ИССЛЕДОВАНИЕ КРИТЕРИЕВ АДЕКВАТНОСТИ МОДЕЛЕЙ ПОСРЕДСТВОМ ЛС-МОДЕЛЕЙ С ПАРАМЕТРАМИ НА СФЕРЕ

О. Ю. Копысов (Варна)

Введение

Готовы ли Вы отказаться от парадигмы операторного подхода к системам алгебраических уравнений (Ax=y), от поиска обратного оператора (обращения матрицы A) при поиске решения, от метода наименьших квадратов, особенно от нормального (псевдо) решения $x=(A^{T}A)^{-1}A^{T}y$?

Если да, то я предлагаю вернуться к парадигме равновесия, баланса компонент составляющих Модель, линейной зависимости элементов Модели, или другими словами, к системе алгебраических уравнений вида: $Ax=0$. Такие модели я назвал Моделями линейной структуры (ЛС-Моделями) [1,2,3,4], в настоящее время их чаще называют Моделями, линейно зависящими от параметров.

Парадигма линейной зависимости элементов линейного пространства позволяет ввести понятие Общего решения, как пересечения гиперплоскостей, являющихся Общим решением по каждой строке матрицы A, где сама строка - это нормаль к этому Общему решению. Для $Ax=0$ гиперплоскости Общего решения проходят через нуль пространства решений и являются подпространствами. Это, в свою очередь, позволяет говорить о пространстве строк матрицы A, как о пространстве параметров, которое состоит из двух ортогональных подпространств: подпространства строк и Общего решения, которое как пересечение подпространств, тоже является подпространством [3].

Получать базисы этих подпространств можно, например, с помощью сингулярного разложения матрицы A. Очень важно для практики, что существуют великолепные алгоритмы получения сингулярного разложения, которые дают ортонормированные базисы. А главное, что в ходе получения решения не надо обращать матрицы, разложение основано на ортогональных преобразованиях исходной матрицы A. Очень важно, что такое решение является оптимальным, как в пространстве строк, так и в пространстве столбцов, а также на единичной сфере параметров [5].

Однако большинство алгоритмов (в том числе и сингулярное разложение) построены на минимизации евклидовой нормы невязки или, другими словами, минимизации квадратичного критерия адекватности Модели и Объекта, что существенно ущемляет возможности построения новых алгоритмов.

В докладе предлагается универсальный сеточный метод (грубо говоря, полный перебор), который позволяет, как решать задачи поиска оптимальных параметров с точки зрения выбранных произвольных критериев, так и проводить процедуры сравнительного анализа самих критериев, которые в настоящее время развиты слабо.

ЛС-Модели с параметрами на сфере

Исследования отношений невязки предлагается проводить на ЛС-Моделях с параметрами на сфере. Компактное множество параметров (а каждый вектор параметров – это одна Модель из Класса моделей) позволяет рассчитать невязки для всех Моделей в классе и произвести соответствующий выбор нужной нам Модели в соответствии с любым критерием, в том числе лишь алгоритмически вычислимым. Ограничения на параметры легко переносятся на единичную сферу путём нормализации точек границы параметров.

Лирический пример. *Весна, капель. На второй день – подморозило. Зато на третий ... опять солнце, капель – еще пуще!* Наблюдая некоторое явление $\mathbf{x}$ – температуру воздуха за окном в 1-ый день, 2-ой день, 3-ий день, получили следующие данные: $x_1 = +1^o\text{C}$, $x_2 = -1^o\text{C}$, $x_3 = +3^o\text{C}$.

В качестве математической модели возьмем квадратичное отображение, также хорошо известное, как логистическое отображение. В виде ЛС-Модели с невязкой оно пишется так:

$$a_1 x_{m+1} + a_2 x_m + a_3 x_m^2 = \varepsilon_m \, .$$

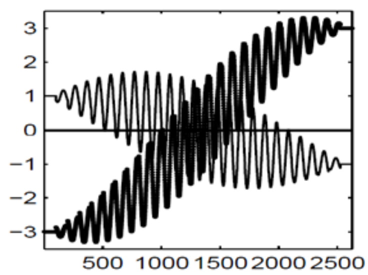
Замечание! К сожалению, существующие обозначения в алгебре и в моделировании (точнее, в идентификации) прямо противоположные, то, что во введении я называл x (решение), здесь называется a (решение задачи идентификации).

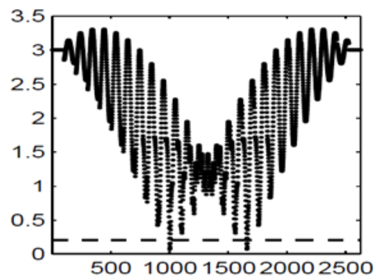
Данных наблюдений хватает, чтобы составить два уравнения, две реализации ЛС-Модели:

$$a_1(-1) + a_2(+1) + a_3(+1) = \varepsilon_1 \quad \text{и} \quad a_1(+3) + a_2(-1) + a_3(+1) = \varepsilon_2.$$

Для изготовления рисунков на сфере параметров ($a_1^2+a_2^2+a_3^2=1$) была взята географическая сетка из 24 параллелей, двух полюсов и 50 меридианов. Узлы сетки пронумерованы от северного полюса, далее на каждой параллели, до южного полюса.

На рис.1 даны графики невязок ε_1 (тонкая линия) и ε_2 (жирная линия) как функций трёхмерного параметра $\boldsymbol{a}$=(a_1, a_2, a_3), точнее функций номера узла сетки, в котором берутся значения трёхмерного параметра (далее номера параметра).





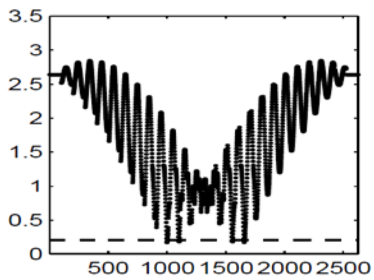


Рис.1. Невязки Рис.2. Чебышевская норма невязки Рис.3.

Когда мы имеем все невязки, легко рассчитать любые функционалы невязок. На рис.2 показана Чебышевская норма невязки – $max(|\varepsilon_1|, |\varepsilon_2|)$ как функция номера параметра. Хорошо видно, что задача минимизации этой нормы имеет два решения, два минимума. Это однозначное решение, ведь если $\hat{x}$ – решение уравнения Ax=0, то $-\hat{x}$ тоже решение этого уравнения $A(-\hat{x})$=0.

Допустим теперь, что температурные измерения проводились с некоторой погрешностью: в первый день погрешность составила Δx_1=-0.18^oC, во второй Δx_2=$+0.18^o$C и в третий Δx_3=-0.36^oC. Столь примитивное описание эксперимента дано для того, чтобы было понятно, что даже для такого примера совсем не очевидно влияние точности измерений на значения критерия. На рис.3 даны значения критерия с добавленной погрешностью. Для нас важно, что теперь мы имеем уже четыре точки минимума. Это характерно для погрешностей, они притупляют пиковые минимумы критериев основанных на нормах невязки.

Рассмотренный метод оцифровки сферы параметров позволяет качественно рисовать трёхмерные графики параметров общего решения, поверхностей норм и невязок в трёхмерном пространстве. Но, он требует вычисления большого количества синусов и косинусов для каждой точки, и их количество увеличивается с ростом размерности пространства параметров, да и даже четырехмерную картинку уже не нарисуешь. Поэтому для серьезных исследований нам понадобится другой, более точный и менее затратный сеточный метод.

Существо метода состоит в том, что в $(n-1)$-мерном единичном шаре или некоторой его области берётся абсолютно точная (двоичная) сетка, каждая точка которой есть первые $(n-1)$ координаты точки сферы. Последняя n-ная координата рассчитывается по формуле: $\alpha_n = \sqrt{1-\sum_{i=1}^{n-1}\alpha_i^2}$ при условии, что $\sum_{i=1}^{n-1}\alpha_i^2 \le 1$.

Рекомендуется брать значения α_i в точной машинной кодировке, тогда мы получаем на сфере точку, у которой лишь одна последняя координата α_n рассчитана с погрешностью. Алгоритм оцифровки можно найти в [1,2].

Такая оцифровка дает полусферу параметров, и тогда однозначные решения будут иметь одну точку на полусфере.

Исследования влияния начального состояния на значение критерия

Функциональный пример. Рассмотрим ЛСМодель с невязкой вида

$$\alpha_1\ddot{y}(t)+\alpha_2\dot{y}(t)+\alpha_3 y(t)+\alpha_4 w(t)=\varepsilon(t)$$

в трех экспериментах при одном и том же входе $w(t)$=2t+1 (сплошная линия) и трех выходах $y_1(t)$=t (на рис.4 штриховая линия), $y_2(t)$=t+e^{-2t} (на рис.5 штриховая линия) на промежутке наблюдения t=[0,1] и $y_3(t)$=t+e^{-2t} (на рис.6 штриховая линия) на промежутке наблюдения t=[1,2]. На рисунках: штрихпунктирной линией даны производные выхода $\dot{y}_i(t)$, а штриховой линией (точками) даны вторые производные выхода $\ddot{y}_i(t)$.

Ясно, что задача согласно первому эксперименту не имеет однозначного решения, так как $\ddot{y}(t)$=0 (рис.4) и α_1 может быть любым. На рис.8 изображена Чебышевская норма невязки $\varepsilon_1(t)$ первого эксперимента $max_{0\le t\le 1}|\varepsilon_1(t)|$ в зависимости от номера параметра на полусфере: a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2=1, 0≤a_4≤1.

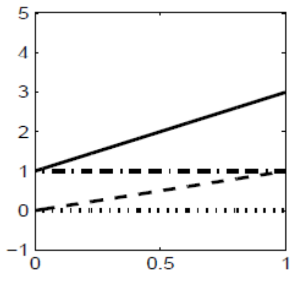


Рис.4.

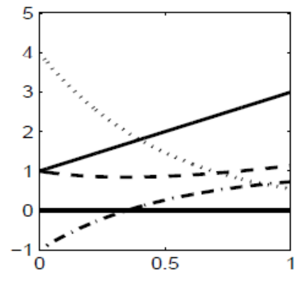


Рис.5.

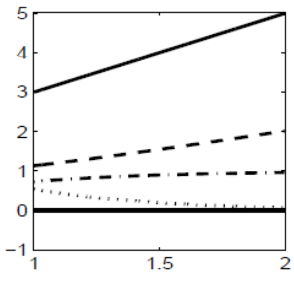


Рис.6.

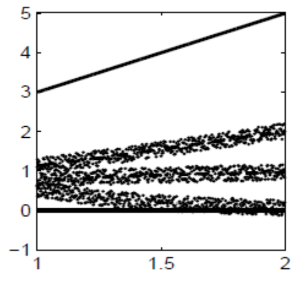
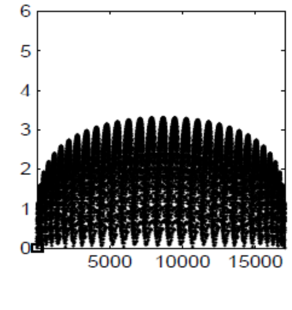
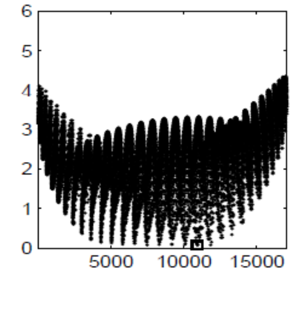
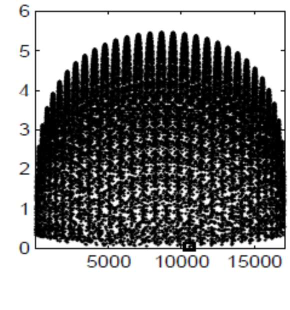


Рис.7.







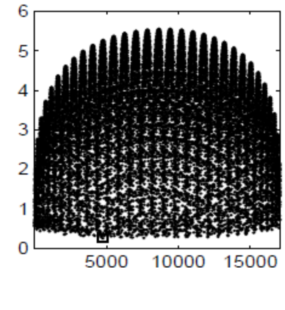


Рис.8. Рис.9. Рис.10. Рис.11.

Изображенная на рис.9 Чебышевская норма невязки $\varepsilon_2(t)$ второго эксперимента указывает на наличие минимума (квадратик на рисунке в точке с номером 10000). В третьем эксперименте переходный процесс заканчивается, и мы видим плохо выраженный минимум (рис.10), хотя задача по-прежнему имеет однозначное решение. Таким образом, переходный процесс в модели способствует однозначной идентификации ее параметров по выбранному критерию.

Однако видно, что на рисунках 9 и 10 минимумы не «четкие» и небольшой шум при измерении выходов Объекта (рис.7), выводит точку минимума в район номера 5000 (рис.11). Если Вы сделаете несколько экспериментов с разными реализациями шума, то увидите, как скачет минимум, что говорит об отсутствии устойчивой точки минимума. И никакой алгоритм тут не поможет, сама постановка задачи является неустойчивой при таком критерии, входном воздействии и уровне шума измерений.

Исследования влияния входного воздействия на значение критерия

Добавим к входному воздействию $\sin(2\pi t)$, тогда $w(t)$=2t+1+$\sin(2\pi t)$ (сплошная линия на рис.12). На рис.15 хорошо видно, что в результате мы получили четкий минимум Чебышевской нормы невязки. Затем амплитуда синусоидальной добавки была уменьшена в два раза $w(t)$=2t+1+0.5$\sin(2\pi t)$ (рис.13 и рис.16), а затем ещё в пять раз $w(t)$=2t+1+0.1$\sin(2\pi t)$ (рис.14 и рис.17).

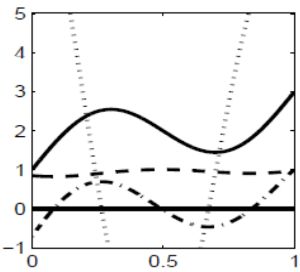


Рис.12.

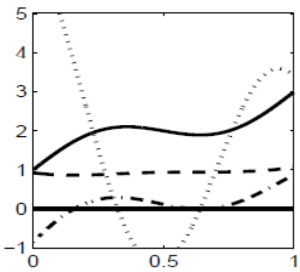


Рис.13.

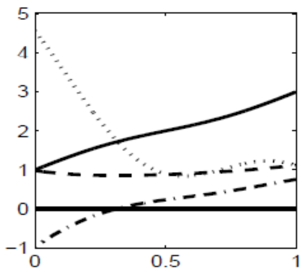


Рис.14.

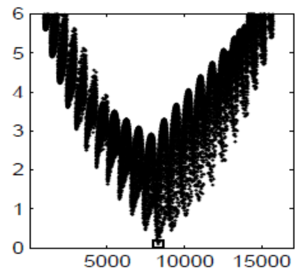


Рис.15.

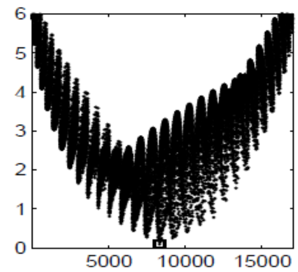


Рис.16.

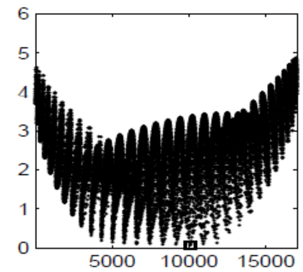


Рис.17.

Исследование показывает, что нормы не чувствительны к малым добавкам во входное воздействие (сравните рис.17 и рис.9). Это говорит о том, что в случае малых добавок в управляющее воздействие с целью гарантированной идентификации следует искать методы, не опирающиеся на минимизацию нормы невязки.

Очевидно, что у практиков сразу возникает вопрос: как считать производные? В приведённой ниже литературе описана вспомогательная ЛСМодель, которая позволяет это делать в условиях шумов в измерениях. Там же вы найдёте алгоритмы одновременной идентификации порядка, параметров, состояний и запаздывания для линейных и нелинейных моделей в виде разностных и дифференциальных (обыкновенных и в частных производных) уравнений. В работах обсуждаются также вопросы экспериментальной и структурной идентифицируемости ЛСМоделей, а также гарантирующие идентификацию эксперименты.

Выводы.

Невязка − это то, что не учитывает Модель, но, так или иначе, устанавливая в ходе решения Задачи Идентификации Объекта параметры Модели с невязкой, мы фиксируем Невязку и можем ее исследовать.

Предложенная методика исследования критериев Невязки даёт наглядную информацию о критерии сразу на всём классе Моделей независимо от размерности задачи и типа критерия, что особенно важно на ранних стадиях выбора Модели.

Важно также, что расчёты однотипные. Это даёт огромный плюс для распараллеливания вычислений при большом количестве параметров. Можно строить и итерационные исследования, беря сначала редкую сетку, а затем в интересных местах более подробную, что существенно уменьшает объем вычислений.

Замечу, что все исследования никак не зависят от алгоритма решения задачи идентификации или верификации, исследуется сама постановка задачи и её технческие условия: критерий, ограничения на параметры, входные воздействия, оцифров-ка и шумы измерений и т.д.

Методика позволяет, для одной и той же задачи, брать весьма разнообразные критерии. Хорошо, что можно самому выбрать критерий, не опираясь на единственно правильный. Хорошо, когда для одних и тех же Экспериментальных данных Объекта, можно получать его Модели разными способами. Есть, что сравнивать! Есть из чего выбирать!

Литература

1. Kopysov O.Yu. Identification via linear structure models. – Publishing house DesCartes Science Center, Varna, 2012. – 368 p. – ISBN 978-954-92807-2-2.
2. Копысов О.Ю. Идентификация посредством моделей линейной структуры. 2-ое издание. – Издателство Декартов Научен Център, Варна, 2013. – 425с. – ISBN 978-954-92807-4-6.
3. Копысов О.Ю. Идентификация посредством ЛС-Моделей. // Труды XII Всероссийского Совещания по Проблемам Управления ВСПУ-2014. Москва 16-19 июня 2014г. С. 2979-2991.
4. Копысов О.Ю. Идентификация посредством ЛС-Моделей с невязкой. // Труды XII Всероссийского Совещания по Проблемам Управления ВСПУ-2014. Москва 16-19 июня 2014г. С. 2967-2978.
5. Копысов О.Ю. Оптимальные решения задач идентификации посредством моделей с параметрами на сфере. // Труды X международной конференции “Идентификация систем и задачи управления“ SICPRO’15. Институт Проблем Управления им. В.А.Трапезникова РАН, 26-29 января 2015г. С. 865-886.
6. Копысов О.Ю., Кулагин В.П., Прокопов Б.И. Быстродействующие адап-тивные наблюдатели. – Издательство «Поиск», Москва, 1996. – 437с. – ISBN 5-02-014511-4.
7. Копысов О. Ю., Кулагин В. П. Быстродействующие алгоритмы идентификации:

итерационные и безытерационные методы. – Издательство МГОУ, Москва, 2004. – 220с. – ISBN 5-7017-0681-8.

8. Kopysov O. Yu. Identification of Parameters and Restoring of State Vector of Dynamical Plant. // Preprints of the 2013 IFAC Conference on Manufacturing Modelling, Management, and Control. P. 1510-1515 (FrA7.3).