ОСОБЕННОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ ГИПЕРДЕЛЬТНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПРИ ИМИТАЦИОННОМ МОДЕЛИРОВАНИИ

В.Г. Соловьева, С.А. Сергеев, В.П. Бубнов (Санкт-Петербург)

Для разработки, обоснования архитектуры и тестирования различных систем наряду со стендовыми испытаниями широко применяется имитационное моделирование. Предположение о простейших законах распределения моделируемых случайных величин далеко от истинны и обосновывается лишь простотой применяемых математических моделей. Для устранения данного недостатка на практике используются аппроксимации фазовыми распределениями: неоднородно-эрланговское, гиперэкспоненциальное и распределение Кокса [1]. Однако при коэффициентах вариации аппроксимируемых распределений, где коэффициент вариации такой, что

$$V< 1/\sqrt{n}, \quad (1)$$

где – число фаз, – коэффициент вариации, параметры аппроксимирующего распределения становятся комплексно-сопряжёнными, что делает невозможным их использование в имитационном моделировании. Увеличение числа этапов в эрланговском распределении приводит к значительным затратам времени. Поэтому в качестве аппроксимирующего распределения предлагается использовать гипердельтное. Рассмотрим способ представления распределений, который называется гипердельтным распределением с использованием аппроксимаций по методу моментов [2]. Плотность гипердельтного распределения

$$f_a(t)= \sum{}^{n}_{(i=1)} C_i\, \delta(t\text{-}T\_i\,), \quad (2)$$

где C_i – вероятности, удовлетворяющие условию, $\sum{}^{n}_{(i=1)} C_i = 1$ а δ – дельта-функция Дирака. Очевидным является тот факт, что чем больше величина n, тем выше точность аппроксимирующего распределения.

Для автоматизации процесса расчёта параметров аппроксимирующего распределения необходимо найти общее уравнение для вычисления его i-го начального момента. Для нахождения i-го начального момента найдём i-ю производную преобразования Лапласа в точке $s = 0$.

Преобразование Лапласа для плотности гипердельтного распределения выглядит следующим образом:

$$F(s) = L\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt = \int_0^\infty e^{-st} * \sum_{i=1}^{n}(c_i * \delta(t-T_i))\, dt,$$

где – плотность гипердельтного распределения, – число этапов гипердельтного распределения.

$$\int_0^\infty e^{-st} * \sum_{i=1}^{n}(c_i \delta(t-T_i))dt = \sum_{i=1}^{n}(c_i e^{-t_i s}).$$

Таким образом, начальный момент равен

$$v_k = \frac{\sum_{i=1}^{n}((-t_i)^k * c_i)}{(-1)^k} = \sum_{i=1}^{n}(t_i{}^k * c_i). \quad (3)$$

Для нахождения параметров распределения необходимо решить следующую систему нелинейных уравнений, полученную из (3):

$$C_1\, T_1{}^l + C_2\, T_2{}^l + \ldots + C_k\, T_k{}^l + \ldots + C_n\, T_n{}^l = V_i \quad (4)$$

где V_k – начальный момент исходного распределения, а i и n такие, что $i=2n-1$. Аналитическое решение данной системы уравнений при $n>2$ вызывает значительные трудности, поэтому было принято решение разработать численный алгоритм решения данной системы на основании метода Ньютона для решения систем нелинейных уравнений [3]. Для вычисления элемента матрицы Якоби системы (4) предлагается следующая формула:

$$W_{ij} = \begin{cases} 1, i = 1, j \le j_{max}/2 \\ 0, i = 1, j > j_{max}/2 \\ T_j^{i-1}, i > 1, j \le \dfrac{j_{max}}{2} \\ T_j^{i-2} * (i-1) * C_j, i > 1, j > j_{max}/2 \end{cases},$$

где – число столбцов матрицы. Для вычисления значений столбца , использовалась следующая формула:

$$F_i = \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} C_j - 1, i = 1 \\ \sum_{j=1}^{n} C_j * T_j^{i-1}, i > 1 \end{cases},$$

где n – число этапов в аппроксимирующем распределении.

Для вычисления решения на каждом шаге в методе Ньютона рекомендуется использовать формулу:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{F}{W}.$$

Для простоты преобразуем ее в слудующую:

$$x_{n+1} = x_n - F(x_n) * W^{-1}(x_n). \tag{5}$$

Данный алгоритм обеспечивает нахождение решения системы нелинейных уравнений только из достаточно близкого начального приближения . Описанный алгоритм позволяет автоматизировать процесс поиска этого приближения. На основании этого алгоритма формула (5) приняла вид:

$$x_{n+1} = x_n - W^{-1}(x_n) * (F(x_n) - a * \left(F(x_0)\right),$$

где

$$a_n = \max\left[0.1 - \frac{1}{2mN\|F(x_0)\|}\left(\frac{1}{\|W^{-1}(x_n)\|^2} + \frac{3}{4}\sum_{i=1}^{i<n}\|W^{-1}(x_i)\|^2\right]\right.,$$

где m – количество уравнений в системе, N такое, что $\sum_{h=1}^{n}\left|\frac{d^2 f_i}{dx_j dx_h}\right| \le N$.

Таким образом, при использовании гипердельтного распределения нет необходимости в генерации случайной величины, подчинённой экспоненциальному закону распределения. При гипердельтном представлении все параметры всегда вещественны. В ходе моделирования достаточно хранить в памяти ЭВМ их заранее вычисленные значения. Кроме того, гипердельтное распределение можно применять для аппроксимации распределений сосредоточенных на (-∞,∞), а также для аппроксимации распределений с разрывами первого рода. Авторами выполнена программная реализация рассматриваемого метода [4].

Выводы

Рекомендуется использовать гипердельтное распределение при построении имитационных моделей нестационарных систем обслуживания для аппроксимирования случайных величин с коэффициентами вариации, близкими к нулю либо расположенными на отрицательной полуоси.

Кроме того, целесообразно использовать данное распределение при построении больших имитационных моделей, выполнение которых занимает много времени, так как реализация случайной величины по гипердельтному закону, в отличие от распределений фазового типа, требует только одного обращения к датчику случайных величин, следовательно, занимает гораздо меньше времени, при этом не теряется точность аппроксимирования, так как предложенный метод расчёта параметров аппроксимирующего гипердельного распределения использует до 13 начальных моментов.

Литература

1. **Бубнов В.П.** Аппроксимационный метод исследования немарковских систем / В.П. Бубнов, С.А. Сергеев // Учебное пособие. СПб, 2014. 37 с.
2. **Смагин В.А.** О моделировании случайных процессов на основе гипердельтного распределения / Смагин В.А., Филимонихин Г.В. // Автоматика и вычислительная техника. 1990. № 5. С. 25–31.
3. **Кульчицкий О.Ю.** О нахождении начального приближения для метода ньютона / Шимелевич Л. И. // Вычисл. матем. и матем. физ. 1974. Т. 14. № 4, С.1016–1018.
4. **Сергеев С.А., Бубнов В.П., Бубнов В.В.** Программа для расчёта параметров аппроксимирующего гипердельтного распределения по методу моментов. Федеральная служба по интеллектуальной собственности, патентам и товарным знакам. Свидетельство о государственной регистрации программы ЭВМ № 201561737. М., 2015.