statistics]. Moscow, Izdatel'stvo Moskovskogo universiteta, 1983. 328 p.

16. Lagutin M. B. *Naglyadnaya matematicheskaya statistika* [Transparent mathematical statistics]. Moscow, BINOM. Laboratoriya znaniy Publ., 2009. 472 p.
17. Kulik S. D., Tkachenko K. I. *Avtomatizirovannyye sredstva dlya testirovaniya ekspertov* [Automated tools for testing experts]. *Sovremennyye vozmozhnosti kriminalisticheskogo issledovaniya dokumentov. Materialy mezhvedomstvennoy nauchno-prakticheskoy konferentsii, 28 maya 20013 g.* [Proceedings of Conference «Modern possibilities of forensic examination of documents» (Moscow, 28 May 2013)]. Moscow, Moskovskiy universitet MVD Rossii Publ., 2013, pp. 12–21.
18. Kulik S. D., Tkachenko K. I. *Ispol'zovaniye metodov posledovatel'nogo analiza v zadache testirovaniya ekspertov-pocherkovedov* [Application of the method of sequential analysis in the problem of testing the expert]. *Materialy 3-y Mezhdunarodnoy nauchno-prakticheskoy konferentsii «Teoriya i praktika sudebnoy ekspertizy v sovremennykh usloviyakh» (g. Moskva, 25–26 yanvarya 2011g.)* [Proceedings of Conference №3 «Theory and practice of forensic examination in modern conditions» (Moscow, 25–26 January 2011)]. Moscow, MGYUA Publ., 2011, pp. 539–541.
19. Kulik S. D. *Otsenka effektivnosti poiskovykh operatsiy* [Estimating efficiency of search operations]. *Prikladnaya Informatika* — Journal of Applied Informatics, 2014, no. 6 (54), pp. 60–69.
20. Kulik S. D., Nikonets D. A. *Primery ispol'zovaniya neyrosetevogo algoritma v metodikakh dlya eksperta-pocherkoveda Neyrokomp'yutery: razrabotka i primeneniye* [Examples of application of the neural networks in techniques for the forensic handwriting expert. Neurocomputers: design and application]. *Radiotekhnika* — Radiotechnics, 2009, no. 9, pp. 61–85.
21. Rasch G. *Probabilistic models for some intelligence and attainment tests (Series: Studies in Mathematical Psychology I).* Copenhagen, Denmark: Danmarks Paedogogiske Institute, Danish Institute for Educational Research, 1960. xiii, 184p.
22. Chelyshkova M. B. *Teoriya i praktika konstruirovaniya pedagogicheskikh testov* [Theory and practice of constructing educational tests]. Moscow, Logos Publ., 2002. 432 p.

S. Kulik, *National Research Nuclear University «MEPHI», Moscow, Russia, sedmik@mail.ru*

Sequential analysis for testing of the human operator

This article deals with the sequential analysis for testing of the human operator. A set of important criteria (indicators) of the effectiveness of the human operator is introduced. The purpose of studies to obtain an estimate efficiency of the human operator. This article is about special the information system. The information system includes: the block of object indexing, the block of recommendatory list processing, the block of searching, the block of searching array realized, the block of recognition, the block of archive of objects and the human operator too. The search of this indicator is done. The average number of errors for the human operator is important. Estimates of the effectiveness of the human operator were obtained. Sequential analysis for testing of the human operator was used. The experimental results were obtained too. The obtained results are used for some information systems for making decisions in criminalistics. It is offered to use a special factographic system. The results were successfully protected by various patents. Further, it is planned to get and explore in details another method for testing of the human operator.

Keywords: testing, sequential analysis, human operator, target missing probability, false alarm probability.

About author: *S. Kulik, PhD in Technique*

For citation: Kulik S. Sequential analysis for testing of the human operator. *Prikladnaya Informatika* — Journal of Applied Informatiks, 2015, vol. 10, no. 3 (57), pp. 100–108 (in Russian).

А. А. Емельянов, *докт. экон. наук, профессор Национального исследовательского университета «МЭИ», г. Москва, г. Смоленск, edit@s-university.ru*

О. В. Шильникова, *ассистент кафедры технологических машин и оборудования филиала Национального исследовательского университета «МЭИ» в г. Смоленске, tmo@sbmpei.ru*

Н. З. Емельянова, *канд. экон. наук, доцент кафедры прикладной и бизнес-информатики Национального исследовательского университета «МЭИ», г. Москва, emelianovanz@mpei.ru*

Оптимизация производственных программ на основе результатов имитационного моделирования

Создание производственной программы выполняется на основе как реальных статистических данных, так и результатов моделирования. В сложных случаях используются комбинированные модели, которые выполняются в едином виртуальном времени: дискретную систему управления представляют с помощью имитационной модели, а технологические процессы — с помощью аналитических моделей. Если выявить поверхность отклика в процессе моделирования не удается, то для оптимизации производственных программ возможно совместное применение имитационного моделирования и динамического программирования.

Ключевые слова: имитационное моделирование, динамическое программирование, производственная программа, поверхность отклика, регрессионный анализ, методы оптимизации, комплексное моделирование, аналитическое моделирование.

Введение

Задача оптимизации производства на самостоятельном предприятии (вне холдинга) часто состоит в том, чтобы, исходя из определенных ресурсов оборудования, рабочей силы, материалов, с учетом реальных условий и ограничений, заказов и требований на продукцию определить производственную программу, реализуемую в течение определенного времени с наилучшими результатами. В холдинге понятие «наилучшие результаты» относится к суммарным показателям холдинга, а для предприятия в составе холдинга иногда результаты могут быть и не наилучшими.

Модель разработки производственной программы промышленного предприятия часто формируется в виде общей задачи линейного программирования [1; 10] или ее модификации, когда неизвестная поверхность отклика аппроксимируется линейной формой, а ограничения предполагаются также линейными. При этом исходят из предпосылки, что оптимизируемая программа представляет собой совокупность различных производственных способов, каждый из которых характеризуется строго определенным выбором ресурсов, которые выпускаются и потребляются в заданных количествах.

Однако реальная поверхность отклика, получаемая как с помощью статистических данных, так и посредством модели, не всегда является линейной формой. И кроме того, для составления реальной производственной программы нужны исходные данные, обладающие определенной достоверностью. Статистическая отчетность не всегда может предоставить экономистам-плановикам полный набор исходных данных, особенно, если на предприятии

используется оборудование с конечными сроками службы, замена которого планируется в обязательном порядке [6].

Поэтому часть недостающих данных можно получить, используя специальные методы, в том числе имитационные модели [11]. В качестве примера можно привести имитационную модель, примененную для оптимизации энерго- и ресурсосбережения в химической промышленности [7].

Использование результатов имитационного моделирования в оптимизационных моделях

Оптимизация с использованием имитационных моделей обычно выполняется в две стадии.

Стадия 1 — имитационное моделирование. Составляется «поведенческая» модель — имитационная или комбинированная, сочетающая в себе как аналитические, так и имитационные компоненты. Эта модель является сценарным аналогом производственно-технологического процесса [7]. Исходными данными для модели являются известные данные, используемые для планирования. С их помощью получаются допустимые в отношении экономики, технологии и безопасности недостающие данные — наборы результатов, причем таких наборов может быть довольно много. Эти результаты автоматически анализируются: для каждой точки неизвестной поверхности отклика, отображающей весь или частичный результат выполнения программы предприятия, определяются первые 2 момента и их инструментальная достоверность (доверительные интервалы и уровни значимости). Однако вид поверхности отклика иногда от этого не становится более известным. Чтобы снять такую неопределенность, эксперимент с имитационной моделью специальным образом планируется по соответствующим методикам [3].

Стадия 2 — собственно оптимизация. Сначала экспериментатор пытается построить уравнение регрессии первого или второго порядка для аппроксимации того участка поверхности отклика, где может находиться экстремальная точка (минимум или максимум). Рассмотрим основные известные методы использования результатов имитационного моделирования на второй стадии в зависимости от того, как смог обработать результаты экспериментатор.

1. Линейное программирование. Допустим, что удалось «хорошо» спланировать имитационный эксперимент и получить уравнение регрессии первого порядка, обладающее высокой степенью доверия и допустимой точностью. На рис. 1 приведен соответствующий пример поверхности отклика в виде двухкоординатной плоскости с пятью линейными ограничениями, которые являются линиями, представляющими проекции многоугольника. Из рисунка видно, что в этом случае решением являются координаты точки А в одном из углов поверхности отклика:

$$\bar{y}_{\min} = A(x_1^{\min}, x_2^{\min}).$$

Оценка «хорошо» означает, что инженерами был создан ортогональный план эксперимента [3]. Следует учесть, что в экономических задачах, как правило, существуют линейные ограничения. В таких случаях наиболее эффективный поиск оптимума (минимума или максимума) при числе переменных-факторов не менее двух — это метод линейного программирования. Если число факторов один или два, то можно применить и более простые методы, чем линейное программирование, приводящие к удовлетворительным результатам, поскольку становится доступным геометрический (визуальный) анализ результатов:

- при одном факторе просто нужно провести прямую линию через совокупность точек, чтобы справа и слева было расположено примерно одинаковое их количество (минимум или максимум функции отклика будет находиться на одном из концов проведенной линии);
- при двух факторах нужно внедрить плоскость в совокупность точек так, чтобы

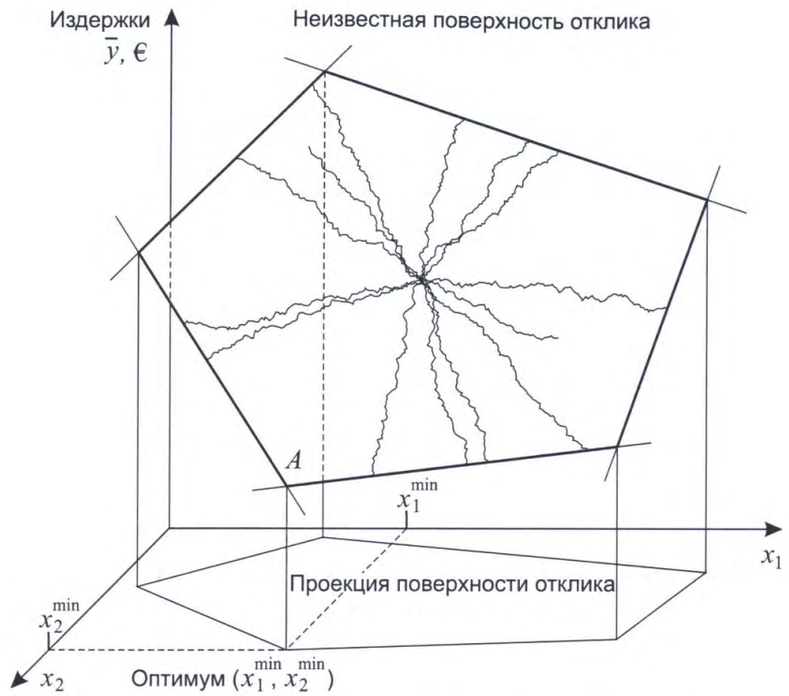

Рис. 1. Оптимум на линейной поверхности отклика

Fig. 1. Optimum on a linear response surface

с каждой из 2 сторон было расположено примерно одинаковое их количество (минимум или максимум будет находиться на краю этой плоскости);

- при бóльшем числе факторов задача решается с применением симплекс-метода [10] с использованием соответствующей стандартной программы [3].

Однако случаев, когда неизвестная поверхность отклика может быть представлена плоскостью или линейной формой большей размерности, не так много, и все они известны из экономики. Там, где экономическая задача решается совместно с технологической, часто становится ясно, что на самой поверхности отклика могут быть экстремальные точки (минимумы и максимумы). В таких случаях применяют нелинейное программирование в сочетании с градиентными методами. В «чистом виде» применение градиентных методов дает хороший эффект, если известна аналитическая форма поверхности отклика. Но в случаях обработки статистических результатов, полученных из практики, или использования результатов имитационного моделирования предварительно применяется регрессионный анализ.

2. Нелинейное программирование: метод Франка-Вульфа. Допустим, что в результате серии опытов или экспертного решения сделан вывод о наличии на поверхности отклика экстремума (их может быть и несколько). Эксперимент спланирован так, что получено уравнение регрессии второго порядка в области нахождения экстремума. Соответствующий пример показан на рис. 2. В данном случае используется метод нелинейного программирования Франка-Вульфа [3; 10], являющийся градиентным методом с линейными ограничениями.

В результате отыскание координат точки экстремума и его значения превращается в «дело математической техники». На пер-

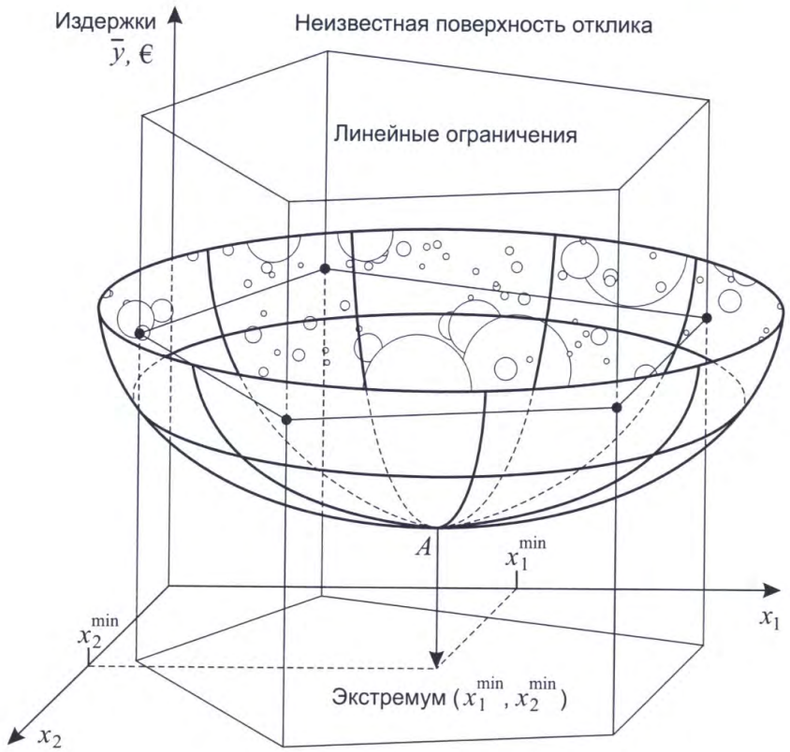

Рис. 2. Выпуклая вниз поверхность отклика

Fig. 2. The convex bottom response surface

вый взгляд, результаты, получаемые в этом случае, точнее тех, которые можно получить с помощью линейного программирования (однако первое впечатление может быть обманчивым).

3. Метод Гаусса–Зейделя. Если экспериментатору по каким-то причинам не удалось составить ортогональный план (возможно, он не владеет соответствующей методикой или методика неприменима), то складывается часто встречающаяся ситуация, когда поверхность отклика остается неизвестной. Тем не менее и в такой ситуации есть возможность оперативного планирования и управления экспериментом, если использовать разновидность градиентного метода — экспериментальный «метод покоординатного спуска Гаусса–Зейделя», который также относится к методам нелинейного программирования.

При проведении имитационных экспериментов этот метод проще в реализации, чем классический градиентный метод, за счет того, что на очередной итерации спуск осуществляется постепенно вдоль каждой из координат. Кроме того, в условиях, когда вид функции неизвестен, об аналитическом вычислении градиента можно забыть. Вся информация может быть получена только из опыта. Основное достоинство метода заключается в том, что как вид поверхности отклика, так и ее градиент могут оставаться неизвестными во всех точках.

Судя по публикациям в российской периодике за последнее десятилетие, метод Гаусса–Зейделя пользуется популярностью, особенно у молодых исследователей, благодаря простоте программной реализации. В [7] приведены: эффектный пример использования этого метода для оптимизации

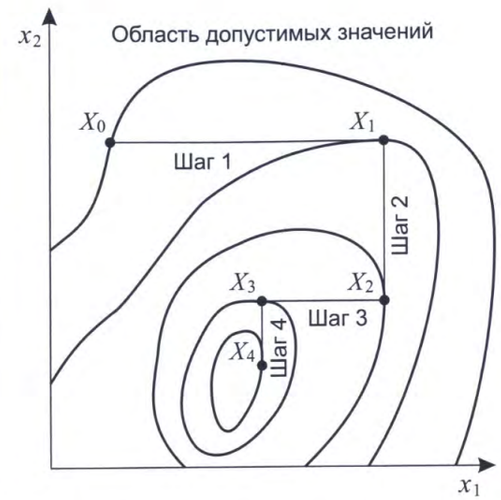

Рис. 3. Пошаговый спуск по методу Гаусса–Зейделя

Fig. 3. The stepping down method of Gauss–Seidel

производственного участка на предприятии химической промышленности и комплексная имитационная модель фрагмента АСУТП, которая создана с помощью системы имитационного моделирования Actor Pilgrim [5], причем промоделированы как дискретные процессы управления, так и непрерывные процессы в химическом реакторе [8] в едином виртуальном времени.

4. «Совсем плохой» случай: о том, как изменяется поверхность отклика с изменением координат точек, или каковы могут быть хотя бы частные производные (или конечные разности), мало что известно: нет даже намеков на наклон этой поверхности. В таком случае имитационная модель малополезна в качестве инструмента по выявлению вида поверхности отклика, представляющей производственную программу предприятия или ее фрагмент. Метод Гаусса–Зейделя применить не удается. Однако без хорошей имитационной модели сложно, а иногда невозможно определить некоторые временные, финансовые и надежностные параметры производства.

Наборы полученных из модели данных можно использовать для составления производственной программы. Их количество конечно. И использовать их можно в определенных сочетаниях. Поскольку любая производственная программа в реализации — это пошаговый процесс, она показывает динамику предприятия. Имитационная модель также предназначена для получения динамических свойств предприятия. Поскольку иных данных, кроме возможных вариантов реализации производственной программы или отдельных ее компонентов, нет, то принимается решение об использовании аппарата динамического программирования [1; 2].

Динамическое программирование

Основная идея в динамическом программировании достаточно проста. Как правило, чтобы решить поставленную задачу, требуется решить отдельные части задачи (подзадачи), после чего объединить решения подзадач в одно общее решение. Часто многие из этих подзадач одинаковы. Применение динамического программирования состоит в том, чтобы решить каждую подзадачу только один раз, сократив тем самым количество вычислений. Это особенно полезно в случаях, когда число повторяющихся подзадач с каждым шагом увеличивается практически «по экспоненте».

На практике применяются две разновидности метода динамического программирования:

1) метод динамического программирования «сверху» — это простое запоминание результатов решения тех подзадач, которые могут повторно встретиться в дальнейшем;

2) динамическое программирование «снизу» включает в себя переформулирование сложной задачи в виде рекурсивной последовательности более простых подзадач. Ниже применяется этот метод.

Динамическое программирование не столько определяет особый тип математических моделей, сколько характеризует методы нахождения решения отдельных клас-

сов задач математического программирования применительно к системотехнике[1].

Задача динамического программирования может быть сформулирована следующим образом. Пусть рассматриваемая система S находится в некотором начальном состоянии $\mathbf{x}^{(0)}$ и является управляемой. Эта система переходит из начального состояния $\mathbf{x}^{(0)}$ в конечное состояние $\mathbf{x}^{(n)} = \mathbf{x}^{\text{кон}}$ за конечное число шагов n благодаря осуществлению управления — некоторой серии операций

$$\mathbf{u}_k \in \mathbf{U},$$

где $\mathbf{U}$ — множество возможных управлений;
$\mathbf{u}_k = \{u_1, u_2, \ldots, u_{r_k}\}$ — возможные управления на каждом шаге;
r_k — число возможных управлений на шаге k;
$k = 0, 1, 2, \ldots, n$.

Будем считать, что состояние рассматриваемой системы S на k-м шаге определяется элементами множества $\mathbf{x}^{(k)}$ — совокупности m_k возможных значений

$$\mathbf{x}^{(k)} = \left\{x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_{m_k}^{(k)}\right\},$$

которые получены в результате реализации управления $\mathbf{u}_k$, обеспечивающего переход системы S из состояния $\mathbf{x}^{(k-1)}$ в состояние $\mathbf{x}^{(k)}$, причем на каждом шаге количества таких значений m_k могут отличаться.

При этом качество каждого из реализуемых управлений $\mathbf{u}_k \in \mathbf{U}$ характеризуется соответствующим значением функции $W_k\left(\mathbf{x}^{(k-1)}; \mathbf{u}_k\right)$, далее называемой функцией дохода. Задача оптимизации в этом случае состоит в отыскании оптимальной стратегии управления, т. е. такой совокупности управлений

$$\mathbf{u}_k^* = \left\{u_1^*, u_2^*, \ldots, u_n^*\right\},$$

в результате реализации которых система S за n шагов переходит из начального состояния $\mathbf{x}^{(0)}$ в конечное $\mathbf{x}^{(n)}$, и при этом суммарный доход $D(\mathbf{U})$ принимает наибольшее значение:

$$D(\mathbf{U}) = \max_{(\mathbf{u}_1^*, \mathbf{u}_2^*, \ldots, \mathbf{u}_n^*)} \left[\sum_{k=1}^{n} W_k\left(\mathbf{x}^{(k-1)}; \mathbf{u}_k^*\right)\right].$$

Можно выделить два класса задач, к которым методы динамического программирования применяются наиболее удачно:

1) планирование деятельности экономического объекта (предприятия, отрасли и т. п.) с учетом изменения потребности в производимой продукции во времени;

2) оптимальное распределение ресурсов между различными направлениями во времени.

Наибольший эффект динамическое программирование приносит там, где по условиям или по смыслу задачи приходится принимать решения поэтапно.

Применение метода динамического программирования возможно тогда, когда рассматриваемая задача удовлетворяет следующим двум условиям [1; 2]:

Условие 1. Отсутствие последействий в процессе решения. Будем предполагать, что состояние $\mathbf{x}^{(k)}$, в которое перешла система S, зависит от данного состояния $\mathbf{x}^{(k-1)}$ и выбранного управления $\mathbf{u}_k$ и не зависит от того, каким образом система S перешла в состояние $\mathbf{x}^{(k)}$.

Условие 2. Аддитивность целевой функции задачи оптимизации — это свойство типа $f(a+b) = f(a) + f(b)$ для всех a, b. Поэтому далее будем считать, что если в результате реализации k-го шага обеспечен определенный доход, также зависящий от исходного состояния системы $\mathbf{x}^{(k-1)}$ и выбранного управления $\mathbf{u}_k$, равный $W_k\left(\mathbf{x}^{(k-1)}; \mathbf{u}_k\right)$, то общий доход за n шагов составляет

$$\sum_{k=1}^{n} W_k\left(\mathbf{x}^{(k-1)}; \mathbf{u}_k\right), \quad \mathbf{u}_k = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}.$$

Метод динамического программирования основан на применении **принципа оптимальности Беллмана:** каково бы ни было состояние системы перед очередным шагом, необходимо выбирать управление на этом шаге так, чтобы доход на данном шаге вместе с оптимальным доходом на всех последующих шагах был максимальным.

Из принципа оптимальности следует, что оптимальную стратегию управления можно получить, если сначала найти оптимальную стратегию управления на n-м шаге, затем на двух последних шагах n и $n-1$, затем на трех последних шагах и т. д., вплоть до первого шага. Таким образом, решение рассматриваемой задачи динамического программирования целесообразно начинать с определения оптимального решения на последнем, n-м шаге. Чтобы найти это решение, очевидно, нужно сделать различные предположения о том, как мог закончиться последний шаг, и с учетом этого выбрать управление, обеспечивающее максимальное значение функции дохода.

Управление, выбранное при определенных предположениях о том, как окончился предыдущий шаг, называется **условно оптимальным управлением**. Принцип оптимальности требует находить на каждом шаге условно оптимальное управление для любого из возможных исходов предшествующего шага.

Для того чтобы построить алгоритм решения задач динамического программирования, дадим математическую формулировку принципа оптимальности Беллмана применительно к рассматриваемому классу задач.

Пусть

1) $F_0\left(\mathbf{x}^{(0)}\right)$ — максимальный доход, получаемый за n шагов при переходе системы S из начального состояния $\mathbf{x}^{(0)}$ в конечное состояние $x^{(n)}$ за k шагов при реализации оптимальной стратегии управления $\mathbf{u}_k^* = \left\{u_1^*, u_2^*, \ldots, u_n^*\right\}$;

2) $F_k\left(\mathbf{x}^{(k)}\right)$ — максимальный доход, получаемый при переходе из любого состояния $\mathbf{x}^{(k)}$ в конечное состояние $\mathbf{x}^{(n)}$ при оптимальной стратегии управления на оставшихся $n-k$ шагах.

Тогда

$$\begin{cases} F_0\left(\mathbf{x}^{(0)}\right) = \max\limits_{(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n) \in U} \Big[W_1\left(\mathbf{x}^{(0)}; \mathbf{u}_1\right) + \ldots \\ \ldots + W_1\left(\mathbf{x}^{(k-1)}; \mathbf{u}_n\right)\Big] \\ \ldots \\ F_k\left(\mathbf{x}^{(k)}\right) = \max\limits_{(\mathbf{u}_{k+1}, \mathbf{u}_{k+2}, \ldots, \mathbf{u}_n) \in U} \Big[W_{k+1}\left(\mathbf{x}^{(k)}; \mathbf{u}_{k+1}\right) + \ldots \\ \ldots + W_{k+1}\left(\mathbf{x}^{(k)}; \mathbf{u}_n\right)\Big] \end{cases}. \quad (1)$$

Это выражение называется основным функциональным уравнением Беллмана [1; 2]. Из (1) получается следующая рекуррентная формула:

$$F_k\left(\mathbf{x}^{(k)}\right) = \max_{(\mathbf{u}_{k+1}, \mathbf{u}_{k+2}, \ldots, \mathbf{u}_n) \in U} \left[W_k\left(\mathbf{x}^{(k)}; \mathbf{u}_k\right) + F_{k+1}\left(\mathbf{x}^{(k+1)}\right)\right] \quad (2)$$

при $k = 0, 1, 2, \ldots, n$.

Последняя формула (2) представляет собой математическую запись **принципа оптимальности Беллмана**. С использованием этого уравнения находится решение рассматриваемой задачи динамического программирования. Реализацию метода динамического программирования рассмотрим на примере решения следующей задачи.

Пример. Оптимизация программы замены оборудования

Производственные объединения и предприятия для осуществления своей эффективной деятельности должны периодически проводить замену используемого ими оборудования или поддерживать его в исправном состоянии: и то и другое стоит денег. При этом учитывается:

- производительность используемого оборудования;
- затраты, связанные с содержанием и ремонтом;
- стоимость приобретаемого и заменяемого оборудования.

Допустим для простоты, что к началу текущего планируемого периода на предприятии установлено новое оборудование.

[1] Термин «системотехника» — перевод с англ. термина *systems engineering* [9]. — *Прим. авт.*

Исходные данные

1. Затраты E, связанные с приобретением и установкой нового оборудования по истечении первого, второго, третьего или четвертого года, постоянны и равны 39 тыс. евро.

2. Зависимость производительности этого оборудования от времени его использования предприятием, а также зависимость затрат на содержание и ремонт оборудования при различном времени его использования заданы в табл. 1.

Таблица 1. Годовой выпуск, затраты на содержание и ремонт оборудования

Table 1. The annual production, cost of maintenance and repair of equipment

Характеристики: выручка и затраты	Длительность эксплуатации					
Годы t	0	1	2	3	4	5
Годовой выпуск продукции $V(t)$ в стоимостном выражении, тыс. евро	80	75	65	60	60	55
Ежегодные затраты $Z(t)$ на содержание и ремонт, тыс. евро	20	25	30	35	45	55

3. Годовой выпуск $V(t)$ зависит от реализации программы, т. е. станет известным в результате выполнения имитационной модели по реализуемой программе. Ежегодные затраты $Z(t)$ также зависят от реализации программы. Параметры $V(t)$ и $Z(t)$ в табл. 1 могут быть взаимозависимы. Пример взаимной зависимости приведен в [7].

Решение. Эту задачу можно рассматривать как задачу динамического программирования, в которой в качестве системы S выступает производственный комплекс [1], на котором оборудование либо продолжает использоваться (эксплуатация стоит денег), либо заменяется (это также стоит денег). Пока полагаем, что о старении оборудования в смысле установленного максимального срока его эксплуатации ничего не известно. Тогда, исходя из табл. 1, состояние $\mathbf{x}^{(k)}$ системы S определяется только временем ее работы $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

В качестве управлений $\mathbf{u}_k$ выступают решения о замене или сохранении оборудования в технологических цепочках. Обозначим символами (типа char):

"С" — решение о сохранении оборудования;

"З" — решение о замене оборудования.

Тогда

$$\mathbf{u}_k = \{\text{"С"}; \text{"З"}\},\ r_k = 2,\ k = 0, 1, 2, 3, 4, 5. \quad (3)$$

Задача сводится к нахождению такой стратегии управления, определяемой решениями, применяемыми к началу каждого года, при которой общая прибыль предприятия за пять лет является максимальной.

Следует отметить, что условия данного примера обладают свойствами аддитивности и отсутствия последействия. Решая задачу методом динамического программирования, разобьем решение на два этапа:

- на первом этапе найдем условное оптимальное управление при движении от начала пятого года к началу первого года для каждого допустимого состояния оборудования;
- на втором этапе составим оптимальный план замены оборудования на пять лет при движении от начала первого года к началу пятого года исходя из условных оптимальных решений для каждого года.

Обозначим:

1) $W_k\left(\mathbf{x}^{(k)}; \mathbf{u}_k\right)$ — прибыль предприятия за k-й год, $k = 1, 2, 3, 4, 5$;

2) $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4, \mathbf{u}_5$ — управления, применяемые в начале каждого года.

Очевидно, что

$$W_k\left(\mathbf{x}^{(k)}; \mathbf{u}_k\right) = \begin{cases} V\left(\mathbf{x}^{(k)}\right) - Z\left(\mathbf{x}^{(k)}\right), & \text{управление "С"}, \\ V(0) - Z(0) - E, & \text{управление "З"} \end{cases} \quad (4)$$

где $E = 39$ тыс. евро.

В этом случае, используя (2), (3) и (4), получаем следующее рекуррентное уравнение:

$$F_k\left(\mathbf{x}^{(k)}\right) = \max\begin{cases} V\left(\mathbf{x}^{(k)}\right) - Z\left(\mathbf{x}^{(k)}\right) + F_{k+1}\left(\mathbf{x}^{(k+1)}\right) & \text{при "С"} \\ V(0) - Z(0) - E + F_{k+1}(1) & \text{при "З"} \end{cases}. \quad (5)$$

Далее с помощью (5) составим и выполним поэтапную программу управления заменой оборудования.

ЭТАП 1. Пошагово движемся от начала пятого года к началу первого года для каждого допустимого состояния оборудования и найдем условное оптимальное управление на каждом шаге.

Используя уравнение Беллмана, найдем условно оптимальные решения для последнего (пятого) года, для чего определяем множество допустимых состояний оборудования к началу этого года.

Шаг 1. Возраст оборудования к началу пятого года может составлять 1, 2, 3 и 4 года. Поэтому совокупность возможных значений $\mathbf{x}^{(5)}$ такова:

$$\mathbf{x}^{(5)} = \left\{x_1^{(5)} = 1; x_2^{(5)} = 2; x_3^{(5)} = 3; x_4^{(5)} = 4\right\},$$
$$m_5 = 4.$$

Для каждого из этих состояний найдем условно оптимальное решение и соответствующее значение функции $F_5\left(\mathbf{x}^{(5)}\right)$:

$$F_5\left(\mathbf{x}^{(5)}\right) = \max\begin{cases} V\left(\mathbf{x}^{(5)}\right) - Z\left(\mathbf{x}^{(5)}\right) + 0 \\ V(0) - Z(0) - E + 0 \end{cases}.$$

Подставляя в полученную формулу вместо $\mathbf{x}^{(5)}$ его значения и учитывая данные табл. 1, находим четыре значения $F_5\left(\mathbf{x}^{(5)}\right) = \{f_5(1); f_5(2); f_5(3); f_5(4)\}$ (см. (6)–(9)):

Полученные результаты вычислений сведем в табл. 2.

Таблица 2. Значения функции дохода F_5

Table 2. The values of the income function F_5

Возраст оборудования $x^{(5)}$, годы	Значения функции дохода F_5, тыс. евро	Условно оптимальное решение
1	50	"С"
2	35	"С"
3	25	"С"
4	21	"З"

Шаг 2. Рассмотрим теперь возможные состояния оборудования к началу четвертого года. Очевидно, допустимыми состояниями являются

$$\mathbf{x}^{(4)} = \left\{x_1^{(4)} = 1; x_2^{(4)} = 2; x_3^{(4)} = 3\right\},\ m_4 = 3.$$

Для каждого из них определяем условно оптимальное решение и соответствующее значение функции $F_4\left(\mathbf{x}^{(4)}\right) = \{f_4(1); f_4(2); f_4(3)\}$.

С этой целью воспользуемся данными табл. 1 и 2, а также основным функциональным уравнением Беллмана (см. (10)–(12)):

Полученные результаты вычислений сведем в табл. 3.

Таблица 3. Значения функции дохода F_4

Table 3. The values of the income function F_4

Возраст оборудования $x^{(4)}$, годы	Значения функции дохода F_4, тыс. евро	Условно оптимальное решение
1	85	"С"
2	71	"З"
3	71	"З"

$$f_5(1) = \max\begin{cases} V(1) - Z(1) \\ V(0) - Z(0) - 39 \end{cases} = \max\begin{cases} 75 - 25 \\ 80 - 20 - 39 \end{cases} = 50 \text{ при "С"}; \quad (6)$$

$$f_5(2) = \max\begin{cases} V(2) - Z(2) \\ V(0) - Z(0) - 39 \end{cases} = \max\begin{cases} 65 - 30 \\ 80 - 20 - 39 \end{cases} = 35 \text{ при "С"}; \quad (7)$$

$$f_5(3) = \max\begin{cases} V(3) - Z(3) \\ V(0) - Z(0) - 39 \end{cases} = \max\begin{cases} 60 - 35 \\ 80 - 20 - 39 \end{cases} = 25 \text{ при "С"}; \quad (8)$$

$$f_5(4) = \max\begin{cases} V(4) - Z(4) \\ V(0) - Z(0) - 39 \end{cases} = \max\begin{cases} 60 - 45 \\ 80 - 20 - 39 \end{cases} = 21 \text{ при "З"}. \quad (9)$$

$$f_4(1) = \max\begin{Bmatrix} V(1) - Z(1) + f_5(2) \\ V(0) - Z(0) - 39 + f_5(1) \end{Bmatrix} = \max\begin{Bmatrix} 75 - 25 + 35 \\ 80 - 20 - 39 + 50 \end{Bmatrix} = 85 \text{ при “С”}; \quad (10)$$

$$f_4(2) = \max\begin{Bmatrix} V(2) - Z(2) + f_5(3) \\ V(0) - Z(0) - 39 + f_5(1) \end{Bmatrix} = \max\begin{Bmatrix} 65 - 30 + 25 \\ 80 - 20 - 39 + 50 \end{Bmatrix} = 71 \text{ при “З”}; \quad (11)$$

$$f_4(3) = \max\begin{Bmatrix} V(3) - Z(3) + f_5(4) \\ V(0) - Z(0) - 39 + f_5(1) \end{Bmatrix} = \max\begin{Bmatrix} 60 - 35 + 20 \\ 80 - 20 - 39 + 50 \end{Bmatrix} = 71 \text{ при “З”}. \quad (12)$$

Шаг 3. Определим теперь условно оптимальное решение для каждого из допустимых состояний оборудования к началу третьего года. Очевидно, такими состояниями являются

$$\mathbf{x}^{(3)} = \left\{x_1^{(3)} = 1; x_2^{(3)} = 2\right\},\ m_3 = 2.$$

В соответствии с основным функциональным уравнением Беллмана и данными табл. 1 и 3 получим (см. (13), (14)):

$$f_3(1) = \max\begin{Bmatrix} V(1) - Z(1) + f_4(2) \\ V(0) - Z(0) - 39 + f_4(1) \end{Bmatrix} = \max\begin{Bmatrix} 75 - 25 + 70 \\ 80 - 20 - 39 + 85 \end{Bmatrix} = 120 \text{ при “С”}; \quad (13)$$

$$f_3(2) = \max\begin{Bmatrix} V(3) - Z(2) + f_4(3) \\ V(0) - Z(0) - 39 + f_4(1) \end{Bmatrix} = \max\begin{Bmatrix} 65 - 30 + 70 \\ 80 - 20 - 39 + 85 \end{Bmatrix} = 106 \text{ при “З”}. \quad (14)$$

Полученные результаты вычислений сведем в табл. 4.

Таблица 4. Значения функции дохода F_3

Table 4. The values of the income function F_3

Возраст оборудования $\mathbf{x}^{(3)}$, годы	Значения функции дохода F_3, тыс. евро	Условно оптимальное решение
1	120	“С”
2	106	“З”

Шаг 4. Далее, к началу второго года возраст оборудования может быть равен только одному году, поэтому $\mathbf{x}^{(2)} = \left\{x_1^{(2)} = 1\right\}$, $m_2 = 1$ и (см. (15)).

$$f_2(1) = \max\begin{Bmatrix} V(1) - Z(1) + f_3(2) \\ V(0) - Z(0) - 39 + f_3(1) \end{Bmatrix} = \max\begin{Bmatrix} 75 - 25 + 105 \\ 80 - 20 - 39 + 120 \end{Bmatrix} = 155 \text{ при “С”}. \quad (15)$$

Шаг 5. Наконец, так как к началу рассматриваемого периода установлено новое оборудование $\mathbf{x}^{(1)} = \left\{x_1^{(1)} = 0\right\}$, то его менять не нужно, а значение функции дохода будет

$$f_1(0) = V(0) - Z(0) + f_2(1) = 80 - 20 + 155 = 215$$

при “С”.

ЭТАП 2. Пошагово движемся от начала первого года к началу пятого года из условных оптимальных решений для каждого года и составим оптимизированную программу замены оборудования на период в пять лет. Рассмотрим полученные результаты в обратном порядке.

Год 0 (к началу рассматриваемого периода): $f_1(0) = 215$ при $f_2(1)$ и “С”.

Год 1 (к началу второго года): $f_2(1) = 155$ при $f_3(2)$ и “С”.

Год 2 (к началу третьего года): $f_3(2) = 106$ при $f_4(1)$ и “З”.

Год 3 (к началу четвертого года): $f_4(1) = 85$ при $f_5(2)$ и “С”.

Год 4 (к началу пятого года): $f_5(2) = 35$ при “С”.

Условная траектория принятия решений показана на рис. 4.

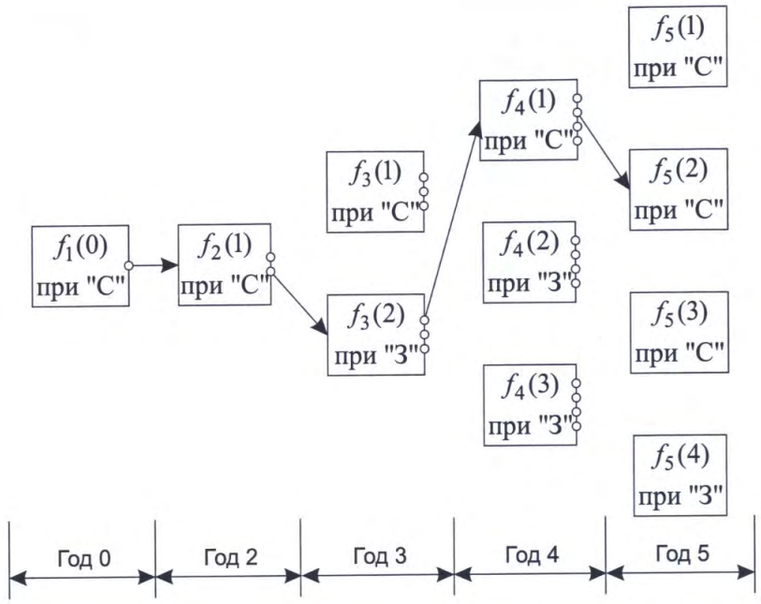

Рис. 4. Схема траектории управляющих решений для составления программы: «З» — замена оборудования; «С» — сохранение оборудования

Fig. 4. Driving trajectory control solutions for programming: «З» — replacement of equipment; «С» — saving equipment

В результате **получается оптимизированная программа** замены оборудования, которая представлена в табл. 5.

В качестве заключения можно отметить следующее.

1. *Об аддитивности*. Одним из основных свойств задач, решаемых с помощью динамического программирования, является аддитивность. Неаддитивные задачи решаются другими методами. Например, некоторые задачи по оптимизации инвестиций компании являются неаддитивными и решаются с помощью сравнения стоимости компании при проведении инвестиций и без них; но и в таких случаях (без динамического программирования) имитационное моделирование дает ощутимый эффект [4].

2. *Об исходных данных*. В реальности невозможно задать исходные данные так, как это было сделано в рассмотренном примере: они все точны и известны, чего

Таблица 5. Программа замены оборудования

Table 5. Equipment replacement program

Принять решение	Годы планируемого периода времени				
	1	2	3	4	5
Программа замены	Сохранить	Сохранить	Заменить	Сохранить	Сохранить
	u_1^* = “С”	u_2^* = “С”	u_3^* = “С”	u_4^* = “С”	u_5^* = “С”
Максимальная прибыль предприятия $D(\mathbf{U})$ = 215 тыс. евро					

в жизни не наблюдается. Но на практике некоторые данные заранее либо могут быть неизвестны, либо известны, но со значительными погрешностями; они уточняются и получаются на основе статистики и результатов моделирования. Например, в [7] показано, как с помощью имитационной модели можно получить практически без существенных изменений исходных данных 9 комплектов значений $V(t)$ и $Z(t)$ для одного года t.

3. *О чувствительности метода*. И если еще раз вернуться к рассмотренному выше примеру и немного изменить исходные данные и увеличить стоимость оборудования (например, не 39 тыс. евро, а 40 тыс. евро), то после этого программа замены оборудования изменится, причем в ней может не быть ни одной замены (желающие могут убедиться).

Список литературы

1. *Бояринов А. И., Кафаров В. В.* Методы оптимизации в химической технологии / под ред. В. В. Кафарова. М.: Химия, 1969. — 568 с.
2. *Вентцель Е. С.* Исследование операций: задачи, принципы, методология. М.: Наука, 1988. — 208 с.
3. *Емельянов А. А.* Планирование экстремальных экспериментов с имитационными моделями // Прикладная информатика. 2013. №3 (45). С. 76–90.
4. *Емельянов А. А., Власова Е. А., Емельянова Н. З., Прокимнов Н. Н.* Имитационное моделирование инвестиционных процессов // Прикладная информатика. 2012. №2 (38). С. 93–99.
5. *Емельянов А. А., Емельянова Н. З.* Имитационное моделирование и компьютерный анализ экономических процессов. Смоленск: Универсум, 2013. — 266 с.
6. *Емельянов А. А., Хамидуллин Р. Я., Гулиян Г. Б.* Методы и алгоритмы принятия решений в процессах инвестирования в безопасность деятельности химически опасных объектов // Двигатель. 2012. №2 (80). С. 62–66.
7. *Емельянов А. А., Шильникова О. В.* Моделирование дискретно-непрерывных производственных процессов и оптимизация энерго- и ресурсосбережения // Вестник МЭИ. 2015. №1. С. 74–79.
8. *Кафаров В. В.* Методы кибернетики в химии и химической технологии: 4-е изд., перераб., доп. М.: Химия, 1985. — 448 с.
9. Справочник по системотехнике / под ред. Р. Макола. М.: Советское радио, 1970. — 688 с.
10. *Таха Х. А.* Введение в исследование операций. М.: Издательский дом «Вильямс», 2005. — 912 с.
11. *Dobre T. G., Marcano J. G. S.* Chemical Engineering: Modelling, Simulation and Similitude. Weinheim (Baden-Württemberg, Germany): Wiley-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, 2007. — 570 p.

References

1. Bojarinov A. I., Kafarov V. V. *Metody optimizacii v himicheskoj tehnologii*, pod red. V. V. Kafarova [Optimization methods in chemical technology. Edited by V. V. Kafarov]. Moscow, Himija Publ., 1969. 568 p.
2. Ventcel' E. S. *Issledovanie operacij: zadachi, principy, metodologija* [Operations research: objectives, principles, methodology]. Moscow, Nauka Publ., 1988. 208 p.
3. Emelyanov A. Designing extreme experiments based on simulation models. *Prikladnaya informatika* — Journal of Applied Informatics, 2013, vol. 8, no. 3 (45), pp. 76–90 (in Russian).
4. Emelyanov A., Vlasova E., Emelyanova N., Prokimnon N. Simulation of investment processes. *Prikladnaya informatika* — Journal of Applied Informatics, 2012, vol. 7, pp. 93–99 (in Russian).
5. Emel'janov A. A., Emel'janova N. Z. Imitacionnoe modelirovanie i komp'juternyj analiz jekonomicheskih processov [Imitating modeling and computer analysis of economic processes]. Smolensk, Universum Publ., 2013. 266 p.
6. Emel'janov A. A., Hamidullin R. Ja., Gulijan G. B. Methods and algorithms of decision-making in investment processes into safety of activity of chemically dangerous objects. *Dvigatel'*, 2012, no. 2 (80). pp. 62–66 (in Russian).
7. Emel'janov A. A., Shil'nikova O. V. Modeling of discrete and continuous productions and optimization power- and resource saving. *Vestnik MPEI*, 2015, no. 1, pp. 74–79 (in Russian).

8. Kafarov V. V. *Metody kibernetiki v himii i himicheskoj tehnologii* [Cybernetics methods in chemistry and chemical technology: 4 prod., reslave., additional]. Moscow, Himija Publ., 1985. 448 p.
9. System engineering handbook. Ed. by Robert E. Machol. Moscow, Sovetskoe radio Publ., 1970. 688 p.
10. Taha H. A. *Vvedenie v issledovanie operacij* [Operations research: an introduction]. Moscow, Vil'jams Publ., 2005. 912 p.
11. Dobre T. G., Marcano J. G. S. *Chemical Engineering: Modelling, Simulation and Similitude*. Weinheim (Baden-Württemberg, Germany): Wiley-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, 2007. 570 p.

***A. Emelyanov**, National Research University MPEI, Moscow, Russia, edit@s-university.ru*
***O. Shil'nikova**, National Research University MPEI in Smolensk, Smolensk, Russia, tmo@sbmpei.ru*
***N. Emelyanova**, National Research University MPEI, Moscow, Russia, emelianovanz@mpei.ru*

Production programs optimization based on the simulation results

Develop and implement programs of industrial production is a step by step procedure perform one or more processes. Demand program is executed on the basis of both the actual statistical data and simulation results. Modeling is necessary due to the fact that not all the parameters of governmental processes are known with a satisfactory level of significance. It uses various methods of modeling. Most process design engineers are not able to create a mathematical model for the process analysis. In such cases, combined models are used: a simulation model of discrete control systems engineers is used, and the physical, chemical and other create products processes are represented by analytical mathematical model. Both are components of a complex model, and performed in the same virtual time. As a result of simulation obtained all the missing process parameters are measured their confidence intervals. Next, engineers must choose the optimization method for the production program created, and can two opposite situation. First: the response surface obtained in the simulation can be approximated with reasonable certainty by means of linear or nonlinear mathematical form. Then, it is theoretically possible to use linear programming, nonlinear programming and gradient methods. Second: the response surface did not found in the simulation. However, there are simulation results that can be used to produce versions of the program. In this case remains one method available: dynamic programming. This article describes the combined using of simulation and dynamic programming to optimize production programs.

Keywords: simulation; dynamic programming; production program; response surface; regression analysis; optimization methods; complex modeling; analytical modeling.

About author:
A. Emelyanov, Dr of Economics, Professor
O. Shil'nikova, Assistant
N. Emelyanova, PhD in Economics, Associate Professor

For citation:
Emelyanov A., Shil'nikova O., Emelyanova N. Production programs optimization based on the simulation results. *Prikladnaya informatika* — Journal of Applied Informatics, 2015, vol. 10, no. 3(57), pp. 109–121 (in Russian).