УДК 519.71

ЛОГИКО-АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ В СУПЕРВИЗОРНОМ УПРАВЛЕНИИ ДИСКРЕТНО-СОБЫТИЙНЫМИ СИСТЕМАМИ

Н.В. Нагул

Институт динамики систем и теории управления СО РАН

Россия, 664033, Иркутск, Лермонтова ул., 134

E-mail: sapling@icc.ru

Ключевые слова: дискретно-событийные системы, супервизорное управление, логико-алгебраические уравнения

Аннотация: На примере исследования вопроса сохранения свойств супервизоров управляемых дискретно-событийных систем демонстрируется применение метода логико-алгебраических уравнений как метода генерации условий сохранения свойств алгебраических систем. Для автоматной формализации дискретно-событийной системы, представленной в форме многоосновной алгебраической системы, получено ослабление условий сохранения свойств правильности и безотказности при проекции супервизоров.

1. Введение

В докладе демонстрируется применение для исследования динамических систем представленного в [1] метода математической теории систем, который позволяет алгоритмически синтезировать критерии сохранения свойств систем при некоторых связывающих их отображениях типа морфизмов, - метода логико-алгебраических уравнений (ЛАУ). В [2] с помощью этого метода исследованы динамические свойства автоматной сети и общей динамической системы типа В.В. Немыцкого. В настоящей работе показано применение метода ЛАУ для исследования свойств дискретно-событийных систем (ДСС), главной особенностью которых является моделирование эволюции системы путем учета наступления некоторых «событий». Потребность развития теории ДСС обуславливается стремительным прогрессом производственных систем, коммуникационных и транспортных сетей и других, в первую очередь антропогенных, систем. Начиная с 80-х годов прошлого века, исследования ДСС как общего класса систем активно ведутся за рубежом. Однако в России внимание к ДСС незаслуженно мало, будучи ограничено лишь системами дискретно-событийного имитационного моделирования (в частности, активно развивается система AnyLogic для создания дискретно-событийных моделей с поддержкой визуализации). В то же время за рубежом такие системы исчисляются десятками: коммерческие продукты (Arena, SIMSCRIPT, SLAM, SIMAN, AweSim), открытые системы (например, GPSS), а также прикладные библиотеки, например SimPy. Аналитическим исследованиям ДСС за рубежом посвящены сотни журнальных публикаций и десятки монографий, а сфера их практического применения чрезвычайно широка.

На сегодняшний день существуют различные способы формализации ДСС: автоматные модели, сети Петри, алгебры процессов, минимаксные алгебры, и др. Рассматриваются также стохастические модели ДСС (моделируемые цепями Маркова, системами массового обслуживания, обобщенными полумарковскими процессами), нечеткие и временные ДСС. Вместе с тем, несмотря на значительное число работ, посвященных ДСС, пока не разработано общего аппарата их исследования, который со временем мог бы превратиться в некоторый аналог аппарата дифференциальных уравнений для динамических систем с непрерывными переменными. Возникающие при исследовании конечных автоматов алгебры регулярных языков, применение для формализации ДСС (max,+)-алгебр, алгебр процессов, использование порядков на множестве состояний (A. Benveniste, E. Fabre и др.), рассмотрение топологий, определяющих принцип смены состояний системы (A. Benveniste, S. Haar, P. Baldan, E. Fabre и др.), и другие алгебраические подходы к формализациям ДСС позволяют применить для исследования ДСС метод логико-алгебраических уравнений. Одной из областей применения метода является возможность сведения (редукции) изучения сложной системы к изучению более простой. В представляемом докладе с помощью метода исследуются вопросы сохранения свойств супервизоров для ДСС.

2. Дискретно-событийные системы

2.1. Общее определение ДСС

Формально, *(логической) дискретно-событийной системой* называется [3] пятерка

$$G = (\mathcal{X}, \mathcal{E}, \{f_e\}_{e\in\mathcal{E}}, g, E_v). \tag{1}$$

Здесь $\mathcal{X}$ — множество состояний системы; $\mathcal{E}$ — множество событий, элементы которого обозначаются буквой e с некоторым индексом; $g : \mathcal{X} \to 2^{\mathcal{E}}\backslash\{\varnothing\}$ — так называемая *функция возможностей*: $g(x)$ есть множество событий, которые могут произойти, если система находится в состоянии $x \in \mathcal{X}$. Описание логической ДСС не содержит времени (в привычном смысле, как, например, системы дифференциальных уравнений). Однако некоторым аналогом временной переменной является дискретная шкала «времени» как шкала значений счетчика $I\!N = \{0, 1, 2, \ldots\}$, и $x_k \in \mathcal{X}$ представляет собой состояние ДСС в момент времени $k \in I\!N$.

Для каждого $e \in \mathcal{E}$ оператор $f_e : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ описывает переход системы из одного состояния в другое в результате реализации события e. Естественно потребовать, чтобы $f_e(x)$ было определено только тогда, когда $e \in g(x)$: если $e_k \in g(x_k)$, то $x_{k+1} = f_{e_k}(x_k)$.

Любая последовательность $\boldsymbol{x} = \{x_0, x_1, x_2, \ldots\} \in \mathcal{X}^{I\!N}$ такая, что для всех k $x_{k+1} = f_{e_k}(x_k)$, называется *траекторией состояний (фазовой траекторией). Событийной траекторией* называется последовательность $\boldsymbol{e} = \{e_0,\, e_1,\, e_2,\, \ldots\} \in \mathcal{E}^{I\!N}$, для которой существует траектория состояний $\boldsymbol{x} \in \mathcal{X}^{I\!N}$ (где для всех k $e_k \in g(x_k)$ и $x_{k+1} = f_{e_k}(x_k)$). Множество всех событийных траекторий обозначается E ($E \subset \mathcal{E}^{I\!N}$). Через $E_v \subset E \subset \mathcal{E}^{I\!N}$ обозначим множество *действительных событийных траекторий*, т.е. таких, которые физически возможны в системе. Таким образом, даже если $x_k \in \mathcal{X}$ и $e_k \in g(x_k)$, событие e_k может произойти, только если оно лежит на действительной событийной траектории. В некоторых случаях целесообразно ввести также множество $E_a \subset E_v$ — множество *допустимых событийных траекторий.* С помощью этого множества можно ограничить возникновение событий какой-то необходимой последовательностью событий.

Для построения G сначала в терминах $\mathcal{X}, \mathcal{E}, f_e, g$ моделируется физическая система (т.е. определяются возможные состояния, события, правила перехода из одного состояния в другое и т.д.), а затем вводится множество E_v для обозначения событийных траекторий, возможных в данной физической системе. Рассмотрим один из самых популярных сегодня способов формализации ДСС — представление ее с помощью автоматной модели. При этом ДСС моделируется как недетерминированный конечный автомат, порождающий некий формальный язык, — генератор [4]:

$$\mathcal{G} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, Q_m), \tag{2}$$

где Q — множество состояний q, Σ — конечное множество выходных символов σ, или алфавит, $\delta\colon \Sigma \times Q \to Q$ — функция переходов, которая в общем случае является частично определенной (чоф), $q_0 \in Q$ — начальное состояние, $Q_m \subset Q$ — множество выделенных состояний (маркеров). Как обычно, Σ^* есть множество всех конечных строк s элементов Σ.

Формально $\mathcal{G}$ эквивалентен направленному графу со множеством вершин Q и дугами из q в q' для всех троек вида (σ, q, q'), где $q' = \delta(\sigma, q)$. Такие дуги, или переходы состояний, будем называть событиями и обозначать соответствующими метками σ. $\mathcal{G}$ является недетерминированным в том смысле, что в вершинах графа могут быть доступны для выбора сразу несколько событий. Однако разные события всегда имеют разные метки.

Функция переходов δ обычным образом распространяется на строки, состоящие из элементов множества Σ, включая пустую строку 1, которая играет роль единицы для операции соединения строк: $\delta(s\sigma, q) = \delta(\sigma, \delta(s, q))$, если $q' = \delta(s, q)$ и $\delta(\sigma, q')$ определены. Язык, порождаемый генератором $\mathcal{G}$, интерпретируется как множество всех конечных последовательностей событий, которые могут произойти:

$$L(\mathcal{G}) = \{w : w \in \Sigma^* \text{ и } \delta(w, q_0) \text{ определено}\}.$$

Язык, маркируемый $\mathcal{G}$,

$$L_m(\mathcal{G}) = \{w : w \in L(\mathcal{G}) \text{ и } \delta(w, q_0) \in Q_m\},$$

интерпретируются как завершенные «задачи» (или последовательности задач), выполняемые физическим процессом, моделируемым с помощью $\mathcal{G}$.

Покажем связь приведенных определений и общего определения ДСС. Очевидно, что в качестве множества состояний ДСС (1) в случае генератора (2) выступает множество Q его состояний. Поскольку смены состояний генератора рассматриваются в качестве событий, то множество выходных символов Σ олицетворяет множество событий ДСС (1). Поскольку в общем случае δ является частично определенной функцией, для каждого фиксированного $q \in Q$ $\delta(\sigma, q)$ определена для некоторого подмножества $\Sigma(q) \subset \Sigma$. Поставив в соответствие q множество $\Sigma(q)$ $(q \mapsto \Sigma(q))$ мы определили функцию возможностей ДСС (1). Функция переходов δ, действуя как оператор f_e, в зависимости от текущего состояния q и события σ, переводит систему в следующее состояние q'. Последовательности состояний генератора — фазовые траектории. Строки, порождаемые генератором — визуализация соответствующих им событийных траекторий. Язык $L(\mathcal{G})$, порождаемый $\mathcal{G}$ — это множество E_v действительных событийных траекторий — физически возможных строк. В случае генератора все они начинаются из состояния q_0: $E_v = E_v(q_0)$. Множество E_a допустимых событийных траекторий для генератора (2) есть маркируемый им язык $L_m(\mathcal{G})$. В данном случае $E_v = E_v(q_0)$ — все они также начинаются из состояния q_0. Допустимые событийные траектории — $L_m(\mathcal{G})$ — маркированные строки. В данном случае $E_a = E_a(q_0)$.

2.2. Управляемые дискретно-событийные процессы

Практически все существующие способы формализации ДСС подразумевают возможность воздействия на поведение системы на основе ситуационного подхода. Эффективным методом управления дискретно-событийными системами в целях удовлетворения некоторым ограничениям на функционирование (спецификациям) является получившее сейчас широкое распространение супервизорное управление, предложенное в [4] и развитое многими другими авторами (P.J. Ramadge, W.M. Wonham, S. Lafortune, K. Rohloff, T. Yoo и др.). Данный метод хорошо зарекомендовал себя во многих задачах и получил широкое признание. Супервизорное управление, в том числе распределенное и децентрализованное, используется не только для автоматного представления ДСС, но также для сетей Петри и общей формализации ДСС (1). Например, в [5] сеть координаторов, управляющих перемещениями автономных подвижных аппаратов, играет роль распределённого супервизора, функционирующего в условиях частичной наблюдаемости событий. Следует отметить работы А.А. Амбарцумяна по супервизорному управлению структурированными ДСС, моделируемыми с помощью сетей Петри, например [6].

Рассмотрим супервизорное управление применительно к автоматной модели. Предполагается, что из множества Σ выделено подмножество Σ_c управляемых событий: $\Sigma = \Sigma_c \cup \Sigma_u, \Sigma_c \cap \Sigma_u = \varnothing$. Для того, чтобы ограничить порождаемые генератором языки в целях удовлетворения наложенным спецификациям, к генератору (2) присоединяется средство управления: $\gamma \in \Gamma$ — двоичные соответствия управляемым событиям — «схемы управления», $\Gamma = \{0,1\}^{\Sigma_c}$ — множество функций $\gamma : \Sigma_c \to \{0,1\}$. Событие σ называется разрешенным схемой управления γ, если $\gamma(\sigma) = 1$, и неразрешенным, если $\gamma(\sigma) = 0$. Каждое γ распространяется до отображения, определенного на всем Σ, в предположении, что неуправляемые события всегда разрешены: $\gamma : \Sigma \to \{0,1\}$, где $\gamma(\sigma) = 1$ для $\sigma \in \Sigma_u$.

Функция δ_c определяется как функция переходов, учитывающая присутствие схем управления: $\delta_c : \Gamma \times \Sigma \times Q \to Q$ (чоф), где

$$\delta_c(\gamma, \sigma, q) = \begin{cases} \delta(\sigma, q), & \text{если } \delta(\sigma, q) \text{ определено и } \gamma(\sigma) = 1; \\ \text{неопределено}, & \text{если иначе.} \end{cases}$$

Генератор

$$\mathcal{G}_c = (Q, \Gamma \times \Sigma, \delta_c, q_0, Q_m) \tag{3}$$

называется *управляемым дискретно-событийным процессом (УДСП)* [4].

2.3. Супервизорное управление

Внешнее управляющее воздействие на ДСС состоит в переключении схем управления γ. Такое управление является «разрешающим»: в то время как отключенные события не могут произойти, разрешенные события не обязательно должны произойти. Контроллер, переключающий схемы управления таким образом, чтобы данный УДСП действовал в соответствии с наложенными спецификациями, называется «супервизором». Формально [4], супервизор — это пара

$$\mathcal{J} = (\mathcal{S}, \phi) \tag{4}$$

где $\mathcal{S} = (X, \Sigma, \xi, x_0, X_m)$ — детерминированный автомат, X — (возможно, бесконечное) множество состояний, Σ — входной алфавит (множество входных символов совпадает с выходными символами генератора), $\xi : \Sigma \times X \to X$ — (частичная) функция переходов, x_0 — начальное состояние и X_m — множество маркеров. $\mathcal{S}$ интерпретируется обычным образом, как устройство, выполняющее последовательно изменения состояний (согласно ξ) в ответ на подходящую входную строку $w \in \Sigma^*$. Состояние супервизора определяет, каким из управляемых символов языка объекта разрешено возникнуть, так что $\phi : X \to \Gamma$ — (тотальная) функция, отображающая состояния супервизора в схемы управления γ: для $x \in X$ $\phi(x) = \gamma \in \{0,1\}^{\Sigma_c}$. Распространяем $\phi(x)$ до отображения $\phi(x) : \Sigma \to \{0,1\}$, когда $\phi(x)(\sigma) = 1$ для каждого $\sigma \in \Sigma_u$. Очевидно, что ϕ является обратной связью по состоянию.

Формально определим частичную функцию

$$\xi * \delta_c : \Sigma \times X \times Q \to X \times Q,$$

для которой значение $(\xi * \delta_c)(\sigma, x, q) = \xi(\sigma, x), \delta_c(\phi(x), \sigma, q)$ определено тогда и только тогда, когда $\delta(\sigma, q)$ определено, $\phi(x)(\sigma) = 1$ и $\xi(\sigma, x)$ определено.

Теперь можно присоединить супервизор (4) к функции переходов δ_c управляемого генератора (3), потребовав, чтобы переходы состояний $\mathcal{S}$ инициировались δ_c, и чтобы δ_c, в свою очередь, была ограничена схемами управления, определяемыми состояниями автомата $\mathcal{S}$. Это приводит к генератору формального языка, который называется *дискретно-событийным процессом под управлением супервизора (СДСП)*:

$$\mathcal{J}/\mathcal{G}_c = (X \times Q, \Sigma, \xi * \delta_c, (x_0, q_0), X_m \times Q_m). \tag{5}$$

Пусть $L \subset \Sigma^*$. Множество $\overline{L} = \{s : s \in \Sigma^* \text{ и } \exists t \in \Sigma^*, st \in L\}$ называется *замыканием* L. Для краткости будем обозначать УДСП $\mathcal{G}_c$ его генератором $\mathcal{G}$.

Определение 1. *Супервизор $\mathcal{J}$ называется неблокирующим, если любая строка s, порожденная СДСП (5), может быть дополнена до строки языка, маркированного $\mathcal{G}$:*

$$\overline{L}_c(\mathcal{J}/\mathcal{G})[= \overline{L(\mathcal{J}/\mathcal{G}) \cap L_m(\mathcal{G})}] = L(\mathcal{J}/\mathcal{G}).$$

В противном случае СДСП может быть заблокирован и никогда не выполнить некоторую «задачу».

Определение 2. *Супервизор $\mathcal{J}$ называется безотказным, если*

$$\overline{L}_c(\mathcal{J}/\mathcal{G}) = L_m(\mathcal{J}/\mathcal{G}).$$

Безотказность супервизора гарантирует, что любая строка СДСП может быть не только дополнена до «задачи» $\mathcal{G}$, но также до задачи, маркированной СДСП.

Определение 3. *$\mathcal{J}$ полон относительно $\mathcal{G}_c$, если для всех $s \in \Sigma^*$ и $\sigma \in \Sigma$ из условий*

1. $s \in L(\mathcal{J}/\mathcal{G}_c)$,
2. $s\sigma \in L(\mathcal{G})$ *(т.е. $\delta(s\sigma, q_0)$ определено),*
3. $[\phi \circ \xi(s, x_0)](\sigma) = 1$ *(т.е. σ активировано в $\xi(s, x_0)$)*

следует, что $s\sigma \in L(\mathcal{J}/\mathcal{G}_c)$ (т.е. $\xi(s\sigma, x_0)$ определено).

Полнота супервизора гарантирует, что множество достижимых состояний СДСП представляет собой нечто большее, чем одно лишь начальное состояние, а порождаемый им язык не состоит только из пустой строки.

Таким образом, исследование динамики ДСС сводится к исследованию свойств языка, порождаемого при совместном функционировании объекта управления — генератора (3) — и супервизора (4). Возможность представления конечных автоматов в виде многоосновных алгебраических систем позволяет применить для исследования автоматной формализации ДСС метод логико-алгебраических уравнений.

3. Метод логико-алгебраических уравнений

3.1. Общая многоосновная алгебраическая система

В 1974 году для обеспечения алгоритмического формирования критериев сохранения свойств динамических систем на основе логических методов В.М. Матросов [7] предложил *метод сравнения*, получивший в дальнейшем широкое развитие в его научной школе (Л.Ю. Анапольский, С.Н. Васильев, Р.И. Козлов и др.). Сохранение свойств динамических систем давно представляет значительный интерес для исследователей. Еще с XIX века известна проблема сохранения свойства устойчивости при координатных преобразованиях систем дифференциальных уравнений: устойчивость решения в одних переменных не означает его устойчивости в других переменных (А.М. Ляпунов, 1892). С другой стороны, сохранение свойств при отображениях систем является важной проблемой алгебры. Целый ряд утверждений классической теории моделей устанавливают связь между семантическими и синтаксическими свойствами формул (теорема Лося–Тарского о сохранении свойств экзистенциальных формул при расширениях, теорема Линдона, связывающую монотонность формулы с ее позитивностью, теорема Лося–Тарского–Линдона о сохранении свойств экзистенциальных позитивных формул при гомоморфизмах).

В развитие упомянутых результатов Р. Линдона, а также критериев переносимости термов и соотношений в теории структур Н. Бурбаки [8], С.Н. Васильевым разработан *метод представимости* с приложениями в динамике систем [9]. Для применения метода изучаемую модель динамической системы следует перевести в форму многоосновной алгебраической системы (МАС), а определение изучаемого свойства представить в некотором классе свойств, для которого имеется критерий сохранения. Следует отметить, что алгебраизация динамических систем приводит, как правило, именно к МАС (основными множествами в этом случае выступают пространство состояний, шкала времени и др.), причем их функции и отношения определены не просто на базисных множествах или их декартовых произведениях, а на произвольных ступенях в смысле Н. Бурбаки. К сожалению, задача представимости (эквивалентными преобразованиями) формулы изучаемого свойства в требуемом классе является, вообще говоря, алгоритмически неразрешимой.

Для решения этой проблемы и получения критериев сохранения свойств динамических систем, состоящих из условий, имеющих смысл условий типа сохранения операций или отношений, на стыке динамики систем, алгебры и логики был предложен метод логико-алгебраических уравнений (ЛАУ) [1], который позволяет генерировать условия сохранения свойств многоосновной алгебраической системы при отображениях ее базисных множеств в базисные множества однотипной ей системы. Метод ЛАУ служит для получения критериев сохранения свойств динамических систем, состоящих из условий, формулируемых в духе традиционных морфизмов, однако строящихся при помощи канонических распространений базовых отображений на ступени в смысле Н. Бурбаки. Достоинством метода является гибкость формирования критериев сохранения, т.е. по конкретному виду изучаемого свойства алгоритмически генерируются условия его переноса из одной системы во вторую, изучаемую или вспомогательную систему. Этот факт позволил выделить целые классы формул, описывающих свойства систем, истинностные значения которых сохраняются при отображениях одного типа. При этом утверждения о виде отображений, отвечающих за переносимость свойства, формируются по записи самого свойства, связывая синтаксические и семантические свойства формул, как у Р. Линдона, С. Фефермана, М. Отто.

Для применимости метода изучаемая динамическая система подвергается алгебраизации, т.е. рассматривается как общая многоосновная алгебраическая система конечного типа (ОМАСК)

$$\mathfrak{A} = \langle A, \Omega_F, \Omega_P, \Omega_E \rangle, \tag{6}$$

где $A = \{A_\lambda |\, \lambda = \overline{1,k}\}$ — семейство основных (базисных) множеств, $\Omega_F = \{\mathbf{F}_\beta^{n_\beta} |\, \mathbf{F}_\beta^{n_\beta} : S_{1\beta}[A] \times S_{2\beta}[A] \times \ldots \times S_{n_\beta \beta}[A] \to S_{n_\beta+1,\beta}[A],\ \beta = \overline{1,k_F}\}$ — множество функций, $\Omega_P = \{\mathbf{P}_\gamma^{n_\gamma} |\, \mathbf{P}_\gamma^{n_\gamma} \subseteq T_{1\gamma}[A] \times \ldots \times T_{n_\gamma \gamma}[A],\ \gamma = \overline{1,k_P}\}$ — множество отношений, $\Omega_E = \{\mathbf{E}_\delta |\, \mathbf{E}_\delta \in U_\delta[A],\ \delta = \overline{1,k_E}\}$ — множество выделенных элементов. Элементы множества $\Omega_F \cup \Omega_P \cup \Omega_E$ при этом определяются на ступенях Н. Бурбаки над семейством A, расширенных дополнительной операцией образования последовательностей, введение которой было мотивировано стремлением охватить вопрос сохранения свойств таких динамических систем, как дискретно-событийные системы. Действительно, ДСС в общем виде (1) может рассматриваться как трехосновная алгебраическая система $\mathfrak{A} = \langle A, \Omega_F,\, \Omega_P, \Omega_E \rangle$, в которой $A = \{\mathcal{X}, \mathcal{E}, I\!N\}$, $\Omega_F = \{f_e\}$, $\Omega_P = \{E_v\}$, $\Omega_E = \varnothing$, однако в зависимости от формулировки рассматриваемого свойства это представление может меняться. Подчеркнем тот факт, что для представления фазовых и событийных траекторий ДСС используется ступень, охватывающая операцию формирования множества последовательностей [1].

Как известно, конечный автомат является ярким примером многоосновной алгебраической системы. Определение супервизора, в свою очередь, вкладывается в понятие общей многоосновной алгебраической системы конечного типа. Поэтому для исследования свойств супервизоров может применяться метод логико-алгебраических уравнений.

3.2. Сохранение свойств ОМАСК

Пусть задано семейство отображений

$$\varphi = \{\varphi_\lambda | \varphi_\lambda : A_\lambda \to A'_\lambda, \lambda = \overline{1,k}\}$$

базисных множеств ОМАСК $\mathfrak{A}$ в базисные множества однотипной ей ОМАСК $\mathfrak{A}'$:

$$\mathfrak{A}' = \langle A', \Omega'_F, \Omega'_P, \Omega'_E \rangle, A' = \{A'_\lambda | \lambda = \overline{1,k}\}.$$

Однотипность понимается в том смысле, что мощности множеств A и A', Ω_F и Ω'_F и т.д. соответственно совпадают, а ступень $S'_{1\beta}[A']$(соотв. $S'_{2\beta}[A']$, $T'_\gamma[A']$, $U'_\delta[A']$) образована из множеств A'_λ по той же схеме, что и $S_{1\beta}[A]$ (соотв. $S_{2\beta}[A]$, $T_\gamma[A]$, $U_\delta[A]$) из множеств A_λ.

Изучаемое свойство динамической системы записывается обобщенной позитивной формулой в сигнатуре избранной ОМАСК $\mathfrak{A}$, т.е. представляется формульным предикатом вида $\mathcal{F}(\overline{x}) = \mathcal{F}(x_1, x_2, \ldots, x_p)$, где формула $\mathcal{F}(\overline{x})$ образована из литер (заключительных формул, или з-формул) $\mathcal{F}^\nu$, т.е. из атомарных формул $\mathcal{F}^\nu_+$ или их отрицаний $\mathcal{F}^\nu_-$, с помощью связок &, $\vee$ и типовых кванторов (ТК): $\hat{\omega}_\alpha \overset{df}{=} \forall z_\alpha : Z_\alpha \overset{df}{=} \forall z_\alpha(Z_\alpha \to \sqcup)$ (типовый квантор всеобщности), $\check{\omega}_\alpha \overset{df}{=} \exists z_\alpha : Z_\alpha \overset{df}{=} \exists z_\alpha(Z_\alpha \& \sqcup)$ (типовый квантор существования). Здесь Z_α — так называемые *типовые условия*. Пусть $\mathcal{F}'(\varphi^{|x_1|}(x_1), \ldots, \varphi^{|x_p|}(x_p))$ — свойство системы $\mathfrak{A}'$. Символами $\varphi^{|x_i|}(x_i)$ обозначены канонические распространения отображения (КРО) φ на ступени $|x_i|$, которым принадлежат переменные x_i.

Затем решаются логико-алгебраические уравнения (ЛАУ)

$$\mathcal{R} \& \mathcal{F}(x_1, \ldots, x_p) \to \mathcal{F}'(\varphi^{|x_1|}(x_1), \ldots, \varphi^{|x_p|}(x_p)), \tag{7}$$

$$\mathcal{P} \& \mathcal{F}'(\varphi^{|x_1|}(x_1), \ldots, \varphi^{|x_p|}(x_p)) \to \mathcal{F}(x_1, \ldots, x_p). \tag{8}$$

Условия переносимости в направлении, совпадающем с направлением действия отображений, ищутся как нетривиальное решение ЛАУ (7), а условия переносимости свойства в направлении, противоположном направлению действующих между системами отображений — как нетривиальное решение ЛАУ (8). При этом в логический язык вводятся дополнительные выразительные средства для представления канонических распространений отображений (КРО) основных множеств на ступени Н. Бурбаки. Решение $\mathcal{R}$ (или $\mathcal{P}$) формируется по следующему алгоритму, детальное описание которого представлено в [1].

1. Разделение компонентов сигнатуры и построение формулы $\Psi(\overline{x}) = \Psi(x_1, \ldots, x_p)$, не содержащей функциональных символов в заключительных формулах

2. Генерация условий в терминах канонических распространений отображений (КРО). Обозначим их $\mathcal{R}_1$ для ЛАУ (7) и $\mathcal{P}_1$ для ЛАУ (8).

3. Расщепление получившихся формул на множество условий типа морфизмов. Построение формул $\mathcal{R}$ для ЛАУ (7) и $\mathcal{P}$ для ЛАУ (8).

Получаемое на втором этапе решение — формулы $\mathcal{R}_1$ или $\mathcal{P}_1$ — представляет собой достаточное условие сохранения рассматриваемого формального свойства $\mathcal{F}$. Как правило, эти формулы являются слишком громоздкими, поэтому на этапе 3 они расщепляются на конъюнкции более простых условий. Для получения наиболее простых по синтаксической структуре, и, следовательно, наиболее удобных для интерпретации условий сохранения свойств введено понятие стандартного разбиения формул, генерируемых методом ЛАУ: сначала $\mathcal{R}_1$ «дробится» на куски согласно числу ее з-формул, а затем каждый полученный кусок разбивается на подформулы, отвечающие всем входящим в него кванторам существования. Такое разбиение позволяет получить наиболее простую структуру финальных формул. Это, в свою очередь, позволило выделить классы свойств, за сохранение которых отвечают сходные виды отображений. Формулируются своего рода характеристические теоремы, то есть утверждения о роде отображений, отвечающих за переносимость свойства, формируются по виду записи самого свойства. Затем условия интерпретируются в языке предметной области.

Следует отметить, что именно случай морфизма динамических систем важен, например, для тех процедур исследования устойчивости или других динамических свойств, когда требуется переход к новым переменным, поскольку надо гарантировать эквивалентность исследуемого свойства в старых и новых переменных или хотя бы однонаправленный его перенос [10]. Случай, когда отображения связи являются морфизмами, важен и в связи с решением задач стабилизации программных движений систем с управлением с помощью преобразования этих систем к некоторым эквивалентным каноническим формам [11].

При условии использования стандартного разбиения оказывается возможным уже по виду исходной формулы сделать вывод об условиях ее переносимости, что освобождает от необходимости делать многочисленные выкладки. В частности, установлено, что метод представимости (С.Н. Васильев), заключающийся в записи рассматриваемого свойства в специальном языке многоосновных алгебраических систем и последующим автоматическим получением условий переносимости свойства, является частным случаем метода логико-алгебраических уравнений.

3.3. Сохранение свойств супервизоров

С помощью представленного подхода в [12] проведено исследование ДСС-модели сети железнодорожного транспорта, описываемой уравнениями $(max, +)$–алгебры. На основе интерпретации сгенерированных условий получены условия неухудшаемости свойств расписания движения при добавлении в сеть нового пути. Применим метод ЛАУ для исследования сохранения свойств супервизоров.

Пусть $\mathcal{J} = (\mathcal{S}, \phi)$ — супервизор для $\mathcal{G}$. Рассмотрим свойство безотказности супервизора, которому соответствует формульный предикат

$$\begin{aligned}(9)\qquad & \mathcal{F}_1 = \forall s \in L_c(\mathcal{J}/\mathcal{G}) \quad \exists t \in L_c(\mathcal{J}/\mathcal{G}) \quad (s \cdot t \in L(\mathcal{J}/\mathcal{G}) \quad \& \\ & \& \quad (\xi \times \delta_c)(t, \xi(s, x_0, \delta_c(\phi(\xi(s, x_0)), s, q_0))) \in X_m \times Q_m)\end{aligned}$$

$\mathcal{J}$ рассматривается как общая четырехосновная алгебраическая система конечного типа $\mathfrak{A} = \langle A,\, \Omega_F,\, \Omega_P,\, \Omega_E \rangle$, где

$$A = \{X, Q, \Sigma, \{0, 1\}\},$$

$\Omega_F = \{\delta_c, \xi, \phi, \cdot\}$,

$\Omega_P = \{L(\mathcal{J}/\mathcal{G}), L_c(\mathcal{J}/\mathcal{G}), X_m \times Q_m\}$,

$\Omega_E = \{x_0, q_0\}$.

Пусть $\hat{\mathcal{J}} = (\hat{\mathcal{S}}, \hat{\phi})$ — другой супервизор для $\mathcal{G}$, где

$$\hat{\mathcal{S}} = (\hat{X}, \Sigma, \hat{\xi}, \hat{x}_0, \hat{X}_m), \hat{\phi} : \hat{X} \to \{0,1\}^\Sigma.$$

$\hat{\mathcal{J}}$ отличается от $\mathcal{J}$ множеством состояний $\hat{X}$, что влечет различие множеств $\hat{X}_m$ и X_m, а также функций $\hat{\xi}$ и ξ, $\hat{\phi}$ и ϕ. Поэтому зададим семейство отображений

$$\varphi_1 : X \to \hat{X},\ \varphi_2 : Q \to Q,\ \varphi_3 : \Sigma \to \Sigma,\ \varphi_4 : \{0,1\} \to \{0,1\}.$$

Функции φ_2, φ_3, φ_4 являются тождественными отображениями. Методом ЛАУ с использованием стандартного разбиения были получены условия, при которых $\hat{\mathcal{J}}$ безотказен тогда и только тогда, когда безотказен $\mathcal{J}$.

Теорема 1. *Пусть $\mathcal{J} = (\mathcal{S}, \phi)$ и $\hat{\mathcal{J}} = (\hat{\mathcal{S}}, \hat{\phi})$ — супервизоры для $\mathcal{G}$. Если функция $\pi : X \to \hat{X}$ обладает свойствами*

1. *$\pi(x_0) = \hat{x}_0$ и $\hat{X}_m = \pi(X_m)$,*
2. *$\hat{\xi} \circ (id_\Sigma * \pi)(\sigma, x) = \pi \circ \xi(\sigma, x)$ для всех (σ, x), для которых $\xi(\sigma, x)$ определено,*
3. *$\hat{\phi} \circ \pi = \phi$,*

то $\hat{\mathcal{J}}$ безотказен тогда и только тогда, когда $\mathcal{J}$ безотказнен.

Таким образом, при переходе от одного супервизора для $\mathcal{G}$ к другому, например, имеющему меньшее число состояний, свойство безотказности сохраняется. Для получения утверждений такого рода (сохранение свойств как в направлении действия отображений между системами, так и в обратном направлении) необходимо применить алгоритмы для построения решений обоих ЛАУ (7) и (8). Например, условие $\hat{X}_m = \pi(X_m)$ из пункта 1 является объединением условий $\hat{X}_m \subseteq \pi(X_m)$, получаемого при решении ЛАУ (7), и $X_m \subseteq \pi^{-1}(\hat{X}_m)$, получаемого при решении ЛАУ (8). Условие $\pi(x_0) = \hat{x}_0$ возникает как требование согласования выделенных элементов рассматриваемых систем. Условия 2 и 3 представляют собой стандартное условие сохранения операций системы при гомоморфизме.

Формализованное свойство полноты выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_2 = \forall s \in \Sigma^* \quad \forall \sigma \in \Sigma \quad (s \notin L(\mathcal{J}/\mathcal{G}_c) \quad \vee \quad s \cdot \sigma \notin L(\mathcal{J}) \quad \vee \\ \vee \quad [\phi \circ \xi(s, x_0)](\sigma) \neq 1 \quad \vee \quad s \cdot \sigma \in L(\mathcal{J}/\mathcal{G}_c))\end{aligned} \tag{10}$$

$\mathcal{J}$ рассматривается как ОМАСК $\mathfrak{A} = \langle A,\ \Omega_F,\ \Omega_P,\ \Omega_E\rangle$, где

$A = \{X, Q, \Sigma, \{0,1\}\}$,

$\Omega_F = \{\xi, \phi, \cdot\}$,

$\Omega_P = \{L(\mathcal{J}/\mathcal{G}_c), L(\mathcal{J})\}$,

$\Omega_E = \{x_0, q_0, 1\}$.

Для свойства (10) аналогично получена

Теорема 2. *Пусть* $\mathcal{J} = (\mathcal{S}, \phi)$ *и* $\hat{\mathcal{J}} = (\hat{\mathcal{S}}, \hat{\phi})$ *— супервизоры для* $\mathcal{G}$. *Тогда если функция* $\pi : X \to \hat{X}$ *удовлетворяет условиям*

1. $\pi(x_0) = \hat{x}_0$,
2. $\hat{\xi} \circ (id_\Sigma * \pi)(\sigma, x) = \pi \circ \xi(\sigma, x)$ *для всех* (σ, x), *для которых* $\xi(\sigma, x)$ *определено,*
3. $\hat{\phi} \circ \pi = \phi$,

то из полноты $\mathcal{J}$ *следует полнота* $\hat{\mathcal{J}}$.

Теоремы 1 и 2 налагают более слабые условия на отображения между супервизорами, чем в известных ранее теоремах. Действительно, в [4] функция $\pi : X \to \hat{X}$, обеспечивающая сохранение свойств безотказности и полноты, называется *проекцией* из $\mathcal{J}$ в $\hat{\mathcal{J}}$ при условии, что π является сюръекцией. В нашем случае требование сюръективности на π не накладывается.

4. Заключение

С помощью метода ЛАУ может быть также показано, что исследование дискретно-событийных систем с наблюдаемыми состояниями может быть сведено к исследованию систем, где наблюдаемы только события. Для таких задач уже разработан достаточно эффективный инструментарий, в том числе построения супервизоров, обеспечивающих генерацию максимально возможного управляемого подъязыка как удовлетворение спецификации. Полученные результаты будут применены в исследовании различных задач, в том числе диагностики ДСС и распределенного супервизорного управления.

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты 14-07-00740-а, 14-07-31192-мол-а), а также Программы №15 Президиума РАН.

Список литературы

1. Нагул Н.В. Метод логико-алгебраических уравнений в динамике систем // Алгебра и анализ. 2012. Т. 24, № 4. С. 156-181.
2. Нагул Н.В. К вопросу сохранения свойств многоосновных алгебраических систем // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. 2007. № 6 (56). С. 223-241.
3. Michel A.N., Kaining W.K., Bo H. Qualitative Theory of Dynamical Systems. New York: Marcel Dekker, Inc., 2001.
4. Ramadge P.J., Wonham W.M. Supervisory Control of Class of Discrete Event Processes // SIAM J. Control and Optimisation. 1987. Vol. 25, No. 1. P. 206-230.
5. Moore B.J., Passino K.M. Decentralized Redistribution for Cooperative Patrol // Int. J. Robust Nonlinear Control. 2008. Vol. 18. P. 165-195.
6. Амбарцумян А.А. Супервизорное управление структурированными динамическими дискретно-событийными системами // Автомат. и телемех. 2009. № 8. С. 156–176.
7. Матросов В.М. Метод сравнения в динамике систем. I, II // Диф. уравнения. 1974. Т. 10, № 9; 1975. Т. 11, № 3.
8. Бурбаки Н. Теория множеств. М.: Мир, 1965.
9. Васильев С.Н. Метод представимости в логико-алгебраическом подходе к качественному анализу динамических систем // Оптимизация, управление, интеллект. 2005. № 3 (11). С. 248-254.
10. Журавлев В.Ф. Основы теоретической механики. М.: Физматлит, 2001.

11. Кавинов А.В., Крищенко А.П. Устойчивость решений в разных переменных // Диф.уравнения. 2007. Т. 43. № 11. С. 1470-1473.
12. Нагул Н.В. Сохранение свойств расписания движения в одной модели сети общественного транспорта // Современные технологии, системный анализ, моделирование. 2010. № 4 (28). С. 150-159.