

СВЕЖИЙ ВЗГЛЯД

УДК 004.434

М.В. Голохвастова, А.В. Затонский

ПРОВЕРКА ПРИМЕНИМОСТИ ТЕОРЕМЫ КОЛМОГОРОВА НА СХЕМАХ ГИБЕЛИ И РАЗМНОЖЕНИЯ В GPSS WORLD И ANYLOGIC

Путем имитационного моделирования в разных средах проверена возможность применения теоремы Колмогорова для расчета предельных вероятностей на схемах гибели и размножения при различных вероятностных распределениях потоков. В качестве примеров систем массового обслуживания рассмотрены следующие схемы: многоканальная система с отказами и одноканальная система с ограниченной очередью. По данным схемам написаны программы на языке GPSS в среде GPSS World, а также построены модели в AnyLogic. Произведен теоретический расчет предельных вероятностей систем массового обслуживания типа «гибели и размножения» и их сравнение с экспериментально полученными в программах GPSS World и AnyLogic результатами. Рассчитана средняя погрешность при разных функциях распределений и в разных средах моделирования.

Ключевые слова: уравнения Колмогорова, имитационное моделирование, системы массового обслуживания.

Введение. Моделирование систем массового обслуживания (СМО) важно во многих областях человеческой деятельности. Примерами СМО могут служить бензиновые и газовые заправки автомобилей, аудиторские фирмы, персональные компьютеры, обслуживающие поступающие заявки, телефонные станции и многие другие технические, экономические и социальные системы.

В то же время, в части квалификационных научных работ (диссертаций) использование одних только выводов, полученных при помощи программ имитационного моделирования СМО, считается недостаточным. Так, известный методолог диссертационных исследований Ю.И. Рыжиков считает [1, с. 378], что «идея и техника имитационного моделирования настолько просты, что освоить их можно в считанные дни. Поэтому его применение ... не может считаться подтверждением высокой квалификации диссертанта». В дополнение к программным средствам СМО требуется аналитическое исследование системы. Одним из наиболее распространенных математических инструментов здесь являются уравнения Колмогорова (и множество порожденных аналогичным подходом моделей). Основная идея состоит в том, что ско-

© Голохвастова М.В., Затонский А.В., 2014.

DOI: 10.15350/2221-9552.2014.3-4.00034

рость изменения состояния марковского процесса определяется вероятностями соседних состояний и потоками их изменений:

$$\begin{cases} \frac{dp_i(t)}{dt} = \sum_{j \neq i} \lambda_j p_j(t) \\ \sum_i p_i(t) = 1 \end{cases},$$

где $p_i(t)$, $p_j(t)$ – вероятность нахождения СМО в i -м (j -м) состоянии в момент времени t , λ_j – интенсивность потока событий, приводящего СМО из j -го состояния в i -е ($\lambda_j > 0$) или наоборот ($\lambda_j < 0$). Таким образом можно рассчитать предельные вероятности состояния системы при $\frac{dp_i(t)}{dt} = 0 \forall i$.

Однако очевидно, что не при всех статистических распределениях λ_j уравнения Колмогорова справедливы. Например, рассмотрим простейшую модель «гибели и размножения» в виде одноканальной СМО с ограниченной очередью. В случае, если поток загрузки λ меньше потока разгрузки μ , обозначив $\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1$ из уравнений Колмогорова получим, что вероятность пустой очереди $p_0 = 1 - \rho$ [2, с. 196]. В то же время, при нулевой дисперсии интенсивности потоков загрузки и разгрузки (когда заявки поступают ровно через $\frac{1}{\lambda}$ единиц времени и обрабатываются ровно $\frac{1}{\mu}$ е.в., причем $\frac{1}{\mu} < \frac{1}{\lambda}$) очередь всегда будет пустой. Поэтому вопрос – при каких статистических распределениях интенсивности потоков заявок и их обработки справедливы уравнения Колмогорова – является неоднозначным и практически важным. Несмотря на очевидную необходимость его решения, в литературе (например, [3, 4]) проблема исследования пределов допустимости уравнений Колмогорова и аналогичных математических моделей обычно не рассматривается.

В данной статье сделана попытка экспериментально «поверить» уравнения Колмогорова при помощи принципиально разных сред имитационного моделирования. Произведен теоретический расчет предельных вероятностей состояния СМО «гибели и размножения» и их сравнение с экспериментально полученными в программах *GPSS World* и *AnyLogic* результатами. Так как данные схемы могут быть и с отказами, и с ожиданием (очередью), в качестве примеров были рассмотрены две схемы: многоканальная система с отказами (т.н. задача Эрланга), и одноканальная система с ограниченной очередью.

Многоканальная система. Допустим, существует система, состоящая из трёх каналов, которые обслуживают заявки. Пусть средняя интенсивность потока заявок равна $\lambda = 0,005 \text{ с}^{-1}$, а интенсивность потока обслуживания заявок $\mu = 0,0025 \text{ с}^{-1}$. Эта система имеет четыре состояния: S_0 – состояние системы, при котором все три канала свободны; S_1 – один канал занят; S_2 – два канала заняты; S_3 – три канала заняты. Обозначим $p_0 \dots p_3$ – вероятности состояний $S_0 \dots S_3$ соответственно. Примем начальные условия: $p_0(t) = 1$, $p_i(t) = 0 \forall i = \overline{1,3}$.

Размеченный граф состояний представлен на рис. 1.

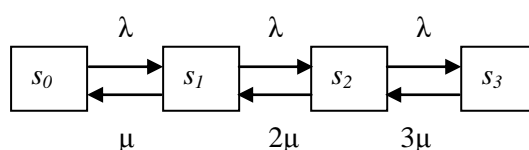


Рис. 1. Размеченный граф состояний для трехканальной системы с отказом

Поток заявок последовательно переводит систему из любого левого состояния в соседнее правое с одной и той же интенсивностью λ . Интенсивность потока обслуживаний, переводящих систему из любого правого состояния в соседнее левое, зависит от состояния (количества каналов, занятых обслуживанием). Например, если СМО находится в состоянии S_2 , то она может перейти в состояние S_1 (один канал занят), когда закончит обслуживание либо первый, либо второй канал, то есть суммарная интенсивность их потоков обслуживаний будет 2μ . Таким образом, согласно теореме Колмогорова, в предельном стационарном режиме система алгебраических уравнений для вероятностей состояний имеет вид:

$$\begin{cases} \lambda \cdot p_0 = \mu \cdot p_1 \\ \lambda \cdot p_1 = 2 \cdot \mu \cdot p_2 \\ \lambda \cdot p_2 = 3 \cdot \mu \cdot p_3 \\ p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = 1 \end{cases}.$$

Следовательно, вероятности $p_0 \dots p_3$ будут равны:

$$p_0 = \left(1 + \frac{\lambda}{\mu} + \frac{\lambda^2}{2! \mu^2} + \frac{\lambda^3}{3! \mu^3} \right)^{-1} = 0.1579, \quad p_1 = \frac{\lambda \cdot p_0}{\mu} = 0.3158, \quad p_2 = \frac{\lambda \cdot p_1}{2 \cdot \mu} = \frac{\lambda^2 \cdot p_0}{2 \cdot \mu^2} = 0.3158, \\ p_3 = \frac{\lambda \cdot p_2}{3 \cdot \mu} = \frac{\lambda^3}{6 \cdot \mu^3} p_0 = 0.2105.$$

Одноканальная система с ожиданием. Пусть имеется одноканальная система, с очередью, ёмкость которой равна трём. Примем те же интенсивности потоков заявок, что и в предыдущем примере. Данная система будет иметь пять возможных состояний: S_0 – канал свободен и очереди нет; S_1 – канал занят и очереди нет; S_2 – канал занят и в очереди находится одна заявка; S_3 – канал занят и в очереди находится две заявки; S_4 – канал занят и очередь полностью занята; $p_0 \dots p_4$ вероятности состояний $S_0 \dots S_4$ соответственно. Начальные условия: $p_0(t) = 1, p_i(t) = 0 \forall i = 1, 4$. Размеченный граф состояний данной СМО аналогичен показанному на рис. 1, только интенсивность потока обслуживаний будет всегда равна μ .

Таким образом, согласно уравнениям Колмогорова, в предельном режиме работы система алгебраических уравнений для вероятностей состояний будет следующей:

$$\begin{cases} p_0 = (1 + \rho + \rho^2 + \rho^3 + \rho^4)^{-1} = 0.5161 \\ p_1 = \rho \cdot p_0 = 0.2581 \\ p_2 = \rho^2 \cdot p_0 = 0.1290 \\ p_3 = \rho^3 \cdot p_0 = 0.06452 \\ p_4 = \rho^4 \cdot p_0 = 0.03226 \end{cases}$$

где $\rho = \frac{\lambda}{\mu} = 0.5$.

Для решения обеих задач написаны программы на языке *GPSS* (англ. *General Purpose Simulation System* – система моделирования общего назначения) в среде *GPSS World* для обоих видов СМО, а также построены схемы в *AnyLogic*. В *GPSS World* есть возможность задавать функции как с помощью библиотеки функции, так и таблично, задавая при этом все точки функции самим [5].

Для того чтобы понять, для каких видов распределений справедливы уравнения Колмогорова, в среде *GPSS World* задавались различные функции непрерывных распределений:

- равномерное (*Uniform*);

- нормальное (*Normal*);
- гамма-распределение (*Gamma*);
- экспоненциальное (*Exponential*);
- вейбулловское (*Weibull*);
- геометрическое (*Geometric*).

Некоторые распределения задавались как вручную, так и с использованием встроенных функций. Полученные результаты приведены в таблице 1, там же для сравнения приведены теоретические результаты, полученные выше. Распределение, помеченное звездочкой – то же распределение, но с измененными параметрами или же заданное без использования встроенных функций, что более подробно описано в выводах статьи.

Ниже представлен листинг программы на *GPSS* для многоканальной системы с отказом:

```

; ===== основной блок =====
kan storage 3 ; 3 канала
generate (Normal(1,200,0.01)) ; вид распределения
gate snf kan,out
enter kan
advance (Normal(1,400,0.01))
leave kan
terminate
out terminate
; ===== поток для подсчета состояний =====
generate 1 ; поток для подсчета
savevalue 1,S$kan ; текущее содержимое storage
test e x1,0,met1 ; если канал пустой, то +1,
; иначе переход на met1
savevalue empty+,1 ; канал пустой
terminate 1
;-----

```

Таблица 1

Сравнение результатов моделирования в *GPSS* с теоретическими выводами

Функция распределения	Многоканальная СМО с отказом				Одноканальная СМО с очередью				
	P_0	P_1	P_2	P_3	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4
По уравнениям Колмогорова	0,1579	0,3158	0,3158	0,2105	0,5161	0,2581	0,1290	0,06452	0,03226
<i>Uniform</i>	0,0244	0,2237	0,6047	0,1689	0,7252	0,2714	0,0003	0,0003	0,0003
<i>Normal</i>	0,0002	0,00029	0,999	0,000089	0,5008	0,4959	0,0004	0,0002	0,0002
<i>Normal*</i>	0,004	0,1775	0,6589	0,1595	0,7501	0,2353	0,0067	0,0049	0,0028
<i>Gamma</i>	0,1587	0,3172	0,3148	0,2083	0,5072	0,2566	0,1342	0,0679	0,0316
<i>Gamma*</i>	0,0469	0,3062	0,4545	0,1922	0,6251	0,3104	0,0498	0,0113	0,0026
<i>Exponential</i>	0,1587	0,3171	0,3148	0,2084	0,5072	0,2566	0,1342	0,0679	0,0316
<i>Exponential*</i>	0,1490	0,3168	0,3186	0,2146	0,5117	0,2549	0,1297	0,0653	0,0358
<i>Weibull</i>	0,1587	0,3171	0,3148	0,2084	0,5072	0,2566	0,1342	0,0679	0,0316
<i>Weibull*</i>	0,0267	0,2898	0,4829	0,2003	0,6903	0,2988	0,0077	0,0003	0,0001
<i>Geometric</i>	0,1527	0,3136	0,3234	0,2090	0,5165	0,2591	0,1275	0,0641	0,0303

```

met1      test e x1,1,met2
savevalue full1+,1 ; занят 1 канал
terminate 1
;-----
met2      test e x1,2,met3
savevalue full2+,1 ; 2 канала заняты
terminate 1
;-----
met3      test e x1,3
savevalue full3+,1 ; все 3 канала заняты
terminate 1
start 1000000

```

В ходе работы программы в переменных *Empty* и *Full1...3* накапливается количество состояний, подсчитываемых специальным потоком (*generate 1*). Для вычисления вероятности состояния достаточно эти количества разделить на их сумму.

Аналогичная программа была написана для одноканальной СМО с ограниченной очередью, изменения коснулись только основного блока:

```

nak       storage 3
generate (Normal(1,200,0.01)) ; вид распределения
gate snf nak,out ; если места нет в очереди, на out
enter nak
seize kan
leave nak
advance (Normal(1,400,0.01))
release kan
terminate
out       terminate

```

Обе схемы были реализованы в *AnyLogic* [6]. Например, модель для одноканальной системы с ограниченной очередью имеет вид (рис. 2):

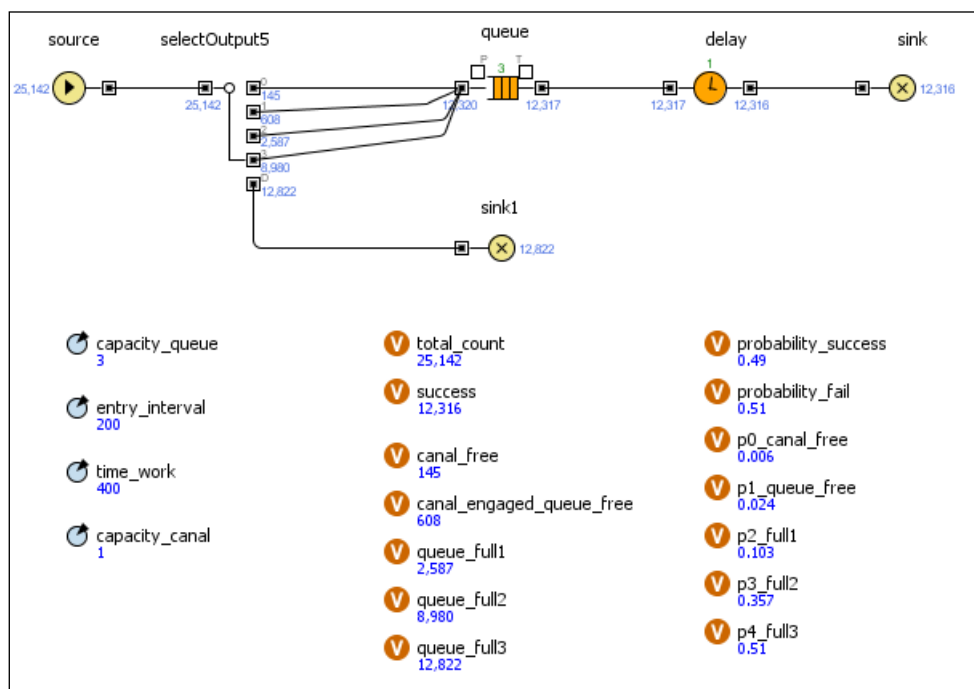


Рис. 2. Схема и полученные вероятности при экспоненциальном распределении для одноканальной системы с ограниченной очередью
Результаты моделирования для разных функций распределений приведены в табл. 2.

Таблица 2

Сравнение результатов моделирования в *AnyLogic* с теоретическими выводами

Функция распределения	Многоканальная СМО с отказом				Одноканальная СМО с очередью				
	p_0	p_1	p_2	p_3	p_0	p_1	p_2	p_3	p_4
По уравнениям Колмогорова	0,1579	0,3158	0,3158	0,2105	0,5161	0,2581	0,1290	0,06452	0,03226
<i>Uniform</i>	0,007	0,523	0,44	0,03	0,501	0,499	3,9E-05	1,9E-05	1,9E-05
<i>Normal</i>	0,00002	0,5	0,5	0	0,5	0,5	0,00004	0,00002	0,00002
<i>Gamma</i>	0,156	0,315	0,317	0,211	0,516	0,259	0,13	0,064	0,031
<i>Gamma*</i>	0,672	0,313	0,015	0,00004	0,499	0,409	0,08	0,01	0,0009
<i>Exponential</i>	0,155	0,318	0,317	0,21	0,516	0,259	0,13	0,064	0,031
<i>Weibull</i>	0,155	0,318	0,317	0,21	0,516	0,259	0,13	0,064	0,031
<i>Weibull*</i>	0,086	0,456	0,384	0,075	0,502	0,474	0,024	0,00032	3,5E-05
<i>Geometric</i>	0,156	0,318	0,316	0,21	0,514	0,257	0,132	0,065	0,032
<i>Erlang</i>	0,155	0,318	0,317	0,21	0,516	0,259	0,13	0,064	0,031
<i>Erlang*</i>	0,138	0,391	0,35	0,12	0,499	0,409	0,08	0,01	0,0009

Рассчитана средняя погрешность при разных функциях распределений и в разных средах моделирования (табл. 3).

Таблица 3

Средняя погрешность моделирования по сравнению с теоретическими выводами согласно уравнениям Колмогорова

Функция распределения	<i>GPSS</i>	<i>AnyLogic</i>
<i>Uniform</i>	63,22%	75,82%
<i>Normal</i>	101,1%	79,26%
<i>Normal*</i>	67,43%	–
<i>Gamma</i>	1,77%	0,88%
<i>Gamma*</i>	44,80%	89,24%
<i>Exponential</i>	1,76%	1,00%
<i>Exponential*</i>	2,62%	–
<i>Weibull</i>	1,76%	1,00%
<i>Weibull*</i>	54,65%	60,34%
<i>Geometric</i>	1,72%	0,77%
<i>Erlang</i>	–	1,00%
<i>Erlang*</i>	–	41,30%

Заключение. Итак, из табл. 3 следует, что полученные по уравнениям Колмогорова результаты совпадают с полученными экспериментально только в двух случаях:

1. Если задано экспоненциальное распределение *Exponential* (при помощи встроенной функции) или *Exponential** (табличная функция *GPSS* наподобие *EXP FUNCTION RN1, C24...*);

2. Если в распределениях *GAMMA(Stream, Locate, Scale, Shape)*, *WEIBULL(Stream, Locate, Scale, Shape)* и т.п. задан параметр *Shape = 1*, определяющий их форму, близкую к экспоненциальному распределению. В таблицах 1-3 названия этих распределений без «звездочки». Наличие «звездочки» означает, что *Shape ≠ 1*.

Следовательно, результаты, рассчитанные с применением теоремы Колмогорова, совпадают только с результатами моделирования в СМО с экспоненциальным распределением вероятности потоков гибели и размножения, и использовать уравнения Колмогорова для объектов, в которых распределения в потоках отличаются от экспоненциального, нельзя.

Библиографический список

1. Рыжиков Ю.И. Работа над диссертацией по техническим наукам. СПб: БХВ-Петербург, 2005. – 496 с.
2. Агальцов В.П., Волдайская И.В. Математические методы в программировании. М.: ИД «ФОРУМ», 2006. – 224 с.
3. Боев В. Д. Исследование адекватности *GPSS WORLD* и *Any Logic* при моделировании дискретно - событийных процессов. Монография. СПб.: ВАС, 2011. – 404 с.
4. Саакян Г. Р. Теория массового обслуживания. Шахты: ЮРГУЭС, 2006. – 27 с.
5. Моделирование непрерывных случайных величин - Имитационное моделирование на *GPSS* [Электронный ресурс] – режим доступа: http://www.codingrus.ru/readarticle.php?article_id=3131.
6. Справка *AnyLogic Advanced*. Функции вероятностных распределений [Электронный ресурс] – режим доступа: <http://www.anylogic.ru/anylogic/help/>.

Статья поступила в редакцию 21.03.2014.

ГОЛОХВАСТОВА Марина Васильевна – студент направления «Информатика и вычислительная техника», Пермский национальный исследовательский политехнический университет (Березниковский филиал).

ЗАТОНСКИЙ Андрей Владимирович – доктор технических наук, профессор, зав. кафедрой автоматизации технологических процессов Пермский национальный исследовательский политехнический университет (Березниковский филиал).

UDC 004.434

M.V. Golokhvastova, A.V. Zatonskiy

**VERIFICATION OF KOLMOGOROV'S THEORY
ON REPRODUCTION AND DEATH PROCESSES IN GPSS WORLD AND ANYLOGIC**

The possibility of using the Kolmogorov's theorem is given for calculating the steady state probabilities on reproduction and death processes with different probability distributions by dint of the simulation in various software environments. The examples of multichannel queuing system without a waiting room and single-channel system with the finite waiting room are described. The programs wrote in GPSS World and models built in AnyLogic are based on these examples. The theoretical calculation of the steady state probabilities queuing systems and their comparison with the experimental results of GPSS World and AnyLogic are derived. The average error is calculated at different functions of distributions and in different environments of modeling.

Keywords: *Kolmogorov's theorem, simulation modeling, queuing system.*