МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМ, ОБЛАДАЮЩИХ ПОВЕДЕНИЕМ

Ю.И. Бродский (Москва)

Введение

В настоящее время основным инструментом построения математических моделей являются дифференциальные уравнения. Продолжением достоинств дифференциальных уравнений как инструмента моделирования являются их недостатки, главный из которых – дифференциальные уравнения не слишком хороши для описания поведения. Если задача корректна – ее траектория единственна, непрерывно зависит от начальных условий и устойчива – это не оставляет никаких поведенческих альтернатив.

Для моделирования систем, обладающих поведением, т.е. способных стандартным образом отвечать на стандартные запросы среды, предлагается отличная от дифференциальных уравнений структура. Выделен класс систем, для которых возможно построение модели – некий аналог теорем существования решения для дифференциальных уравнений. Это класс замкнутых в каждой временной точке моделей, с кусочно-непрерывной и непрерывной слева траекторией. Замкнутость модели в точке означает возможность по значениям ее внутренних и внешних переменных в этой точке детерминировано вычислить, есть ли в ней разрыв траектории первого рода, если есть – вычислить его величину, далее определить некоторый положительный временной интервал прогноза и вычислить непрерывную эволюцию траектории системы на нем. Остальные компоненты традиционной корректности постановки задачи: единственность, непрерывная зависимость от начальных условий и устойчивость, – предлагается выяснять на построенной модели опытно, с помощью имитационных экспериментов.

Структуры

В основе метода структурализма лежит выявление структуры как совокупности отношений на базисных множествах, которая сохраняется при некоторых преобразованиях этих множеств [8]. Поэтому внимание исследователя переносится с объектов базисных множеств и их свойств на отношения между этими объектами и определяемые ими общесистемные свойства.

Характеристики атрибутов изучаемого явления изменяются со временем, однако в этих изменениях заключается нечто постоянное – закономерность их связи между собой, которая и является предметом выявления и изучения путем математического моделирования. Аналогия задает некоторое отображение атрибутов предмета моделирования во множество характеристик будущей математической модели.

Построить модель – значит задать связи между ее характеристиками так, чтобы они сохраняли закономерность связей атрибутов объекта моделирования. Лучшее, что можно сделать – это придумать такие соотношения между характеристиками модели, которые бы в максимальной степени уподобляли бы их изменения изменениям их прообразов – атрибутов моделируемого объекта.

Особое место среди математических структур занимают дифференциальные уравнения. Если такое уравнение содержит производную по времени – этим сразу преодолевается статичность структур.

Еще одним примером динамических структур (на наш взгляд очень перспективных, но пока недооцененных в моделировании) являются компьютерные программы, а точнее, операционные системы, чье назначение – реализация поведения, т.е. способность установленным образом отвечать на стандартные запросы среды.

Могут быть возражения – операционная система слишком сложна (миллионы операторов исходного текста, регулярные «заплатки» на протяжении десятилетий и т.д.), для того чтобы стать инструментом моделирования. На самом деле, в работах [1, 2] для достаточно широкого класса объектов, обладающих поведением, строятся реализующие их поведение функциональные аналоги операционных систем, на основе семейства родов структур в смысле Н. Бурбаки и не слишком сложной универсальной компьютерной программы, обеспечивающей динамику поведения любому представителю упомянутого семейства родов структур.

Дифференциальные уравнения

В настоящее время дифференциальные уравнения являются основным инструментом построения математических моделей. Достоинства этого инструмента очевидны: во-первых, если в системе присутствует производная по времени, это сразу дает динамику и прогноз; во-вторых, к модели можно применить готовый аппарат, связанный с понятием корректности решения, что немаловажно. Действительно, если чего-то нет из решения, его единственности, непрерывной зависимости от начальных условий, устойчивости в каком-либо смысле, как можно будет доверять такой модели?

Как придумать модель на основе дифференциальных уравнений? Вообще говоря, это искусство, а не наука. Имеются лишь рекомендации, как добиться выполнения моделью некоторых необходимых условий адекватности для самых простых случаев. Например, можно ограничиться линейным случаем, «подогнать» оператор модели под имеющиеся наблюдения, решив обратную задачу (которую, возможно, придется регуляризировать [14]). При этом решение обратной задачи – это выполнение необходимого условия адекватности модели, достаточное неизвестно.

Тем не менее существует (например, в физике) множество успешных математических моделей, основанных на дифференциальных уравнениях. Самая известная из них, и дольше всего волновавшая человечество – модель движения планет вокруг Солнца. Всего лишь около 200 лет назад П.С. Лаплас издал книгу [11], само название которой «Изложение системы мира» говорило о том, что собственно наука уже закончена, остались только частные технические задачи – получить начальные данные для дифференциальных уравнений и запастись достаточно мощным вычислителем, и тогда и будущее, равно как и прошлое, могут быть определены.

Продолжением достоинств дифференциальных уравнений как инструмента моделирования являются их недостатки, главный из которых – дифференциальные уравнения не слишком хорошо подходят для описания поведения. Если мы имеем корректную задачу – наша траектория единственна, непрерывно зависит от начальных условий и устойчива – и это не оставляет ей никаких поведенческих альтернатив. Солнце всходит и заходит каждый день в известное время, оно не может уйти в отпуск или заболеть, или на некоторое время уехать в гости, или просто присесть отдохнуть.

Известны попытки преодолеть указанный недостаток. Например, замечательный профессор Физтеха Г.В. Коренев (1902 – 1980), которого можно назвать Циолковским робототехники, для описания целенаправленных действий предлагал [9] в правые части дифференциальных уравнений вводить целевые функции. Нечто подобное предлагается и в позиционных дифференциальных играх [10]. Однако дифференциальные игры – весьма сложный математический объект. До конца удается проанализировать лишь самые простейшие случаи (например, [3]). Но даже в этих простейших случаях может оказаться, что состояния равновесия игры очень сильно отличается от состояний равновесия системы ее дифференциальных ограничений с фиксированными управлениями. Практика постоянно сталкивает с системами, где сотни и тысячи агентов действуют целенаправленно.

Моделирование поведения

С поведением сложных систем и их компонент автору пришлось столкнуться, моделируя сложные организационно-технические системы [6]. Особенность таких систем – они не являются кантовской «вещью в себе», которую предстоит познать с помощью модели – они или созданы людьми, или могут быть созданы, поэтому поведение моделей их компонент не нужно придумывать – оно определяется или проектными, или нормативными документами, или разведданными – и остается лишь его воспроизвести. Сложность здесь в том, что обычно досконально известно поведение отдельных агентов и существующие связи между ними, а воспроизвести хочется поведение всей сложной системы в целом, со всеми ее системными эффектами.

В работе [2] выделен класс систем, для которых возможно построение модели – некий аналог теорем существования решения для дифференциальных уравнений. Это класс замкнутых в каждой временной точке моделей, с кусочно-непрерывной и непрерывной слева траекторией. Непрерывность слева оговаривается для того, чтобы избежать ситуаций, подобных «мухе фон Неймана» [4] или «лампе Томпсона» [15], когда нарушается обусловленность некоторых состояний системы их предысторией. Замкнутость модели в точке означает способность по значениям ее внутренних и внешних переменных в этой точке детерминировано вычислить, есть ли в ней разрыв траектории первого рода, если есть – вычислить скачок. Далее определить некоторый положительный интервал прогноза и вычислить непрерывную эволюцию траектории модели на нем.

Остальные компоненты традиционной корректности постановки задачи: единственность, непрерывная зависимость от начальных условий и устойчивость, – предлагается выяснять на построенной модели опытно, с помощью имитационных экспериментов.

Далее, в работах [1, 2] предложена сквозная технология описания, синтеза и программной реализации моделей сложных многокомпонентных систем. Основное понятие этой технологии – модель-компонента – представитель однопараметрического семейства родов структур в смысле Н. Бурбаки. В базисные множества моделей-компонент помимо характеристик модели входят также ее методы, вычисляющие скачки, непрерывную эволюцию траектории, а также события, связанные с окончанием интервалов прогноза. Динамику этим структурам обеспечивает универсальная программа выполнения моделей-компонент, способная организовать вычислительный процесс для любого представителя семейства и при этом ориентированная на параллельные и распределенные вычисления. Функционально модель-компонента аналогична операционной системе: она способна давать стандартные ответы на стандартные запросы внутренней и внешней среды.

Семейство моделей-компонент оказывается замкнутым относительно объединения конечного числа компонент в комплекс. Модель-комплекс также является представителем семейства моделей-компонент. Этот факт позволяет строить из моделей-компонент весьма сложные фрактальные конструкции, не опасаясь при этом вычислительной сложности таких конструкций – организация вычислений при этом не меняется. Более того, чем сложнее модель, тем больше вычислений может осуществляться параллельно.

Таким образом, для описания широкого класса систем, обладающих поведением, вместо традиционных дифференциальных уравнений предлагается новая структура, представляющая собой сочетание статичной бурбаковской структуры с придающей ей динамику несложной компьютерной программой, ориентированной на параллельность вычислений. Следует отметить, что частным случаем такой структуры может быть и любая система дифференциальных уравнений (реализованная как метод базисного множества), что сохраняет преемственность с прежними методами моделирования.

Выводы

Гипотеза, лежащая в основе моделирования, утверждает, что атрибуты изучаемых явлений объединены неким постоянным (на интересующем нас отрезке времени) законом, составляющим сущность изучаемого объекта и позволяющим объединить различные наблюдаемые явления в единый объект моделирования.

С помощью аналогий мы отображаем множество атрибутов объекта моделирования в множество характеристик модели. Вообще говоря, такое отображение не формализуемо, субъективно и легко может быть оспорено с формальных позиций, за исключением простейших случаев, когда характеристики очевидны и допускают непосредственное измерение.

На множестве характеристик модели, как на базисном множестве, мы строим модель, как математическую структуру. Это построение структуры не формализуемо за исключением простейших случаев. Построенная структура-модель отражает и представляет для нас сущность объекта моделирования. Вообще говоря, мы не можем гарантировать, что модель верно отражает сущность объекта моделирования, даже если она дает правильный прогноз в миллионах экспериментов на протяжении тысячелетий эксплуатации – совпадение прогноза с экспериментом есть лишь необходимое условие адекватности модели. Достаточных условий мы не знаем.

Модель строится исходя из имеющегося запаса математических структур.

На протяжении последних 300 лет самой популярной и удачной структурой для построения моделей были дифференциальные уравнения. В связи с этим достаточно распространено мнение, что современное математическое моделирование – это решение на суперкомпьютере систем сложных дифференциальных уравнений в частных производных.

Дифференциальные уравнения с корректно поставленной задачей плохо подходят для моделирования систем с поведением, они слишком детерминированы, устойчивы и поэтому не дают поведенческих альтернатив.

В работах [1, 2] предложена универсальная структура и обоснована ее применимость для моделирования широкого класса объектов, обладающих поведением, и названная там моделью-компонентой. Ее статическая часть представлена семейством родов структур в смысле Н. Бурбаки [7, 12]. Необходимую динамику структуре придает объект информатики – относительно простая универсальная программа, организующая выполнение любого представителя упомянутого выше семейства. Частным случаем модели-компоненты может быть в том числе и любая система дифференциальных уравнений.

Функционально модель-компонента аналогична важному объекту информатики – операционной системе. Ее задача – давать стандартные ответы на стандартные запросы среды. Предлагаемая в [1, 2] технология модельного синтеза и модельно-ориентированного программирования позволяет декомпозировать большие программные комплексы и реализовывать их, избегая императивного программирования, при этом получая код высокой степени параллельности.

В сложных системах всегда была важна составляющая, обеспечивающая их поведение. Но по-настоящему замечать этот факт мы стали сравнительно недавно, и только с развитием информатики появился формальный объект, которому аналогичны такие составляющие – операционная система.

Можно ожидать, что чем сложнее система, тем сложнее структура, обеспечивающая ее поведение, и тем важнее для ее понимания анализ с позиций информатики.

Литература

1. **Бродский Ю.И.** Роды структур Н. Бурбаки в задаче синтеза имитационных моделей сложных систем и модельно-ориентированное программирование. // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2015. Т.55. №1. С. 153–164.
2. **Бродский Ю.И**. Модельный синтез и модельно-ориентированное программирование. Москва: ВЦ РАН, 2013. 142 с.
3. **Бродский Ю.И.** Межкультурное взаимодействие как позиционная дифференциальная игра // Моделирование, декомпозиция и оптимизация сложных динамических процессов, 2013. Т. 28. №1(28). С. 124–141.
4. **Бродский Ю.И.** Распределенное имитационное моделирование сложных систем. Москва: ВЦ РАН, 2010. 156 с.
5. **Бродский Ю.И., Лебедев В.Ю.** Инструментальная система имитации MISS. Москва: ВЦ АН СССР, 1991. 180 с.
6. **Бродский Ю.И., Лебедев В.Ю., Огарышев В.Ф., Павловский Ю.Н., Савин Г.И.** Общие проблемы моделирования сложных организационно-технических комплексов // Вопросы кибернетики. 1990. №126. С. 42–48.
7. **Бурбаки Н.** Теория множеств. – Москва: Мир, 1965. 456 с.
8. **Грецкий М.Н.** Структурализм (философ.). // Статья в Большой Советской Энциклопедии, 3-е изд. – Москва: Советская энциклопедия, 1969-1978.
9. **Коренев Г.В.** Очерки механики целенаправленного движения. Москва: Наука, 1980. 192 с.
10. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Позиционные дифференциальные игры. – Москва: Наука, 1974. 458 с.
11. **Лаплас П.С.** Изложение системы мира. Москва: Наука, 1982. 676 с.
12. **Павловский Ю.Н.** Формальная математика Н. Бурбаки и роды структур. – Москва: ВЦ РАН, 2012. 110 с.
13. **Павловский Ю.Н.** Геометрическая теория декомпозиции и некоторые ее приложения. – Москва: ВЦ РАН, 2011. 93 с.
14. **Тихонов А.Н.** О некорректных задачах линейной алгебры и устойчивом методе их решения. // ДАН СССР. 1965. Т. 163. № 3. С. 591–594.
15. **Thomson J.F.** Tasks and Super-Tasks // Analysis. 1954. Vol. 15 (1): 1–13.