 = \rho - \rho\, p_{ожид} + \left(m - \overline{m}\right)\left(2\bar{l} - \rho + \overline{m}\right) +$$

$$+ \frac{\rho\, p_{ожид}(0)}{(m - \rho)^2}\left\{m + \rho - \left(\frac{\rho}{m}\right)^E \left[m + \rho + E(m - \rho)\right]\right\} +$$

$$+\frac{\rho\, p_{ожид}-(m-\rho)\bar{l}}{\beta}\left(1-\frac{E}{m-\rho}\beta\right)-\bar{l}^{2}.$$

В этом параграфе вычислено также значение ковариации $K_{ml}=m\bar{l}-\overline{m}\,\bar{l}=$ $=(m-\overline{m}\,)\bar{l}$ (момента связи) числа требований, находящихся в очереди и под обслуживанием.

Третья глава посвящена изучению основных числовых характеристик непрерывных величин, характеризующих процессы, протекающие в системах данного типа.

В параграфе 3.1 найдено точное аналитическое выражение для функции распределения времени ожидания обслуживания одной заявкой

$$F_{ожид}(t)=1-\frac{1}{q}\sum_{k=m}^{m+E-1} p_k\, e^{-m\mu t}\, e_{k-m}(m\mu t)-$$

$$-\frac{1}{q}\sum_{k=m+E}^{\infty} p_k\, e^{-[m\mu+(k-m-E+1)\nu]t}\, e_{k-m}\{[m\mu+(k-m-E+1)\nu]t\}.$$

На следующем этапе решения задачи здесь же получено выражение для соответствующей плотности функции распределения времени ожидания заявкой очереди на обслуживание

$$f_{ожид}(t)=\frac{1}{q}\sum_{k=m}^{m+E-1} p_k\,\frac{(m\mu)^{k-m+1}}{(k-m)!}\,t^{k-m}\,e^{-m\mu t}+$$

$$+\frac{1}{q}\sum_{k=m+E}^{\infty} p_k\,\frac{[m\mu+(k-m-E+1)\nu]^{k-m+1}}{(k-m)!}\,t^{k-m}\,e^{-[m\mu+(k-m-E+1)\nu]t}$$

В этих выражениях q - относительная пропускная способность СМО, то есть доля обслуженных заявок среди всех поступивших в систему, μ - интенсивность потока обслуженных заявок (интенсивность обслуживания), ν - интенсивность потока «нетерпеливых» заявок, которые покидают систему, не дождавшись начала обслуживания,

$$e_m(\rho)=1+\frac{\rho}{1!}+\frac{\rho^2}{2!}+\ldots+\frac{\rho^m}{m!}$$

– неполная экспоненциальная функция (неполная экспонента).

В параграфе 3.2 подробно изучены две другие важнейшие величины, характеризующие системы массового обслуживания с ожиданием – средняя длина (математическое ожидание) времени, которое одно требование проводит в очереди в ожидании начала обслуживания

$$\bar{t}_{ожид}=\frac{\bar{l}}{A}=$$

$$=\frac{1}{A}\left\{\frac{\rho\, p_{ожид}(0)}{m-\rho}\left[1-\left(\frac{\rho}{m}\right)^{E}\right]+\left(\frac{m-\rho}{\beta}-E\right)\left[p_{ожид}(0)-p_{ожид}\right]\right\}$$

и соответствующая дисперсия (среднеквадратическое отклонение)

$$\sigma^2_{ожид}=\frac{1}{\mu A}\left[\frac{1}{m}\sum_{k=m}^{m+E}(k-m+1)(k-m)p_k+\right.$$

$$\left.+\sum_{k=m+E+1}^{\infty}\frac{(k-m+1)(k-m)}{m+(k-m)\beta}p_k\right]-\bar{t}^2_{ожид}$$

этой непрерывной величины. Заметим, что это выражение не удалось представить в более компактном виде через функция Г. Миттаг–Леффлера $E_1\left(\alpha;{}^{m}\!/_{\beta}\right)$ из-за наличия индекса k в обоих сомножителях знаменателя исходной формулы. В этих формулах величина A - абсолютная пропускная способность системы, то есть среднее число заявок, обслуженных в единицу времени, в соответствии с соотношениями Дж. Литтла..

В параграфе 3.3 получено аналитическое выражение для средней величины и дисперсии общего времени, в течение которого поступившее требование пребывает в системе, как в очереди, так и под обслуживанием

$$\bar{t}_{сист}=\frac{1}{A}\left\{\rho+\frac{\rho\, p_{ожид}(0)}{m-\rho}\left[1-\left(\frac{\rho}{m}\right)^{E}\right]+\right.$$

$$\left.+\left[\frac{(m-\rho)(1-\beta)}{\beta}-E\right]\left[p_{ожид}(0)-p_{ожид}\right]\right\};$$

$$\sigma^2_{сист}=\sigma^2_{обсл}+\sigma^2_{ожид}=\frac{1}{\mu A}\left[\frac{1}{m}\sum_{k=m}^{m+E}(k-m+1)(k-m)p_k+\right.$$

$$+\sum_{k=m+E+1}^{\infty}\frac{(k-m+1)(k-m)}{m+(k-m)\beta}p_k\Bigg]-\bar{t}^{\,2}_{ожид}+\frac{1}{\mu^2}.$$

Показано, что в отличие от тех числовых характеристик массового обслуживания, которые описывают поведение дискретных величин (к этим характеристикам относятся число заявок, находящихся под обслуживанием и в очереди в ожидании начала обслуживания), характеристики системы, которые отвечают непрерывным величинам, не являются статистически зависимыми величинами, следовательно, не коррелируют друг с другом.

Четвёртая, заключительная глава диссертационной работы посвящена изучению нестационарных режимов функционирования систем массового обслуживания с ограниченным средним временем пребывания заявки в очереди на обслуживание. Показано, что наиболее приемлемым вариантом решения задачи в данном случае является прямое численное (имитационное) моделирование соответствующих процессов, протекающих в СМО такого типа. При этом в качестве инструментального средства имитационного моделирования используется система имитационного моделирования общего назначения GPSS World, основанная на методе Монте-Карло (методе случайных испытаний).

В параграфе 4.1. разработана в системе моделирования GPSS World имитационная модель открытой многоканальной системы массового обслуживания, в которой поступающее в систему требование получает отказ, то есть покидает систему без обслуживания, в том случае, если в момент поступления транзакта в систему выполняются два условия: количество занятых мест в очереди превышает заданное количество E и среднее время ожидания в очереди превышает заданное значение T. Представлены структурная модель СМО данного типа и соответствующий этой структурной модели листинг программы имитационного моделирования.

В параграфе 4.2 приведём образец стандартного отчёта системы имитационного моделирования GPSS World, полученного при моделировании одного из вариантов программы. По результатам имитационного моделирования при помощи инструментального средства Curve Expert были получены зависимости дискретных и непрерывных числовых характеристик СМО данного типа от времени моделирования. Выяснено, что полученные при этом функции от времени для всех характеристик модели можно адекватно описывать достаточно универсальной формулой

$$f(t)=e^{a+\frac{b}{t}+c\ln(t)},$$

с различными значениями числовых коэффициентов a, b, c в каждом конкретном случае. Выяснено, что квазистационарный режим функционирования в системах массового обслуживаемого рассматриваемого типа устанавливается приблизительно за 300-500 единиц модельного времени, равных среднему времени обслуживания заявки одним обслуживающим устройством. Показано, что полученные значения длин начальных участков траекторий основных числовых характеристик рассматриваемых СМО являются ключевыми данными, необходимыми для разработки и решения многочисленных прикладных задач, имеющих отношение к системам массового обслуживания с ограниченным средним временем пребывания заявки в очереди на обслуживание.

Заключение

Итогами данного диссертационного исследования являются следующие основные результаты, полученные в настоящей работе.

1. Предложена новая математическая модель открытой многоканальной системы массового обслуживания с ограниченным средним временем пребывания заявки в очереди на обслуживание. Основным отличием от изученных ранее моделей систем такого рода является впервые введённое допущение, заключающееся в том, что так называемые «нетерпеливые» заявки могут покидать очередь лишь тогда, когда число заявок в очереди превышает некоторое наперёд заданное фиксированное значение E .
2. Вычислены основные вероятностные характеристики рассматриваемой СМО, в том числе вероятности стационарных состояний системы, вероятность её полного простоя и вероятность ожидания заявкой начала обслуживания.
3. Получены аналитические выражения для первых и вторых моментов основных дискретных и непрерывных величин, характеризующих системы с очередями. К таким величинам относятся количество занятых каналов обслуживания в обслуживающем многоканальном устройстве, количество заявок, находящихся в очереди в ожидании начала обслуживания, время нахождения одного требования в очереди, а также полное число заявок в системе и полное время пребывания требований в системе в целом (как в очереди, так и под обслуживанием).
4. Построена имитационная структурная модель открытой многоканальной системы массового обслуживания с ограниченным средним временем ожидания заявки в очереди на обслуживание в том случае, если число заявок в очереди превышает некоторое заданное значение E , для исследования поведении систем такого рода на нестационарных участках траекторий их основных числовых характеристик.
5. Разработан комплекс программ в инструментальной среде имитационного моделирования GPSS World и проведён цикл численных эксперимен-

тов, направленных на изучение нестационарных режимов функционирования рассматриваемых систем массового обслуживания и поведения их основных характеристик во времени.

Для расчёта производительности систем массового обслуживания, содержащих как «терпеливые», так и «нетерпеливые заявки», **рекомендуется** использовать впервые предложенную и изученную в настоящей работе замкнутую систему формул, основной особенностью которой является применение для суммирования бесконечных рядов, не сводящихся к геометрическим прогрессиям, нового математического аппарата, основанного на использовании функции Г. Миттваг-Леффлера первого порядка.

Полученные в данной работе результаты являются **перспективными** с точки зрения возможных приложений и могут быть использованы для разработки и решения многочисленных прикладных задач в различных предметных областях, имеющих отношение к оптимальному управлению системами массового обслуживания с ограниченным средним временем пребывания заявки в очереди на обслуживание. Подобные математические модели позволяют по известным значениям интенсивности входного потока заявок рассчитать различные параметры, характеризующие производительность системы, а также в каждом конкретном случае исследовать их поведение при изменении нагрузки на систему со стороны входного потока.

Список работ, опубликованных автором по теме диссертации

Статьи в ведущих научных рецензируемых изданиях, рекомендованных ВАК Министерства науки и высшего образования Российской Федерации:

1. Кирпичников, А.П. Вероятностные характеристики открытой многоканальной системы массового обслуживания с ограниченным средним временем пребывание в очереди / А.П. Кирпичников, Нгуен Тхань Банг, Чан Куанг Куи // Вестник технологического университета. - 2016. - Т. 19. - № 8. - С. 123-126.

2. Кирпичников, А.П. Вероятность ожидания начала обслуживания в системе массового обслуживания с ограниченным средним временем пребывание заявки в очереди / А.П. Кирпичников, Нгуен Тхань Банг, Чан Куанг Куи // Вестник технологического университета. - 2016. - Т. 19. - № 21. - С. 143-147.

3. Кирпичников, А.П. Расчёт коэффициента загрузки системы массового обслуживания с ограниченным средним временем пребывание заявки в очереди / А.П. Кирпичников, Нгуен Тхань Банг, Чан Куанг Куи // Вестник технологического университета. - 2017. - Т. 20. - № 2. - С. 88-92.

4. Кирпичников, А.П. Среднее число заявок в очереди на обслуживание в системе массового обслуживания с ограниченным средним временем

пребывание заявки в очереди / А.П. Кирпичников, Нгуен Тхань Банг, Чан Куанг Куи // Вестник технологического университета. - 2017. - Т. 20. - № 6. - С. 87-92.

5. Кирпичников, А.П. Общее число требований, находящихся в системе массового обслуживания с ограниченным средним временем пребывания заявки в очереди / А.П. Кирпичников, Нгуен Тхань Банг, Чан Куанг Куи // Вестник технологического университета. - 2017. - Т. 20. - № 9. - С. 93-96.

Прочие публикации по теме научного исследования:

1. Кирпичников, А.П. Расчёт вероятностных характеристик открытых многоканальных СМО с ограниченным средним временем пребывание в очереди / А.П. Кирпичников, Куи Куанг Чан, Банг Тхань Нгуен // XXIX Международная научная конференция «Математические методы в технике и технологиях ММТТ-29», Саратов, 2016. - С. 147-150.

2. Кирпичников, А.П. Расчёт вероятностных характеристик открытых многоканальных систем массового обслуживания с «нетерпеливыми» заявками / А.П. Кирпичников, Чан Куанг Куи, Нгуен Тхань Банг // I Международная научно-практическая конференция «Проблемы развития современной науки», Пермь: ИП Сагитов Т.М., 2016. - С. 13-17.

3. Кирпичников, А.П. Вероятностные характеристики открытых многоканальных систем массового обслуживания с «нетерпеливыми» заявками / А.П. Кирпичников, Чан Куанг Куи, Нгуен Тхань Банг // IX Международная научно-практическая конференция «Современное состояние и перспективы инновационного развития нефтехимии», Нижнекамск: Нижнекамскнефтехим, 2016. - С. 152-154.

4. Кирпичников, А.П. Коэффициент загрузки системы массового обслуживания с ограниченным средним временем пребывание заявки в очереди / А.П. Кирпичников, Банг Нгуен Тхань, Куи Чан Куанг // XXX Международная научная конференция «Математические методы в технике и технологиях ММТТ-30», Санкт-Петербург, 2017. - С. 44-46.

5. Чан Куанг Куи. Среднее число занятых каналов системы массового обслуживания с ограниченным средним временем пребывание заявки в очереди / Чан Куанг Куи, А.П. Кирпичников // Международная научно-практическая конференция «Тенденции развития логистики и управления цепями поставок», Казань, 2017. - С. 368-373.

6. Кирпичников, А.П. Средняя длина очереди в системе массового обслуживания с ограничениями / А.П. Кирпичников, Куи Чан Куанг, Банг Нгуен Тхань // XXX Международная научная конференция «Математические методы в технике и технологиях ММТТ-30», Санкт-Петербург, 2017. - С. 41-44.

7. Чан Куанг Куи. Суммарное количество заявок в системе массового обслуживания с ограниченным средним временем пребывания заявки в очереди / Чан Куанг Куи, Нгуен Тхань Банг, А.П. Кирпичников // Международ-

ная научно-практическая конференция «Новая наука: история становления, современное состояние, перспективы развития», Стерлитамак, 2018. – С. 14-17.

Литература, цитированная в тексте автореферата

1. Кирпичников, А.П. Прикладная теория массового обслуживания / А.П. Кирпичников. - Казань: Изд-во Казан. гос. ун-та, 2008. - 112 с.;

2. Кирпичников, А.П. Методы прикладной теория массового обслуживания / А.П. Кирпичников. - 1-е изд. - Казань: Изд-во Казан. Ун-та, 2011. - 200 с.; 2-е изд., доп. – М.: ЛЕНАНД, 2018 – 224 с.)