СОВРЕМЕННАЯ ТЕОРИЯ ДИСКРЕТНОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ НЕПРЕРЫВНЫХ ПРОЦЕССОВ В ЗАДАЧАХ МОДЕЛИРОВАНИЯ

А. В. Алексеев (Санкт-Петербург)

1. Введение. В 2015 году исполняется 100 лет, как E.T. Whittaker сформулировал впервые закономерность [1], что позже вошла в историю науки, как теорема отсчетов Уиттекера-Котельникова-Шеннона (УКШ). До настоящего времени эта закономерность играет большую роль в математике, физике, технике, оптике, других областях.

Дискретизация сигналов и процессов практически любой природы во времени в сочетании с их квантованием по уровню лежит в основе их цифровой обработки. Несоблюдение условий теоремы УКШ является крайне критичным и сопровождается либо неадекватным преобразованием данных с соответствующими погрешностями и ошибками, либо необоснованным введением информационной избыточности с соответствующим завышением требований по составу средств, их качеству и ресурсным затратам.

Оптимизация выбора частоты дискретизации исходных процессов и сигналов позволяет обеспечить компромиссные условия между этими противоречивыми факторами, что и является одной из ключевых задач на пути аналого-цифрового преобразования данных и их последующей обработки. Специфика преобразования и обработки информации, как и особенности преобразовываемых исходных процессов и сигналов, должны непосредственно учитываться при дискретизации. Но именно это и определяет сложность проблемы выбора её параметров.

Поэтому многие годы от первой формулировки условий и требований к выбору значения частоты отсчетов в 1915 г. E.T. Whittaker [1], в 1927 г. W.L. Ferrar [2], в 1928 H. Nyquist [3], в 1929 г. J.M. Whittaker [4], в 1933 Котельниковым В.А. [5], в 1946 D. Gabor и в 1949 К. Шенноном очень многие авторы всесторонне исследовали эту проблему. Делали и продолжают делать попытки обобщения этого базового параметра цифрового преобразования информации – частоты выборки отсчетов, частоты дискретизации процесса.

В последнее время приоритет E.T. Whittaker (математика Эдмунда Уиттекера) в части формулирования теоремы отсчетов [1], датированной 1915 годом, также был подвергнут некоторому сомнению. Утверждают, что интерполяционная формула [1], как её обычно называют, восходит к работе Эмиля Бореля, датированной 1898 годом. Интерполяционная формула была процитирована из работы сына Эдмунда Уиттекера – Джона Макнейтена Уиттекера [4], датированной 1929 годом, в виде теоремы отсчётов Найквиста–Шеннона в 1949 году [3, 6]. Автором редакции был Клод Шеннон.

Но до Шеннона данную закономерность сформулировал в закрытой работе В.А. Котельников еще в 1933 г. [5]. Причем, в форме семи теорем, а в пятой теореме был рассмотрен наиболее общий вариант представления функции, имеющей ненулевую нижнюю частоту. Случай дискретизации сигналов – не по верхней граничной частоте спектра, а по его полосе частот.

В систематизированном виде и хронологическом порядке наиболее значимые, по нашему мнению, ссылки из [1–34] приведены в табл. 1.

Сразу следует отметить, что представить полный ряд авторов в этой области вряд ли возможно, так как за прошедший 100-летний первый период развития теоремы и теории отсчетов этот ряд представляется весьма и весьма обширным. В то время, как в первую очередь, конечно, представляет интерес именно история развития самой теоремы отсчетов. Именно условия выбора частоты дискретизации в обобщенном виде.

Так, сегодня наиболее обстоятельным аналитическим обзором исследований в области теории дискретного представления непрерывных (финитных) сигналов, безусловно, следует считать статью А. Дж. Джерри [22].

Написанная к 30-летию введения Шенноном теоремы отсчетов в теорию связи эта аналитическая статья содержит 248 ссылок на наиболее значимые работы в этой исключительно «популярной» теме. Среди, в первую очередь и исторически, математиков, а также специалистов в области электротехники, связи, и практически всех других направлений информатики, эта представительная работа и сегодня остается наиболее значимой среди обзорных по теореме УКШ.

В предлагаемой статье в контексте аналитического обзора ранее выполненных исследований на основе спектральной интерпретации физических процессов выборки сигналов при их дискретизации, анализа природы формирования сигнальной и информационной избыточности впервые представлено малоизвестное обобщенное выражение теоремы отсчетов для реальных полосовых сигналов с конечной (неидеальной) крутизной наклона спектра вне его рабочей полосы.

Сам термин «дискретизация» происходит от латинского discretio – «различать», «распознавать» и означает: преобразование непрерывной функции в дискретную. Указанное обобщенное условие выбора частоты дискретизации позволяет выбирать граничные и её оптимальное значение для непрерывных реальных полосовых процессов. При этом учитываются параметры описания их спектральной плотности по высокочастотному и низкочастотному срезам, по наклону оги-бающей спектра в основной полосе частот, по значению динамического диапазона, а также по допустимой погрешности их преобразования, по порядку (моде) дискретного преобразования и другим, имеющим важное практическое значение.

Данная статья в последней своей части обобщает результаты начатых с [24] многолетних исследований и посвящена памяти моего первого учителя в науке и непременного соавтора ряда исследований Юлиана Ивановича Шавельского.

2. Теорема отсчетов Уиттекера-Котельникова-Шеннона. В современном варианте оригинальная формулировка теоремы отсчетов УКШ, как правило, представляется следующим образом [22].

<u>Теорема отсчетов УКШ:</u> *Если функция $f(t)$ не содержит частот выше W Гц, то она полностью определяется своими мгновенными значениями в моменты, отстоящие друг от друга на $1/2W$ сек.*

По мнению А. Дж. Джерри, схема доказательства К. Шеннона [5] и метод записи $f(t)$ в форме ряда дискретных отсчетов

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{n}{2W}\right)\frac{\sin\pi(2Wt-n)}{\pi(2Wt-n)} \tag{1}$$

аналогична описанным в работе [4] Дж. М. Уиттекера. По существу К. Шеннон ввел впервые, по мнению Джерри, физический смысл понятий времени и частоты в теорему отсчетов, в которой ряд (1) представляет собой кардинальный ряд Эдмунда Уиттекера [1].

Последовавшие позже многочисленные варианты доказательства ставшей позже широко известной теоремы отсчетов Уиттекера представляют собой небольшие отличия от приведенной формулировки Шеннона. Как правило, они различаются сочетаниями используемых формул Фурье-анализа, контурного интегрирования и матричного исчисления, но ключевое условие выбора интервала квантования сигнала во времени остается, что естественно, неизменным

$$T_Д \le 1/2W \qquad (2)$$

Так как пары преобразования Фурье симметричны, теорема отсчетов справедлива и для функций, финитных во времени, т.е. для функций $f(t)$, преобразования Фурье $F(\omega)$ которых обращаются в нуль при $|t| > T$, имеет место следующее важное условие

$$F(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\frac{n\pi}{T}) \frac{\sin \pi(T\omega - n\pi)}{(T\omega - n\pi)} \qquad (3)$$

и соответственно для частотной области

$$F_Д \ge 2W . \qquad (4)$$

Сразу следует подчеркнуть ту важную особенность, что в зависимостях (1)–(4) предполагалось ограничение полосы частот сигнала только по верхнему (высокочастотному) срезу, а именно равенство нулю нижней частоты среза $F_Н = 0$. И, более того, предусматривалось полное отсутствие в спектре частот сигнала составляющих выше верхней частоты среза сигнала $F_В = W$.

Как будет показано ниже, дальнейшая «интрига» теоремы отсчетов УКШ была связана с необходимостью учета именно этих двух основных факторов при обеспечении управляемого по допустимой погрешности преобразования и соответствующего обобщенного представления условия выбора частоты дискретизации.

Можно отметить широкое внимание исследователей к проблеме малоизбыточного дискретного преобразования информации, обобщенного представления теоремы УКШ. В табл. 1 в структурированном и систематизированном виде представлена схема развития основных подходов в решении проблемы выборки данных и её модельного обоснования, влияния на избыточность данных и путей её минимизации.

При этом автор не мог и не преследовал цель всецело графически представить этот сложный и для науки сравнительно длительный 100-летний этап развития теоремы отсчетов. Тем не менее, нельзя не признать подобную систематизацию весьма полезной для данного направления развития науки, тем более, на юбилейном рубеже.

Далее, опуская вопросы интерпретации аспектов информационной избыточности, спектральной интерпретации процессов дискретизации и ряд других, на основе [24–30] кратко изложим основные положения современной теории дискретного преобразования реальных полосовых непрерывных сигналов и процессов в контексте современных задач моделирования реальных систем.

3. Обобщение теоремы отсчетов УКШ для реальных полосовых сигналов (УКШр). Дискретное представление непрерывного входного сигнала, используемое при решении широкого класса задач передачи и обработки информации, сопровождается возникновением ряда специфических погрешностей, среди которых к числу основных с соответствующим ранжированием могут быть отнесены с учетом [18–22]:

- *интерференционные погрешности* (погрешности наложения спектров, погрешности алайсинга, погрешности мимикрии частот и т.п.), появляющиеся вследствие невыполнения условия о корректном выборе соотношения частоты выборки с параметрами сигнала, а также условия о финитности (непрерывности) спектра сигнала;
- *погрешности усечения*, возникающие при использовании конечного числа отсчетов вместо бесконечного ряда, необходимого для дискретного представления;

• *погрешность округления и амплитудная погрешность (погрешности квантования)*, обусловленная неточностью измерения амплитуды отсчетных значений, конечностью разрядности представления используемых чисел;

• *погрешность дрожания*, вызванная отличием моментов взятия отсчетов от точек отсчета;

• *погрешности недискретного представления сигналов*, обусловленные спецификой и погрешностями последующей обработки сигналов.

Таблица 1

Основные этапы развития теории отсчетов и её приложений

Год, автор	Основной результат исследования	Особенности
1915, E.T. Whittaker [1]	О функциях, которые используются в расширении теории интерполирования	Впервые сформулирована зависимость
1927, W.L. Ferrar [2]	О содержании кардинальной функции интерполяции	Ввел понятие кардинальных функций
1928, H. Nyquist [3]	Некоторые зависимости в телеграфной теории передачи	Введено понятие частоты Найквиста
1928, Хартли Р.В.Л.	Теория информации и её приложения	Прикладные аспекты
1929, J.M. Whittaker [4]	Теория Фурье кардинальных функций	Обобщение рядов
1933, В.А. Котельников [5]	О пропускной способности «эфира» и проволоки в электросвязи. 9 теорем дискретизации	Теорема 5 для полосовых сигналов
1946, Gabor D.	Теория связи и основные приложения	Интерпретация
1949 (1963), Шеннон К. [6]	Связь при наличии шума. Обобщенное доказательство теоремы отсчетов для задач связи	Теорема введена в теорию связи
1949, I. Someya [7]	Приложение к теории передачи сигналов	Приложения УКШ
1953, A. Kohlenberg [8]	Точная интерполяция группа-ограниченные функции. Дискретизация *p*-го порядка	Разложение в ряд полосовых сигналов
1956, D.L. Jagerman, L.Fogel [9]	Некоторые общие аспекты теоремы отсчетов	Интерполяционное обобщение УКШ
1956, J.L. Yen [10]	Неравномерная дискретизация ограниченных по полосе частот сигналов	Неравностоящие дискретные отсчеты
1958, Турбович И.Т. [11]	Теорема отсчетов при неограниченном спектре	Обобщенный ряд
1957, Голдман С.	Теория информации и основные приложения	Интерпретация УКШ
1957, Weiss [12]лю.	Теорема выборки для задач и систем Штурма-Лиувилля	Обобщение теоремы отсчетов Вайса-Крамера (УКШК)
1959, H.P. Kramer [13]	Обобщенная теорема выборки для интегрального преобразования Ганкеля (Бесселя)	
1959, Billings A.R. [14]	Дискретизация сигналов полосой частот, имеющей нижнюю частоту, не равную нулю	Графическая интерпретация УКШ
1959, Цыбаков Б.С., Яковлев В.П. [15]	О точности восстановления функций с помощью конечного числа членов ряда Котельникова	Анализ ошибок дискретизации
1960, Игнатьев Н.К. [16]	Общие методы исследования дискретизации	Обобщение методов
1061, F.M. Reza [17]	Введение в теорию информации	Многомерная теорема

Продолжение таблицы 1

Год, автор	Основной результат исследования	Особенности
1961, Мидлтон Д.	Введение в статистическую теорию связи	Интерпретация УКШ
1962, A. Papoulis [18]	Интеграл Фурье и его приложения	Учет фильтра обработки сигнала
1971, Стейн С., Джонс Д.	Принципы современной теории связи и их применение к передаче дискретных сообщений	Прикладные аспекты реализации УКШ
1972, Гаарднер Н.О. [20]	О многомерной теореме отсчетов	Обобщение теорем
1974, Кэтермоул К.В.	Принципы импульсно-кодовой модуляции	Приложение УКШ
1975, Стратонович Р.Л.	Современная теория информации	Интерпретация УКШ
1976, Бабенко В.И. [21]	Предварительная фильтрация при анализе спектра полосовых сигналов.	Учет погрешностей преобразования
1977, А. Дж. Джерри [22]	Теорема отсчетов Шеннона, её различные обобщения и приложения. Обзор	Обзор вклада исследователей
1977, Хургин Я. И., Яковлев В. П. [23]	Анализ трудов по теории финитных функций и ее применения в физике и технике	Аналитический обзор и интерпретация УКШ
1980, Алексеев А.В., Шавельский Ю.И. [24]	Модель оптимизации выбора частоты дискретизации реальных полосовых сигналов УКШр	Обобщение теоремы для реальн. сигналов
2004, Басараб М. А., Зелкин Е. Г, Кравченко В.Ф. [32].	Цифровая обработка сигналов на основе теоремы УКШ	Аналитический обзор трудов по УКШ

Минимизация погрешностей преобразования и обработки сигналов, данных, информации в целом сегодня, безусловно, должна рассматриваться в системно целостном процессе анализа, синтеза, оптимизации. И именно только такой подход может обеспечить обоснование проектного, управленческого решения и минимизацию риска заказчика при решении этой традиционной, но далеко не однозначной задачи.

После анализа основных факторов, влияющих на качество дискретного преобразования информации, перейдем к обобщению рекомендаций по обоснованному выбору, как уже было отмечено, параметра преобразования, а именно – частоты дискретного преобразования сигналов, обеспечивающих минимизацию и непревышение допустимых погрешностей преобразования.

В современном варианте теорема отсчетов УКШ с учетом изложенных выше аспектов и в соответствии с результатами исследований [24–31] может быть представлена в виде **Обобщенной теоремы отсчетов для финитных функций с ограниченным по полосе частот спектром (УКШр)**:

Теорема УКШр: Если спектральная плотность $S(F)$ функции времени $s(t)$ может быть представлена функцией вида

$$S(F) = D\left({}^{F}\!/_{F_{\text{Н}}}\right)^{s}\left({}^{F_{\text{Н}}}\!/_{F}\right)^{m}\left({}^{F_{\text{В}}}\!/_{F}\right)^{r}, \qquad (5)$$

где s, m, r – параметры формы спектра по крутизне наклона огибающей спектральной плотности функции $S(F)$ соответственно по низкочастотному срезу (НЧС) в диапазоне частот $[0; F_\text{Н}]$, по сплошной части спектра (СЧС) в диапазоне частот $[F_\text{Н}; F_\text{В}]$ с полосой частот ΔF, по высокочастотному срезу (ВЧС) в диапазоне частот $[F_\text{В}; \infty)$ функции $s(t)$, вне указанных диапазонов частот соответственно $s = 0$, $m = 0$, $r = 0$, то при допустимой относительной погрешности наложения спектров (интерференционных погрешностей) по НЧС $e_\text{Н}$, по ВЧС $e_\text{Н}$, функция времени $s(t)$ полностью определяется своими мгновенными значениями в моменты времени, отстоящими друг от друга на $(1/F_Д)$ секунд, а допустимое значение частоты дискретизации (частоты выборки) функции $s(t)$ должно выбираться из обобщенного условия вида:

$$F_\text{Д} = \Gamma \times \Delta F \ , \tag{6}$$

где значение обобщенного параметра дискретизации (относительной частоты дискретизации) выбирается из граничного условия

$$\frac{(1+L)R}{1+k} \leq \Gamma \leq \frac{LS}{k}, \tag{7}$$

$k = 1; 2; 3, \ldots; k_{max}$ – целочисленное значение, определяющее порядок (моду) дискретного представления функции времени $s(t)$;

$$L = {}^{F_\text{Н}}\!/_{\Delta F} - \tag{8}$$

относительное значение (местоположение) полосы частот ΔF, как правило, на уровне -3 дБ;

$S \in [0; 2]$, $R \in [2; \infty)$ – *обобщенные параметры учета ограниченной крутизны наклона огибающей спектральной плотности по НЧС и ВЧС с соответствующими диапазонами изменения значений и алгоритмами определения в зависимости от заданных значений погрешностей по НЧС $e_\text{Н}$ и по ВЧС $e_\text{Н}$, относительной величины (динамического диапазона) D изменения значений функции $s(t)$, крутизны наклона спектральной плотности по НЧС s, по СЧС m и по ВЧС r.*

Важными следствиями сформулированной теоремы УКШр являются следующие.

<u>*Следствие 1:*</u> *Минимально избыточным значением частоты дискретизации является значение $F_Д$ при максимальном целочисленном значении порядка дискретного представления*

$$k_{max} = INT\{1/[(1 + 1/L)\frac{R}{S} - 1]\}, \tag{9}$$

которое определяется только соотношением обобщенных параметров учета ограниченной крутизны наклона спектра по ВЧС и СЧС ${}^{R}\!/_{S}$, относительной полосой частот (местоположением полосы частот) L, а также оператором целочисленного значения в выражении (9) INT.

Причем, для идеально ограниченных спектров с $R = 2$ и $S = 2$ имеет место значение ${}^{R}\!/_{S} = 1$, при котором $k_{max} \to \infty$, а значение $\Gamma \to 2$.

Данный частный вид условия по теореме УКШр полностью совпадает с классическим случаем выбора частоты выборки для восстановления сигнала по теореме УКШ и УКШК при идеально ограниченном спектре сигнала [1, 3, 5, 6, 14].

<u>Следствие 2:</u> Для k-того порядка (моды) дискретного представления функции времени узлы (вершины клиньев) допустимых значений частот дискретизации имеют параметры

$$L_k = 1/[\left(1+\frac{1}{k}\right)\frac{S}{R} - 1], \tag{10}$$

$$\Gamma_k = L_k S/k = (1 + L_k)R/(1 + k). \tag{11}$$

График множества областей допустимых значений относительной частоты дискретизации $\Gamma(L)$ для финитных функций с ограниченным по полосе частот спектром в соответствии с теоремой УКШр приведен на рис. 1.

Данный график представляет собой ограниченное множество (семейство) k областей клиновидной формы с вершинами, соответствующими координатам (10)–(11). Эти вершины областей характеризуют условия безизбыточного дискретного преобразования соответствующегоk-того порядка (моды преобразования).

В том числе на графике $\Gamma(L)$ пунктиром приведены условия выбора $F_Д$ для реальных (с конечной крутизной наклона огибающей спектральной плотности) полосовых сигналов, для которых значения $R \neq 2$ и $S \neq 2$.

График наглядно показывает критичность влияния параметров дискретного преобразования на выбор допустимого значения частоты дискретизации, а также необходимое, но не достаточное условие выбора вида $F_Д \geq 2\Delta F$.

Практически значение частоты дискретизации должно выбираться вблизи вершины клина (с учетом погрешностей дрожания $F_Д$ и других), вблизи середины узкого диапазона значений (7). В этой связи полезными могут быть условия выбора среднеарифметического или среднегеометрического значений обобщенного параметра относительной частоты дискретизации в виде

$$\Gamma_k^{А} = \frac{(1+L)R}{2(1+k)} + \frac{LS}{2k}, \tag{12}$$

$$\Gamma_k^{Г} = [\frac{(1+L)R}{4(1+k)}\frac{LS}{k}]^{1/2}, \tag{13}$$

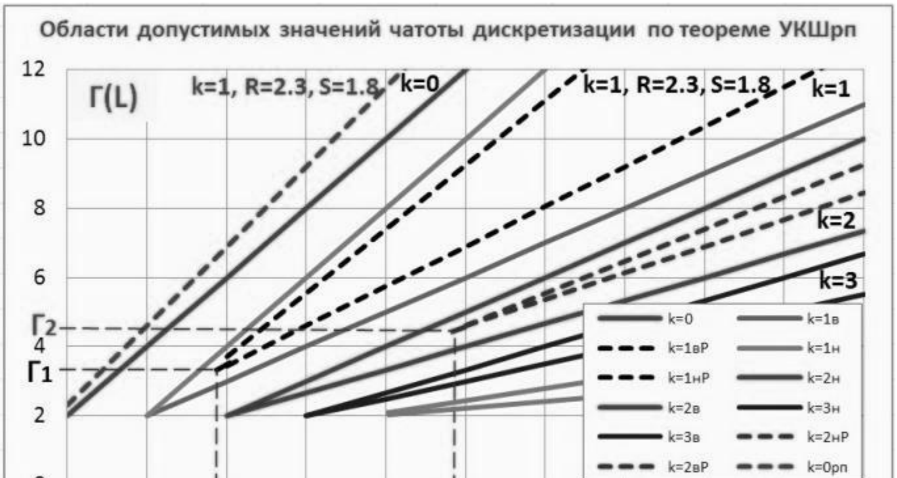

Рис. 1. Обобщенное условие выбора параметров дискретизации функции $s(t)$ по теореме УКШр

<u>Следствие 3:</u> *Минимизация информационной избыточности дискретного представления функции времени* $s(t)$ *внутри области значенийk-того порядка имеет место при условии*

$$\Delta \approx \delta_{Д} - 1 = \frac{\Gamma(k=0)}{\Gamma(k)} - 1 = \frac{(1+1/L)Rk}{S} - 1. \qquad (14)$$

Анализ зависимости показывает, что минимизация информационной избыточности $\Delta \to 0$ достигается при наибольших значениях L, а также при минимизации значений $k \to 1$ и $R/S \to 1$.

В реальных условиях значение информационной избыточности может достигать весьма существенных значений и, прежде всего, за счет необоснованного и, даже, некорректного выбора частоты дискретизации.

Кроме того, за счет ограниченных возможностей создания и использования высокоизбирательных систем предварительной селекции обрабатываемых сигналов со значениями $R \to 2$, $S \to 2$. Это обеспечивается при $r, s \to \infty$.

4. Заключение. Несмотря на пройденный 100-летний рубеж освоения тайн дискретного преобразования временных функций и закономерностей их представления массивом выборочных значений, природа этих процессов продолжает привлекать внимание большого круга исследователей.

Как математиков, среди которых E.T. Whittaker впервые сформулировал теорему отсчетов в виде кардинального ряда, так и технических физиков, связистов, теоретиков и практиков современной информатики и кибернетики, исследователей современных информационных технологий и многих других смежных дисциплин.

В результате исследований и формулирования закономерности дискретного представления информации в виде теоремы УКШ в практику цифровой обработки данных сегодня надежно вошли рекомендации, учет которых позволяет корректно переходить к ограниченным массивам данных и, тем самым, минимизировать информационную, функциональную, структурную, алгоритмическую и другие виды избыточности.

Сегодня, даже с учетом целого ряда ограничений, диктуемых особенностями практической реализации теоремы УКШ, знание закономерностей дискретного преобразования данных позволяет использовать для полосовых сигналов в области МГц-частот и выше кГц-частоты дискретизации с соответствующим выигрышем в $k \geq 10 \ldots 100$ раз и более.

Безусловно, это имеет особое значение для объектов морской техники и морской инфраструктуры, где ведется традиционная борьба за каждый ресурсный показатель, а упускать названные возможности вряд ли можно считать допустимым.

Наконец, даже в условиях освоения революционных возможностей современных информационных технологий с терабитными возможностями элементной базы вопросы информационной избыточности продолжают оставаться актуальными. И не только актуальными, но и критичными в связи комплексом новых ограничений по обработке информации, обусловленных принципиальным ограничением психофизиологических возможностей операторов по визуальной, интеллектуальной, групповой обработке данных, представляемых для принятия соответствующих проектных и управленческих решений.

В этих условиях именно максимизация ценности представляемых и обрабатываемых данных, включая удельную ценность на каждый бит данных, их системную значимость в интересах качества принятия решений предъявляет жесткие требования к методической корректности и повышенной точности выбора каждого из параметров обработки сигналов. Именно такую возможность предоставляет рассмотренный математический аппарат и методика обобщенного представления реальных полосовых процессов в соответствии с теоремой отсчетов УКШр.

Литература

1. **Wittaker E. T.** On the function which are represented by the expansion of interpolating theory, Proc. Roy. Soc. Edinburgh, vol. 35, pp.181–194, 1915.
2. **Ferrar W. L.** On the consistency of cardinal function interpolation, Proc. Roy. Soc. Edinburgh, vol. 47, pp. 230–242, 1927.
3. **Nyquist H.** Certain topica in telegraph transmission theory, AIEE Trans., vol. 47, pp. 617–644, 1928.
4. **Whittaker J. M.** The Fourier theory of the cardinal functions, Proc. Roy. Soc. Edinburgh, vol. 1, pp.169–176, 1929.
5. **Котельников В. А.** О пропускной способности «эфира» и проволоки в электросвязи. В кн.: Материалы по радиосвязи к I Всесоюзному съезду по вопросам технической реконструкции связи. Всесоюзный энергетический комитет, 1933.
6. **Shannon C. E.** Communication in the presence of noise. Proc. Institute of Radio Engineers. Vol. 37. No. 1. P. 10–21. Jan. 1949.
   Шеннон К. Связь при наличии шума. В кн.: Шеннон К. Работы по теории информации и кибернетике. М.: ИЛ, 1963, с. 433–460.
7. **Someya I.** Waveform Transmission.Tokyo: Shukyo, Ltd., 1949.
8. **Kohlenberg A.** «Exact interpolation of band-limited functions», J. Applll. Physssiiics, vol. 24, pp. 1432–1436, 1953.
9. **Jagerman D. L. and Fogel L.** «Some general aspects of the sampling theorem», IRE Trans. Inform. Theory, vol. IT-2, pp.139–146, Dec. 1956
10. **Yen J. L.** On the nonuniform sampling of band width limited signals, IRE Trans. Circult Theory, vol. CT-3, pp. 251–257, Dec. 1956.
11. **Турбович И. Т.** К вопросу о применении теоремы Котельникова к функции времени с неограниченным спектром. Радиотехника, 1958, т. 13, № 8, с. 11–12.
12. **Weiss.** Sampling theorems associated with Sturm-Liouville systems, Bull. Math. Soc., vol. 63, p. 242, 1957.
13. **Kramer H. P.** A generalized sampling theorem, J. Math. Phys., vol. 38, pp. 68–72, 1959.
14. **Billings A. R.** Sampling of Signals without D.C.Components. Electr.and Radio Engineer, v. 36, 1959, № 2, p. 70–72.
15. **Цыбаков Б. С., Яковлев В. П.** О точности восстановления функций с помощью конечного чис-ла членов ряда Котельникова. Радиотехника и электроника, 1959, т. 4, № 3, с. 542.
16. **Игнатьев Н. К.** Общие методы исследования систем с дискретизацией. Электросвязь, 1960, т. 14, № 8, с. 3–11.
17. **Reza F. M.** An Introduction to Information Theory. New York: MoGraw-Hill, 1961.
18. **Papoulis A.** The Fourier Integral and its Applications. New York: McGraw-Hill. 1962.
19. **Папулис А.** Анализ ошибок в теории выборок. ТИИЭР, 1966, т.54, № 7, с. 34–43.
20. **Гаарднер Н. О.** О многомерной теореме отсчетов. ТИИЭР, 1972, т. 60, № 2, с. 119–121.
21. **Бабенко В. И.** Эффективность предварительной фильтрации при анализе спектра полосовых сигналов. Автометрия, 1976, № 5, с. 44–50.
22. **Джерри А. Дж.** Теорема отсчетов Шеннона, её различные обобщения и приложения. ТИИЭР, т. 65, № 11, 1977 (с. 53–89).
23. **Хургин Я. И., Яковлев В. П.** Прогресс в Советском Союзе в области теории финитных функций и ее применений в физике и технике. ТИИЭР, 1977, т. 65, № 7, с. 16–45.

24. **Алексеев А. В., Шавельский Ю. И.** Способ обработки сигналов. Авторское свидетельство № 210331, 26.10.1980. 21 с.
25. **Алексеев А. В., Шавельский Ю. И**. О выборе значения частоты дискретизации при дискретном представлении непрерывных процессов/Записки по гидрографии, № 205, 1981, с. 37–41.
26. **Алексеев А. В., Шавельский Ю. И.** О выборе значения частоты дискретизации при дискретном представлении непрерывных процессов/Записки по гидрографии, 1981, вып. 205, с. 37–41.
27. **Алексеев А. В., Шавельский Ю. И.** Об учёте формы спектра непрерывного сигнала при его дискр. представлении/Записки по гидрографии, 1982, вып. 207, с. 31–33.
28. Разработка интерференционного метода сокращения информационной избыточности трактов обработки информации автономных гидроакустических станций: Л., 1983. 134 с.
29. **Алексеев А. В., Шавельский Ю. И.** Цифровой анализатор спектра. Авторское свидетельство № 233277, 3.031985. 18 с.
30. **Алексеев А. В., Шавельский Ю. И.** Принципы построения субоптимального тракта согласованной спектральной обработки гидроакустических сигналов с квазипостоянно-процентной полосой анализа//Научно-технический сборник трудов, 1985, в. 2 (6), с. 39–45.
31. Гидроакустическая энциклопедия/Под ред. В. И. Тимошенко. Таганрог: Издательство ТРТУ, 1999, с. 235, 263, 614. Переиздано: 2000, с. 258, 289, 536.
32. **Басараб М. А., Зелкин Е. Г., Кравченко В. Ф., Яковлев В. П.** Цифровая обработка сигналов на основе теоремы Уиттекера-Котельникова-Шеннона. М.: Радиотехника, 2004.
33. Спектры и анализ/А. А. Харкевич. 4-е изд. Москва: URSS : ЛКИ, 2007. С. 89.
34. Материалы XII Международного симпозиума по проблеме избыточности в информационных системах. СПб.: ГУАП, 2009.