МЕТОД ARAND

В. Н. Задорожный (Омск)

Введение

Открытие фрактальных свойств трафика информационных сетей [1] стало ключом к пониманию причины целого ряда крупных неудач, постигших проекты сетевых устройств, направленные на обеспечение качества информационного обмена и основанные на классической теории очередей. Это открытие привело к радикальной корректировке математических моделей трафика и методов его обслуживания. При описании и анализе фрактального трафика стали широко применяться такие математические понятия как самоподобный случайный процесс, долговременная зависимость (ДВЗ), распределения с тяжелыми хвостами (РТХ) [1–3]. Большое внимание в этих исследованиях стало уделяться методам идентификации фрактального трафика на основе различного вида математических моделей [4].

Для задач проектирования сетевых устройств на системном уровне наиболее подходящими математическими моделями являются системы с очередями [3, 5–8]. Процессы обслуживания фрактального трафика моделируются фрактальными системами (FS) с очередями [8] – системами класса GI|GI|n|m, которые обладают следующими свойствами. Независимое время τ_i между моментами поступления i-й и (i+1)-й заявок в FS имеет одну и ту же при любом i функцию распределения (ф.р.) $A(t)$ с математическим ожиданием (м.о.) $\mathrm{E}(\tau_i) = \bar{\tau} < \infty$. Независимое время x_i обслуживания (трудоемкость) любой i-й заявки имеет ф.р. $B(t)$ с м.о. $\mathrm{E}(x_i) = \bar{x} < \infty$. Хотя бы одна из ф.р. $A(t)$, $B(t)$ описывает фрактальную случайную величину (с.в.) (т.е. является асимптотически степенной [9]) с бесконечной дисперсией. Коэффициент ρ загрузки рассматриваемых FS не превосходит единицы: $\rho = \bar{x} / n\bar{\tau} \le 1$.

Поскольку исследование FS аналитическими методами затруднено, для их расчета широко используется ИМ [6], одним из наиболее распространенных инструментов которого является система моделирования GPSS [10]. Традиционный путь повышения точности имитационных оценок – это разработка подходящих мощных методов понижения дисперсии, которые используются и для оценки вероятностей редких событий [11]. Доступная литература с описанием методов понижения дисперсии при моделировании FS касается главным образом оценок вероятности разорения в моделях страхования рисков, или, что эквивалентно, времени ожидания в очередях систем с одним каналом. В [12] описано несколько алгоритмов для M|G|1 очереди, которые требуют явного представления случайных сумм времени ожидания. В [13] разработан достаточно эффективный алгоритм для ИМ системы GI|GI|1 с распределением Вейбулла времени обслуживания. К этому же ряду вопросов относится разработка эффективных оценок параметров РТХ по выборкам ограниченного объема. Решению этой задачи посвящено большое количество публикаций, укажем лишь работы [14, 15]. В наших статьях [8, 16, 17] точность реализации РТХ на основе генераторов стандартных случайных чисел (ГСЧ) исследуется не с помощью выборочных оценок, а точными методами, применение которых позволило выявить проблему серьезного искажения реализуемых в ИМ РТХ. В статьях [8, 17] проблема искажения РТХ в ИМ анализируется исходя из необходимости обеспечения правильного решения задач моделирования FS. Устанавливается, что дискретность ГСЧ обусловливает искажение реализуемых РТХ и приводит при ИМ FS к значимым, нередко принципиальным ошибкам.

Ниже предлагается метод построения ГСЧ, названный методом ARAND, который эффективно решает проблему искажения РТХ в ИМ.

Смещение моментов распределения Парето Pa(K, α) и других РТХ

Ф.р. Парето $F(t) = 1 - (K/t)^{\alpha}$ имеет хвост $\overline{F}(t) = 1 - F(t) = (K/t)^{\alpha}$; методом обращения хвоста получаем формулу для генерации паретовской с.в. $\xi \in$ Pa(K, α):

$$\xi = Kz^{-1/\alpha}, \quad \alpha > 0, \quad K > 0, \quad t \geq K, \tag{1}$$

где z – базовая с.в. (БСВ), равномерно распределенная в промежутке от 0 до 1.

Причиной искажения реализуемых в ИМ РТХ является дискретность программных генераторов БСВ. Например, в GPSS [10] ГСЧ Uniform(1,0,1) реализует с.в. z' принимающую значения {0,000000, 0,000001, ..., 0,999999} с шагом между ними $\varepsilon = 10^{-6}$. В других языках обычно обеспечивается шаг дискретизации $\varepsilon \approx 10^{-15}$. В статьях [16, 17] показано, что при $1 < \alpha \leq 2$ преобразование (1) дискретной с.в. z' дает с.в. ξ', м.о. E(ξ') и коэффициент вариации $C_{\xi'}$ которой смещены. В табл. 1 приведены значения E(ξ') и $C_{\xi'}$ для различных α при K = 1.

Табл. 1. Числовые характеристики с.в. ξ', реализующей с.в. $\xi \in$ Pa(K, α) при K = 1

α	E(ξ')			E(ξ)	$C_{\xi'}$			C_ξ
	$\varepsilon = 10^{-6}$	$\varepsilon = 10^{-12}$	$\varepsilon = 10^{-15}$		$\varepsilon = 10^{-6}$	$\varepsilon = 10^{-12}$	$\varepsilon = 10^{-15}$	
1,01	13,415	24,612	29,662	101,00	83,856	$3{,}9866\cdot10^4$	$9{,}7690\cdot10^5$	∞
1,1	8,0297	10,154	10,549	11,000	48,305	$1{,}0882\cdot10^4$	$1{,}7677\cdot10^5$	
1,2	5,4565	5,9457	5,9828	6,0000	26,687	2450,9	$2{,}4357\cdot10^4$	
1,5	2,9755	2,9998	3,0000	3,0000	6,2716	63,247	200,02	
1,9	2,1089	2,1111	2,1111	2,1111	1,9590	3,6806	4,6685	
2	1,9985	2,0000	2,0000	2,0000	1,6136	2,4601	2,7891	

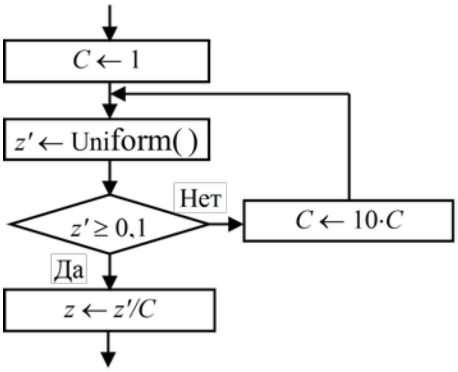
В общем случае смещения моментов РТХ объясняются тем, что при значениях дискретной БСВ z', близких к нулю, и обычном шаге ε слишком много больших значений с.в. $\xi' = \overline{F}^{-1}(z')$, существенных для формирования моментов РТХ, не реализуется.

Метод ARAND: решение проблемы искажения РТХ в ИМ

В описанном выше эксперименте на GPSS транзакты генерировались блоком GENERATE (Pareto(1,1,1.1)). Естественно, при этом моменты распределения Парето $F(t) = 1 - (K/t)^{\alpha}$ существенно смещались [2]. Но это не сказалось на точности расчета w, поскольку в СМО Pa/M/1 величина w не зависит от моментов интервала поступления заявок, а определяется его преобразованием Лапласа. Точные расчеты (опускаемые здесь из-за недостатка места) показывают, что дискретизация 6-разрядным ГСЧ распределения времени между приходами заявок не приводит к изменению величины w в моделируемой системе Pa/M/1 в пределах первых пяти-шести значащих цифр.

В [18] для решения проблемы искажений РТХ в ИМ предложен общий подход, названный каскадным методом. Приведем наиболее простую и точную его реализацию, не указанную в [18]: метод ARAND (Accurate RAND) генерации стандартных случайных чисел (ССЧ), представленный на рис. 1. Нетрудно видеть, что ССЧ на выходе ARAND независимы и распределены равномерно, поскольку независимы и равномерно распределены ССЧ на выходе процедуры Uniform( ).

Метод ARAND преобразует обычные n-разрядные ССЧ z' в такие ССЧ z, которые,




```
PROCEDURE ARAND(Arg) BEGIN
TEMPORARY CCC,zzz;
CCC = 1;
STEP1: zzz = Uniform(Arg,0,1);
STEP2: IF (zzz < 0.1)THEN BEGIN
CCC = 10#CCC;
GOTO STEP1;
END;
STEP3: zzz = zzz/CCC;
RETURN (zzz);
END;
```

Рис. 1. Схема метода ARAND

сколь бы малы они ни были, имеют *n значащих* цифр. Благодаря этому с.в. с РТХ, реализуемые путем обратного преобразования хвоста распределения, тоже имеют n точных значащих цифр, и проблема искажения РТХ устраняется (подтверждающие это расчеты выполнены в [18]). На рис. 2 приведена процедура на языке Plus, реализующая метод ARAND для GPSS World. Здесь Arg – это номер используемого ГСЧ Uniform.

Первые 10 чисел на выходе ГСЧ Uniform(1,0,1) таковы: 0.842366, 0.777717, 0.880991, 0.260493, 0.463553, **0.083898, 0.022383, 0.948592**, 0.344245, 0.929906. При первых обращениях к процедуре ARAND(1) они преобразуются в числа 0.842366, 0.777717, 0.880991, 0.260493, 0.463553, **0.00948592**, 0.344245, 0.929906. Из-за потери части чисел исходной последовательности z' длина периода у ГСЧ ARAND( ) в среднем в 1/0,9 раз меньше, чем у используемого ГСЧ Uniform. Период ГСЧ ARAND(1) содержит ровно 1 843 200 000 чисел. Наименьшее из них равно 6.54026e-11; процедура ARAND( ) в GPSS World (см. рис. 2) выдает это число со всеми 6 значащими цифрами. Заметим, что обычные 15-разрядные ГСЧ могут выдавать числа такого порядка малости лишь с 5 значащими цифрами. Если вместо ГСЧ Uniform использовать внешний ГСЧ с практически неисчерпаемой длиной периода (например, основанный на методе «Вихрь Мерсенна»), то в достаточно длинной выборке вполне могут быть получены значения, меньшие 10^{-100}, и все они будут представлены с точностью 6 значащих цифр. Обычные ГСЧ, даже если они реализуют ССЧ со 100 десятичными разрядами, этого не могут. Процедура ARAND не выдает нулевых значений.

Обращение к процедуре ARAND( ) осуществляется так же, как и к другим PLUS-процедурам [10]. Например, для генерации потока транзактов с временем между ними, распределенным по Парето с параметрами $K = 1$, $\alpha = 1{,}1$ можно написать блок GENERATE следующим образом.

GENERATE (1#ARAND(1)^(-1/1.1))

При ИМ на GPSS World системы Pa/M/1 с параметрами Парето-распределения $K = 1$, $\alpha = 1{,}1$ (т.е. с $\bar{\tau} = 11$) и с $\bar{x} = 4{,}4$ (т.е. при $\rho =$) такое использование ГСЧ ARAND( ) дает надежный степенной прогноз стационарной оценки для ρ, равный 0,397, ошибка которого по отношению к точному значению $\rho = 0{,}4$ составляет 0,8%. Степенной прогноз (см. [17]) построен по траектории, усредняющей $r = 901$ независимых реализаций переходного процесса оценки для ρ, полученных и обработанных за несколько минут компьютерного времени.

Таким образом, с помощью процедуры ARAND (6-разрядной) на GPSS получена оценка, почти на порядок более точная, чем предельно достижимая оценка 0,417, обеспечиваемая (например, в AnyLogic) стандартным 15-разрядным ГСЧ, погрешность которой составляет 4,3%. Действительно (см. табл. 1), при 15-разрядном ГСЧ в ИМ воспроизводится FS Pa/M/1 с коэффициентом загрузки $\rho = \bar{x}/\bar{\tau}$ = 4,4/10,549 = 0,417, к которому и будет сходиться соответствующая оценка с ростом времени моделирования до бесконечности (на практике – приближаться сверху по мере исчерпания длины периода ГСЧ).

Процедура ARAND( ) генерирует ССЧ в GPSS World приблизительно вдвое медленнее, чем процедура Uniform( ). Но, поскольку генерация ССЧ обычно занимает малую часть всего времени ИМ, то в большинстве случаев общее замедление бывает практически незаметно.

Метод ARAND, представленный на рис. 1, имеет смысл использовать при реализации РТХ и в других средах ИМ, например, в AnyLogic, где ГСЧ реализуют 15 и более десятичных разрядов. Это можно делать и при реализации субэкспоненциальных РТХ.

Реализация субэкспоненциальных РТХ

Характерными представителями РТХ, относящихся к субэкспоненциальным распределениям, являются распределения Вейбулла и логнормальное распределение. Распределение Вейбулла – это распределение с хвостом $\overline{F}(t) = e^{-(t/\lambda)^{\beta}}$, который при $0 < \beta < 1$ является тяжелым. Чем меньше β, тем хвост тяжелее. Методом обратного преобразования хвоста получаем для генерации с.в. ξ, имеющей распределение Вейбулла с λ = 1, формулу $\xi = (-\ln(z))^{1/\beta}$. Рассчитаем смещения м.о. E(ξ′) реализуемой с.в.

$\xi' = (-\ln(u'))^{1/\beta}$:

$$\mathrm{E}(\xi') = \varepsilon \sum_{i=1}^{1/\varepsilon} (-\ln(i\varepsilon))^{1/\beta}. \quad (2)$$

При β = 1/7 и $\varepsilon = 10^{-12}$ по формуле (2) вычисляем E(ξ′) = 5039,990168... . Такую точность реализации м.о. можно считать приемлемой, поскольку точное значение м.о. $\mathrm{E}(\xi) = \lambda\Gamma(1+\beta^{-1}) = \Gamma(1+7) = 7! = 5040$. При β = 0,01 имеем $\mathrm{E}(\xi) = 100! \approx 9{,}33 \cdot 10^{157}$. Попытка реализации такого распределения средствами обычной машинной арифметики с двойной точностью приводит к банальному переполнению разрядной сетки. При β = 0,05 м.о. $\mathrm{E}(\xi) = 20! \approx 2{,}4329 \cdot 10^{18}$, и реализуемое при $\varepsilon = 10^{-15}$ м.о. $\mathrm{E}(\xi') \approx 2{,}4232 \cdot 10^{18}$ имеет лишь 2 точных цифры. Поэтому для реализации БСВ z здесь нужен ARAND.

Логнормальное распределение – это распределение с.в. $\xi = e^{\sigma x + \mu}$, где x – стандартная нормальная с.в. Нормальное и логнормальное распределения имеют ф.р., которые в замкнутом виде в элементарных функциях не выражаются, поэтому использовать метод обратного преобразования для реализации этих распределений затруднительно. Рассмотрим вариант реализации логнормальной с.в. ξ, в котором стандартная нормальная с.в. x реализуется методом Бокса-Мюллера. Вначале два независимых значения БСВ z_1 и z_2 преобразуются в две независимых реализации x_1 и x_2 стандартной нормальной с.в. x по формулам:

$$x_1 = \sqrt{-2\ln z_1} \cdot \sin(2\pi z_2), \quad x_2 = \sqrt{-2\ln z_1} \cdot \cos(2\pi z_2), \quad (3)$$

затем вычисляются две соответствующие реализации логнормальной с.в. ξ:

$$\xi_1 = e^{\sigma x_1 + \mu}, \qquad \xi_2 = e^{\sigma x_2 + \mu}. \quad (4)$$

Здесь м.о. $E(\xi) = e^{\mu + \sigma^2/2}$. Расчет двойных сумм, определяющих действительно реализуемое м.о. $E(\xi')$ через все пары значений z'_1 и z'_2 дискретной БСВ z', однозначно свидетельствует о том, что смещения реализуемого м.о. могут быть при любом конечном числе разрядов БСВ z' велики. Так как большие значения ξ' генерируются при близких к нулю значениях z'_1, то для устранения смещений достаточно реализовать методом ARAND значения z_1. Значения z_2 можно реализовать (для ускорения) обычным ГСЧ.

Выводы

Исследование генераторов с.в., используемых в ИМ, показывает, что РТХ реализуются в общем случае со значительными искажениями, что приводит к существенным ошибкам при ИМ фрактальных систем с очередями.

Причиной искажения РТХ является дискретность используемых ГСЧ. При этом сглаживание их дискретности за счет перехода к «длинной арифметике» неэффективно из-за дополнительных аппаратных затрат или больших потерь производительности.

В статье предложен достаточно простой метод генерации базовых случайных чисел – метод ARAND, эффективно решающий проблему корректной реализации РТХ в ИМ.

В практике ИМ не часто требуются выборки такого объема, при котором достоинства предложенного метода проявлялись бы регулярно и очевидным образом. Однако он полезен уже тем, что освобождает исследователя от необходимости постоянно оценивать искажения РТХ, обусловленные дискретностью применяемых ГСЧ.

Литература

1. **Leland, W. E., Taqqu, M. S., Willinger W., Wilson, D. V.** On the Self-Similar Nature of Ethernet Traffic. IEEE/ACM Transactions on Networking, VOL. 2, No 1, February 1994. – P. 1-15.
2. **Crovella, M. E., Taqqu, M., Bestavros, A**. Heavy Tailed-Probability distributions in the World Wide Web. – 5(6): 835–846, December, 1997.
3. **Vishnevskiy, V. M.** Theoretical bases of designing computer networks, Moscow: Technosphere, 2003. – 512 p.
4. **Resaul, K. M., Grout, V.** A Comparison of Methods for Estimating the Tail Index of Heavy-tailed Internet Traffic. In Innovative Algorithms and Techniques in Automation, Industrial Electronics and Telecommunications, Springer, Dordrecht, 2007, p. 219-222.
5. **Kleinrock, L.** Queueing Systems: V. II – Computer Applications. – New York: Wiley Interscience, 1976. – 576 p.
6. **Zwart, A. P.** Queueing Systems with Heavy Tails. Eindhoven University of Technology, 2001. – 227 p.
7. **Cheng, C.S., Thomas, J.A.** Effective bandwidth in high-speed digital networks // IEEE journal on selected Areas in Communications. – 1995. – V. 13. – P. 1091-1100.
8. **Zadorozhnyi, V.N.** Simulation modeling of fractal queues, in Dynamics of Systems, Mechanisms and Machines (Dynamics), 2014, December, 2014, pp 1-4. DOI: 10.1109 / Dynamics. – 2014.7005703.
9. **Mandelbrot, B.** The fractal geometry of nature. New York: W. H. Freeman and Co., 1982. – 480 p.
10. Руководство пользователя по GPSS World / Пер. с англ. – Казань : Изд-во «мастер Лайн», 2002. – 384 с.
11. **Kleijnen, J.P.C.** Statistical Techniques in Simulation, Part 1, Marcel Dekker, New York. 1974.
12. **Asmussen, S., Binswanger, K., Hojgaard, B.** Rare events simulation for heavy-tailed distributions. Bernoulli **6**(2), 2000. – P. 303-322.
13. **Boots, N. K., Shahabuddin, P.** (2000). Simulating GI/GI/1 queues and insurance risk processes with subexponential distributions. Unpublished manuscript, Free University,

Amsterdam. Shortened version in: Proceedings of the 2000 Winter Simulation Conference, 2000. – P. 656-665.

14. **Blanchet, J, Li, C**. Efficient Rare Event Simulation for Heavy-tailed Compound Sums, 2008. http://www.columbia.edu/~jb2814/papers/RGSFinalJan08B.pdf (Referred 30.05.2015).
15. **Chan, H.P., Deng, S., Lai, T-L.** Rare-event Simulation of Heavy-tailed random walks by sequential importance sampling and resampling. http://statweb.stanford.edu/~ckirby/lai/pubs/2012_Rare-EventSimulation.pdf (Accessed 30.05.2015).
16. **Задорожный, В.Н.** Проблемы генерации случайных величин с фрактальными распределениями // В.Н. Задорожный, О.И. Кутузов. – Омский научный вестник, 2012. – № 3 (113) – С. 20-24.
17. **Задорожный, В.Н.** Проблемы и техника моделирования фрактальных очередей // В.Н. Задорожный, О.И. Кутузов. – Имитационное моделирование. Теория и практика / матер. 6-й Всерос. конф., Т1. – Казань: Изд-во. ФЭН, Академия наук РТ, 2013. – С. 143-148.
18. **Zadorozhnyi, V.N.** Cascade Method of Realization of Heavy-Tailed Distributions in Data Network Modelling. 2015 International Siberian conference on control and communications SIBCON, sec. Control of the Large-Scale Systems, Russia, Omsk, May 21-23, 2015.