

**РЕАЛИЗАЦИЯ БОЛЬШИХ ВЫБОРОК ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ СИСТЕМ
МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ НА GPSS WORLD****В. Н. Задорожный (Омск)****Введение**

При имитационном моделировании (ИМ) на GPSS World [1] систем массового обслуживания (СМО) нередко приходится для достижения требуемой точности оценок выполнять прогоны, в которых за моделируемое время T_M через СМО проходят сотни миллионов заявок. Быстродействие современных персональных компьютеров позволяет выполнять такие длинные прогоны за несколько минут. При моделировании СМО, характеризуемых распределениями с тяжелыми хвостами (РТХ), длинные прогоны необходимы почти всегда [2], а при моделировании «классических» СМО с распределениями с легкими хвостами (РЛХ) – когда коэффициенты загрузки близки к единице [3].

Однако корректную реализацию длинных прогонов на GPSS World затрудняют следующие серьезные проблемы:

- короткий период имеющихся в GPSS World генераторов стандартных случайных чисел (ГСЧ),
- дефекты модельного времени в GPSS,
- несовместимость разных ГСЧ в длинных прогонах.

В статье приводятся результаты исследования перечисленных проблем и разрабатывается методика реализации выборок большого объема, обеспечивающих при ИМ СМО на GPSS World высокую точность получаемых оценок.

Длина периода ГСЧ

Встроенные в GPSS World ГСЧ, согласно [1], основаны «на мультипликативно-конгруэнтном алгоритме Лемера с максимальным периодом. Алгоритм генерирует псевдослучайные числа в открытом интервале от 0 до 2 147 483 647 и до самоповторения генерирует $2^{31} - 2 = 2\,147\,483\,646$ уникальных псевдослучайных чисел. Дополнительно в GPSS World используется шаг перемешивания». Однако несложные, хотя и трудоемкие эксперименты, выполненные на GPSS World, показали следующее.

1) Последовательность псевдослучайных чисел на выходе процедуры Uniform(1,0,1) – первого ГСЧ в GPSS World – начинает самоповторяться с числа номер 2 048 000 000 = $2^{11} \times 10^6$, т.е. длина T его периода равна 2 047 999 999 = $8\,863 \times 743 \times 311$.

2) Периоды длиной $T = 2\,047\,999\,999$ чисел имеют также ГСЧ Uniform(2,0,1), Uniform(3,0,1) и Uniform(4,0,1). Все проверенные ГСЧ выдают последовательность чисел из одного и того же направленного кольца. При этом номер j ГСЧ Uniform(j ,0,1) определяет, какой элемент кольца становится началом последовательности.

Таким образом, сведения о ГСЧ GPSS World, приведенные в [1], не вполне корректны, хотя с точностью до порядка длина периода ГСЧ указана верно.

Дефекты модельного времени

В статье [3] приведены результаты моделирования на GPSS системы М/М/1 с интенсивностью входящего потока $\lambda = 1$ и коэффициентом загрузки $\rho = 0,9$. Средняя длина очереди $L = 8,1$ и среднее время ожидания $w = 8,1$ для этой системы известны точно. Результаты ИМ этой СМО при различной длине прогона, выраженной (средним) числом N заявок, поступающих за моделируемое время T_M , представлены в табл. 1.

Во второй строке таблицы приведены абсолютные погрешности полученных

имитационных оценок \hat{w} времени w . В третьей (последней) строке приведена допустимая погрешность, соответствующая правилу трех сигм: она найдена методом, предложенным в [3] для выборок с коррелирующими элементами w_i . В GPSS-модели системы М/М/1 интервалы поступления и обслуживания заявок заданы блоками GENERATE (Exponential(1,0,1)) и ADVANCE (Exponential(1,0,0.9)). Реализующая экспоненциальную случайную величину (с.в.) функция Exponential(j,0,a) использует очередное число, выдаваемое ГСЧ Uniform(j,0,1) (обозначим его через z), преобразует его по формуле $x = -a \cdot \ln(z)$ (попадающиеся нулевые значения z пропускаются), и возвращает x . Описанный в [3] М/М/1-тест показал, что, независимо от номера j применяемого ГСЧ, при длине прогона $N > 100 \div 200$ млн. результаты ИМ некорректны (см. табл. 1). В соответствии с этим в [3] дана рекомендация такие длинные прогоны не использовать. В настоящее время, однако, следовать этой рекомендации стало трудно и пришлось выяснять причины смещения оценок в длинных прогонах. Это привело к открытию малоприятного факта: механизм продвижения времени в GPSS World имеет скрытые дефекты.

Табл. 1. Результаты моделирования на GPSS World системы М/М/1 при $\lambda = 1$, $\rho = 0,9$.

Показатель	Число испытаний $N = \lambda T_M$				
	1 млн.	10 млн.	100 млн.	1 млрд.	2 млрд.
Оценка среднего времени ожидания	8,332	8,061	8,087	8,043	7,799
Фактическая погрешность оценки	0,232	0,039	0,013	0,057	0,301
Допустимая погрешность («три сигмы»)	0,404	0,064	0,040	0,006	0,004

На рис. 1 приведена программа, выполнение которой доказывает наличие дефектов времени в GPSS World. В ходе выполнения этой программы, моделирующей СМО М/М/1, ячейка 1 накапливает сумму всех отрицательных значений w_i времени ожидания заявок. В ячейке 2 подсчитывается число отрицательных w_i . Среднее значение отрицательных w_i вычисляется в ячейке W_NEG. Значения ячеек выводятся после каждого из 10 отрезков длинного прогона, запускаемых командами START. В каждом отрезке прогона модельное время AC1 продвигается вперед на 100 млн. единиц. Результаты выполнения этой программы представлены в табл. 2. Незначительное удлинение программы позволяет выяснить, что первый транзакт с отрицательным временем ожидания (его номер 21 693 107) входит в очередь в момент времени 21 693 041,901 257, затем выходит из нее в момент 21 693 041,894 325, который меньше времени входа на $\Delta_1 = 0,006 932$ (т.е. время «идет вспять»).

Табл. 2. Характеристики отрицательных значений времени ожидания

Абсолютное время AC1	Число случаев $w_i < 0$	Сумма всех $w_i < 0$	Среднее значение отрицательных w_i
$1 \cdot 10^8$	344	-9,87597	-0,028709
$2 \cdot 10^8$	4961	-294,378	-0,059338
$3 \cdot 10^8$	23470	-2085,86	-0,088873
$4 \cdot 10^8$	69841	-8161,87	-0,116864
$5 \cdot 10^8$	161040	-23295,5	-0,144657
$6 \cdot 10^8$	317228	-54594,3	-0,172098
$7 \cdot 10^8$	557714	-110980	-0,198991
$8 \cdot 10^8$	901127	-202575	-0,224802
$9 \cdot 10^8$	1354436	-337396	-0,249104
10^9	1920013	-522135	-0,271943

Заметим, что в среднем отрицательные w_i растут (по модулю) пропорционально

времени AC1 (см. табл. 2), а частота появления отрицательных w_i и модуль их суммы растут примерно пропорционально четвертой-пятой степени времени AC1. Наличие отрицательных w_i доказывает некорректность работы планировщика транзактов со списками событий. В целом же и положительные w_i , по всей видимости, смещены. Эксперименты показывают также, что вместе с длиной прогона растут искажения оценок и других вероятностно-временных характеристик (BBX): средней длины очереди, вероятности потери заявки (при ограниченной длине очереди) и т.д.

С последствиями описанного дефекта времени разработчики GPSS World, по-видимому, сталкивались, но сам дефект не распознали. Мы можем судить об этом по тому, например, как в [1] (с. 306) неопределенно отмечается, что использование команды RESET «может привести к некоторой систематической ошибке в области наименьших значений». Однако первые 344 отрицательных w_i (см. табл. 2) появляющиеся у нас задолго до выполнения первой команды RESET, никак ею не обусловлены. Проверки показывают, что обратный ход времени не обусловлен и погрешностями округления.

В экспериментах на AnyLogic [4] мы таких дефектов времени не обнаружили.

Реализация больших выборок при моделировании СМО с РЛХ

Длину N прогона при моделировании СМО с РЛХ на GPSS World можно все же увеличить до пропускания через модель до 1,024 млрд. заявок (т.е. до 2,048 млрд. обращений к ГСЧ Uniform, исчерпывающих длину T его периода), не опасаясь погрешностей, причиняемых дефектами модельного времени. Для этого достаточно «разбить длинный прогон» командами CLEAR и START на r независимых прогонов длины $N \leq 100$ млн. заявок, как это на примере М/М/1-теста показано на рис. 2.

```

GENERATE (Exponential(1,0,1))
ASSIGN 1,AC1
QUEUE 1
SEIZE 1
DEPART 1
SAVEVALUE 1+, ((AC1-P1)#(AC1<P1))
SAVEVALUE 2+, (AC1<P1)
ADVANCE (Exponential(1,0,0.9))
RELEASE 1
TERMINATE

GENERATE 100000000
SAVEVALUE W_NEG, (X1/X2)
TERMINATE 1

START 1
RESET
START 1
RESET
.....
START 1

```

Рис. 1. Программа, выявляющая наличие обратного хода времени в GPSS World

```

GENERATE (Exponential(1,0,1))
QUEUE 1
SEIZE 1
DEPART 1
ADVANCE (Exponential(1,0,0.9))
RELEASE 1
TERMINATE

GENERATE 100000000
TERMINATE 1

START 1
CLEAR
START 1
CLEAR
.....
START 1

```

Рис. 2. Разбиение длинного прогона на несколько независимых прогонов

При этом дефекты модельного времени не успевают причинить заметный ущерб точности результатов, поскольку абсолютное модельное время «своевременно» обнуляется командами CLEAR. Кроме того, благодаря быстрому затуханию переходных процессов (ПП) в СМО с РЛХ, все независимые прогоны умеренной длины дают корректные оценки стационарных BBX. А так как эти оценки независимы, то, усредняя их, нетрудно оценить точность получаемого при усреднении результата.

Погрешность оценок для w , получаемых таким способом увеличения выборки, находится в допустимых (несмещенных) пределах. Так, при выполнении примера на рис. 2 отдельные 10 прогонов длины 100 млн. единиц времени дают для w оценки $\hat{w}_1, \dots, \hat{w}_{10} = 8,120, 8,070, 8,070, 8,111, 8,078, 8,134, 8,128, 8,113, 8,087, 8,118$. Каждая оценка отклоняется от точного значения 8,1 менее чем на максимально допускаемую правилом трех сигм (для прогонов такой длины) величину 0,04. Отклонения от 8,1 *накапливаемых* по прогонам средних $\hat{W}_k = (1/k) \sum_{i=1}^k \hat{w}_i$ (это десять оценок $\hat{W}_1, \dots, \hat{W}_{10} = 8,120, 8,095, 8,087, 8,093, 8,090, 8,097, 8,102, 8,103, 8,101, 8,103$) также не превышают порогов, определяемых для них как $0,04/\sqrt{k}$. Метод можно применять при любом номере j ГСЧ (на рис. 2 $j = 1$).

В прогонах умеренной длины дефекты модельного времени на точности оценок стационарных ВВХ еще не сказываются. И уже не сказывается возобновление ПП после каждого CLEAR, поскольку в СМО с РЛХ ПП весьма непродолжительны.

Несовместимость разных ГСЧ в длинных прогонах

Учитывая ограничение $N \leq T/2$ длины N прогона длиной T периода ГСЧ GPSS World, можно попытаться увеличить N вдвое, затрачивая на каждый транзакт не два обращения к одному ГСЧ (в блоках GENERATE и ADVANCE, см. рис. 2), а только одно. В блоке GENERATE можно обращаться к одному ГСЧ, а в блоке ADVANCE – к другому. Однако, используя в программе на рис. 2 блоки GENERATE (Exponential(1,0,1)) и ADVANCE (Exponential(2,0,0.9)), мы, по причине некой *интерференции* последовательностей первого и второго ГСЧ, уже в прогоне, выполненном по первой команде START, получим для w неприемлемую оценку 7,898. Ее погрешность $|7,898 - 8,1| = 0,202$ более чем в пять раз превышает максимально допустимую величину 0,04.

Множество дополнительных экспериментов показало, что в длинных (и не очень) прогонах любые ГСЧ GPSS World с разными номерами в общем случае несовместимы. Величина искажения результатов ИМ СМО из-за интерференции последовательностей разных ГСЧ зависит от средней длины очереди, от вероятностных распределений, задающих СМО, от ряда других факторов, и в общем случае непредсказуема.

Реализация больших выборок при моделировании СМО с РТХ

При моделировании СМО с РТХ наиболее подходящей организацией имитационного эксперимента на GPSS также становится реализация r независимых прогонов длины $N \leq 100$ млн. заявок. Учитывая, что на каждый транзакт приходится два обращения к ГСЧ, а общее число обращений не должно превышать длины периода ГСЧ $T \approx 2,048$ млрд., имеем ограничение:

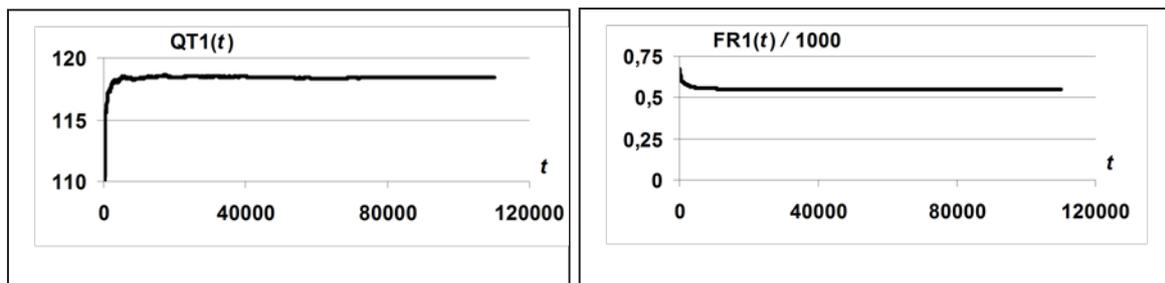
$$r \cdot N \leq T/2 = 1,024 \times 10^9. \quad (1)$$

Если ПП вычисляемой оценки (например, \hat{w}) заканчивается достаточно быстро, то все ее реализации (например, $\hat{w}_1, \dots, \hat{w}_r$), полученные в разных прогонах, затем усредняются, а их независимость позволяет обычным образом строить доверительный интервал для итоговой оценки. Если ПП вычисляемой оценки к концу прогонов не заканчиваются, то можно усреднить все полученные ПП и по усредненному ПП найти оценку стационарного значения показателя методом степенного прогноза [2].

Так, при ИМ СМО Ра/М/1 с параметрами Парето-распределения $K = 1$, $\alpha = 1,1$ (т.е. со средним временем $\bar{\tau} = 11$ между приходами заявок) и при среднем времени обслуживания $\bar{x} = 4,4$ (т.е. при коэффициенте загрузки $\rho = \bar{x}/\bar{\tau} = 0,4$)

сформулированные выше рекомендации были реализованы следующим образом. Выполнено $r = 901$ прогонов длины $T_M = 110\,000$ единиц времени. Всего приходит в среднем $rN = r(1/11)T_M = 901 \times 110\,000/11 = 9,01$ млн. заявок, и ограничение (1) выполняется. В ходе каждого прогона значения ПП оценки \hat{w} (т.е. системного числового атрибута QT1) записывались в 2000 точках отсчета $t_i = 55, 110, \dots, 110\,000$, равномерно расставленных в модельном времени t . Результат QT1(t) усреднения всех 901 ПП графически представлен на рис. 3 (несложная техника выполнения на GPSS World большого числа независимых прогонов модели и обработки их результатов изложена в [5]). Как видно из рис. 3, ПП для оценки стационарного w здесь заканчивается достаточно быстро, и можно просто взять последнее значение усредненного QT1, составившее здесь 118,4. Этот результат отличается от точного $w = 118,5$, найденного численным методом [2], лишь на 0,07%.

Что касается L и ρ , то они, в отличие от w , зависят в СМО Pa/M/1 от момента $\bar{\tau}$ распределения Парето. При 6-разрядных ГСЧ Uniform реализуется $\bar{\tau} = 8,0297$ вместо значения $\bar{\tau} = 11$, определяемого заданными $K = 1$, $\alpha = 1,1$ [2]. Поэтому СМО, воспроизводимая на GPSS World, имеет $L = w/\bar{\tau} = 118,5/8,0297 \approx 14,8$ и $\rho = \bar{x}/8,0297 \approx 0,548$. На рис. 4 показан усредненный ПП оценки для ρ . Ее стационарное значение



равно **0,546**.

Хорошая точность оценок, получаемых при рекомендуемой организации ИМ, обеспечивается еще и тем, что между r усредняемыми оценками отсутствует положительная корреляция. Заметим, что при ИМ этой же СМО (на AnyLogic) в *одном* прогоне с длиной 1 млрд. заявок, в 111 раз превышающей суммарную длину выполненных на GPSS независимых прогонов (9,01 млн. заявок), для w получена оценка 114,2, имеющая погрешность 4,4%. Коэффициент выигрыша предлагаемого метода во времени расчета оценки для w (при одинаковой точности) составил здесь около $111 \cdot (4,4/0,07)^2 \approx 4 \times 10^5$.

Выводы

Модельное время в GPSS World иногда течет вспять, т.е. событиям-следствиям, имитируемым после наступления событий-причин, приписываются меньшие значения времени, чем событиям-причинам. Соответствующие погрешности оценок ВВХ растут во времени с большим ускорением и становятся неприемлемыми при длине прогона модели СМО более 100 млн. заявок. При этом генераторы класса Uniform с точки зрения равномерности распределения и статистической независимости достаточно качественны и могут быть использованы по всей длине их периода $T = 2\,047\,999\,999$.

С учетом этого в статье предложен метод реализации больших выборок при ИМ СМО, не допускающий (за счет разбиения длинных прогонов на достаточно большое число независимых более коротких прогонов) значимого влияния дефектов времени на точность оценок (и поэтому обязательный в ИМ на GPSS World). Он также ускоряет на

порядки получение высокоточных оценок, и поэтому полезен при ИМ в любой среде. Длина T периода генераторов Uniform ограничивает объем получаемых в GPSS World выборок только неравенством (1). При необходимости это ограничение можно устранить подключением внешнего ГСЧ, основанного на методе «вихрь Мерсенна».

Литература

1. Руководство пользователя по GPSS World / Пер. с англ. – Казань : Изд-во «мастер Лайн», 2002. – 384 с.
2. **Задорожный, В.Н.** Проблемы и техника моделирования фрактальных очередей // В.Н. Задорожный, О.И. Кутузов. – Имитационное моделирование. Теория и практика / матер. 6-й Всерос. конф., Т1. – Казань: Изд-во. ФЭН, Ак. наук РТ, 2013. – С. 143-148.
3. **Задорожный, В.Н.** К дискуссии о качестве датчиков случайных чисел // В.Н. Задорожный . – Имитационное моделирование. Теория и практика (ИММОД-2009): Материалы 3-й всероссийской конференции. Том 1. – СПб: ЦТ СС, 2009. – С.128-134.
4. **Карпов, Ю.Г.** Имитационное моделирование систем. Введение в моделирование с AnyLogic 5 / Ю.Г. Карпов. – СПб : БХВ-Петербург, 2005. – 400 с.
5. **Задорожный, В.Н.** Введение в имитационное моделирование : учеб. пособие / В.Н. Задорожный. – Изд-во ОмГТУ, 2014. – 196 с.