Информационные процессы, Том 14, № 1, 2014, стр. 64–78

Вероятностные характеристики системы $\mathrm{M}_2^{\theta}/\mathrm{G}/1/\mathrm{m}$ с пороговым управлением длительностью обслуживания и интенсивностью входящего потока

Ю. В. Жерновый, К. Ю. Жерновый

Львовский национальный университет им. Ивана Франко, Львов, Украина
Поступила в редколлегию 11.03.2014

Аннотация—Рассмотрена система обслуживания типа $\mathrm{M}_2^{\theta}/\mathrm{G}/1/\mathrm{m}$ с групповым поступлением заявок, в которой применяется пороговый механизм управления длительностью обслуживания и интенсивностью входящего потока. В систему поступают независимые потоки заявок двух типов, один из которых блокируется в режиме перегрузки (во время превышения числа заявок в системе заданного порогового значения h). Полная блокировка входящего потока осуществляется с момента достижения длины очереди числа m до момента начала обслуживания той первой заявки, для которой число заявок в системе не превышает h. С момента начала обслуживания первой заявки во время полной блокировки и до её завершения время обслуживания каждой заявки распределено по закону $\widetilde{F}(x)$ (применяется повышенная интенсивность обслуживания). В остальное время работы системы применяется нормальная интенсивность обслуживания с функцией распределения $F(x)$ времени обслуживания. Найдены преобразования Лапласа для распределения числа заявок в системе на периоде занятости и для функции распределения периода занятости, определена средняя продолжительность периода занятости, получены формулы для стационарного распределения числа заявок в системе, вероятности обслуживания и стационарных характеристик очереди. Полученные результаты проверены с помощью имитационной модели, построенной с привлечением инструментальных средств GPSS World.
КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: система обслуживания, потоки заявок двух типов, групповое поступление заявок, пороговое управление, период занятости, распределение числа заявок.

1. ВВЕДЕНИЕ

Для предотвращения перегрузок в информационно-телекоммуникационных системах используется управление как входящим потоком и его параметрами, так и интенсивностью обслуживания. Согласно [1–3] системы обслуживания с пороговым управлением могут служить адекватными моделями для оценки качества функционирования SIP-серверов в условиях перегрузок.

Исследованию систем обслуживания с пороговыми стратегиями функционирования посвящено большое число публикаций, в частности статьи [4–8]. В большинстве работ рассматриваются одноканальные системы с произвольным распределением времени обслуживания.

В настоящей работе изучена система обслуживания $\mathrm{M}_2^{\theta}/\mathrm{G}/1/\mathrm{m}$ с независимыми потоками заявок двух типов, в которой осуществляется управление не только параметрами этих потоков, а и интенсивностью обслуживания заявок.

Среди упомянутых выше работ наиболее близкие к рассматриваемой системе конструкции систем обслуживания рассмотрены в статьях [4, 5, 8]. В работах [4, 8], как и в настоящей статье, изучены системы с потоками заявок двух типов, а в [5] применяется аналогичный механизм полной блокировки потока заявок и переключения интенсивности обслуживания.

В отличие от [4], в изучаемой нами системе предусмотрено групповое поступление заявок, применяется переключение интенсивности обслуживания и используется другой механизм порогового управления. В отличие от настойщей статьи, в работе [5] не рассматривается режим частичной блокировки входящего потока, а в статье [8] применяется гистерезисный механизм управления интенсивностью входящего потока для многоканальной системы $\mathrm{M}_2^{\mathrm{X}}/\mathrm{M}/\mathrm{n}$.

2. ОПИСАНИЕ СИСТЕМЫ

Систему обслуживания $\mathrm{M}_2^\theta/\mathrm{G}/1/\mathrm{m}$, в которую поступают два независимымых потока групп заявок, формально опишем следующим образом. Пусть заданы последовательности случайных величин $\{\alpha_{1n}\}$, $\{\alpha_{2n}\}$, $\{\theta_n\}$, $\{\beta_n\}$, $\{\widetilde{\beta}_n\}$ $(n \geq 1)$, где α_{in} представляет время между поступлением $(n-1)$–ой и n–ой группы i-го потока $(i = 1,\, 2)$, θ_n — число заявок в n–ой группе, а β_n и $\widetilde{\beta}_n$ — время обслуживания n–ой заявки в нормальном режиме обслуживания и в режиме полной блокировки соответственно. Все перечисленные величины независимы, причём $\mathbf{P}\{\alpha_{in} < x\} = 1 - e^{-\lambda_i x}$ $(\lambda_i > 0;\ i = 1,\, 2)$; $\mathbf{P}\{\theta_n = k\} = a_k$ $(k \geq 1)$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k = 1$; $\mathbf{P}\{\beta_n < x\} = F(x)$ $(x \geq 0)$, $F(0) = 0$ и $\mathbf{P}\{\widetilde{\beta}_n < x\} = \widetilde{F}(x)$ $(x \geq 0)$, $\widetilde{F}(0) = 0$. Если $\mathbf{P}\{\theta_n = 1\} = a_1 = 1$, то заявки в систему поступают по одной (ординарный поток).

Итак, промежутки времени между моментами поступления групп заявок i-го потока — независимые случайные величины, распределённые по показательному закону с параметром λ_i $(i = 1,\, 2)$. В общем потоке, являющимся суперпозицией потоков первого и второго типа, промежутки времени между моментами поступления групп заявок имеют показательное распределение с параметром $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$ [9, с. 83].

Заявки обслуживаются по одной, обслуженная заявка покидает систему, а обслуживающее устройство немедленно начинает обслуживать заявку из очереди при её наличии или же ждёт поступления очередной группы заявок. Применяется дисциплина обслуживания FIFO. Очередь внутри одной группы заявок может быть организована произвольно, поскольку изучаемые нами характеристики не зависят от способа её организации.

Пусть m — максимальное число заявок, которые одновременно могут находиться в очереди. Итак, если в систему, в которой уже находится $k \in [0,\, m+1]$ заявок, поступает группа из θ_n заявок, то только $\min\{\theta_n,\, m+1-k\}$ из них присоединяются к очереди, а остальные теряются.

Используются три режима управления интенсивностью входящего потока: нормальный, режим частичной блокировки и режим полной блокировки. В нормальном режиме в систему допускаются заявки первого и второго потоков, а функция распределения длительности обслуживания каждой заявки равна $F(x)$. В режиме частичной блокировки прекращается приём заявок второго потока, то есть принимаются лишь заявки первого потока, а распределение длительности обслуживания не изменяется. В режиме полной блокировки прекращается приём всех заявок, а длительность обслуживавния заявки распределена по закону $\widetilde{F}(x)$.

Опишем механизм переключения режимов. Пусть h — заданное число $(2 \leq h \leq m-2)$, $\xi(t)$ — число заявок в системе в момент времени t, а t_b — момент начала обслуживания заявки. Если $\xi(t_b) \leq h$, то во время обслуживания данной заявки применяется нормальный режим работы системы. Переключение на режим частичной блокировки осуществляется в момент t_b начала обслуживания той первой заявки, для которой выполняются неравенства $h+1 \leq \xi(t_b) \leq m$. Режим полной блокировки включается с момента достижения длины очереди числа m и длится до момента t_b начала обслуживания той заявки, для которой выполнится равенство $\xi(t_b) = h$. Переключение на режим обслуживания с функцией распределения длительности обслуживания $\widetilde{F}(x)$ осуществляется не в момент начала функционирования режима полной блокировки, а в момент начала обслуживания первой заявки во время действия этого режима.

Ограничения $2 \le h \le m-2$ введены только для того, чтобы не рассматривать случаи, расчётные формулы для которых несколько отличаются от приводимых ниже, и нисколько не умаляют общности полученных результатов.

Для исследования вероятностных характеристик описанной системы обслуживания мы применяем подход, базирующийся на методе потенциала В. С. Королюка [10], который ранее использовался нами, в частности, в работах [5, 6, 11].

3. ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ И ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Обозначим через $\mathbf{P}_n$ условную вероятность при условии, что в начальный момент времени в системе пребывает $n \ge 0$ заявок, и через $\mathbf{E}$ ($\mathbf{P}$) условное математическое ожидание (условную вероятность) при условии, что система начинает работать в момент прибытия первой группы заявок. Будем использовать следующие обозначения: $\eta(x,\lambda)$ — число заявок, поступивших в систему на отрезке времени $[0; x)$ при условии, что промежутки времени между моментами поступления групп заявок показательно распределены с параметром λ; a_i^{k*} — k–кратная свёртка последовательности a_i; $a(s,\, z) = s + \lambda\bigl(1-\alpha(z)\bigr)$; $a_1(s,\, z) = s + \lambda_1\bigl(1-\alpha(z)\bigr)$. Пусть

$$f(s) = \int\limits_0^\infty e^{-sx} dF(x), \qquad \widetilde{f}(s) = \int\limits_0^\infty e^{-sx} d\widetilde{F}(x);$$

$$M = \int\limits_0^\infty x\, dF(x) < \infty; \qquad \widetilde{M} = \int\limits_0^\infty x\, d\widetilde{F}(x) < \infty; \qquad e_a = \sum_{k=1}^\infty k a_k < \infty;$$

$$\overline{F}(x) = 1 - F(x), \qquad \overline{\widetilde{F}}(x) = 1 - \widetilde{F}(x); \qquad \alpha(z) = \sum_{k=0}^\infty z^k a_k;$$

$$\overline{a}_n = \sum_{k=n}^\infty a_k, \qquad \overline{p}_n(s) = \sum_{k=n}^\infty p_k(s), \qquad \overline{q}_n(s) = \sum_{k=n}^\infty q_k(s).$$

Зададим последовательности $p_i(s)$, $p_{1i}(s)$ $(\mathrm{Re}\ s \ge 0)$ в виде

$$\begin{aligned} p_i(s) =& \frac{1}{f(s)} \int\limits_0^\infty e^{-sx}\, \mathbf{P}\{\eta(x,\lambda) = i+1\}\, dF(x) = \frac{1}{f(s)} \sum_{k=0}^{i+1} a_{i+1}^{k*} \int\limits_0^\infty e^{-(\lambda+s)x} \frac{(\lambda x)^k}{k!}\, dF(x); \\ p_{1i}(s) =& \frac{1}{f(s)} \int\limits_0^\infty e^{-sx}\, \mathbf{P}\{\eta(x,\lambda_1) = i+1\}\, dF(x) \\ =& \frac{1}{f(s)} \sum_{k=0}^{i+1} a_{i+1}^{k*} \int\limits_0^\infty e^{-(\lambda_1+s)x} \frac{(\lambda_1 x)^k}{k!}\, dF(x), \qquad i \ge -1. \end{aligned} \tag{1}$$

Последовательности функций $R_k(s)$ и $R_{1k}(s)$ $(k \ge 1)$ определим равенствами

$$\sum_{k=1}^\infty z^k R_k(s) = \frac{z}{f\bigl(a(s,z)\bigr) - z}, \quad |z| < \nu(s); \qquad \sum_{k=1}^\infty z^k R_{1k}(s) = \frac{z}{f\bigl(a_1(s,z)\bigr) - z}, \quad |z| < \nu_1(s), \tag{2}$$

где $\nu(s)$ и $\nu_1(s)$ — единственные на промежутке $[0; 1]$ корни уравнений $f\bigl(a(s,z)\bigr) = z$ и $f\bigl(a_1(s,z)\bigr) = z$ соответственно.

Последовательности $q_i(s)$, $q_{1i}(s)$ $(i \geq 0)$ зададим в виде

$$\begin{aligned} q_i(s) &= \int_0^\infty e^{-sx}\,\mathbf{P}\{\eta(x,\lambda)=i\,\}\,\overline{F}(x)\,dx = \sum_{k=0}^{i} a_i^{k*} \int_0^\infty e^{-(\lambda+s)x}\frac{(\lambda x)^k}{k!}\,\overline{F}(x)\,dx; \\ q_{1i}(s) &= \int_0^\infty e^{-sx}\,\mathbf{P}\{\eta(x,\lambda_1)=i\,\}\,\overline{F}(x)\,dx = \sum_{k=0}^{i} a_i^{k*} \int_0^\infty e^{-(\lambda_1+s)x}\frac{(\lambda_1 x)^k}{k!}\,\overline{F}(x)\,dx. \end{aligned} \tag{3}$$

Введя обозначения

$$\begin{aligned} p_i &= \lim_{s\to+0} p_i(s), \qquad R_i = \lim_{s\to+0} R_i(s), \qquad q_i = \lim_{s\to+0} q_i(s), \\ p_{1i} &= \lim_{s\to+0} p_{1i}(s), \qquad R_{1i} = \lim_{s\to+0} R_{1i}(s), \qquad q_{1i} = \lim_{s\to+0} q_{1i}(s), \end{aligned} \tag{4}$$

с помощью равенств (1)–(4) получим соотношения:

$$\begin{aligned} & p_i = \sum_{k=0}^{i+1} a_{i+1}^{k*} \int_0^\infty e^{-\lambda x}\frac{(\lambda x)^k}{k!}\,dF(x), \quad p_{1i} = \sum_{k=0}^{i+1} a_{i+1}^{k*} \int_0^\infty e^{-\lambda_1 x}\frac{(\lambda_1 x)^k}{k!}\,dF(x), \quad i \geq -1; \\ & R_1 = \frac{1}{p_{-1}}\,, \qquad R_{k+1} = \frac{1}{p_{-1}}\left(R_k - \sum_{i=0}^{k-1} p_i R_{k-i}\right), \qquad k \geq 1; \\ & R_{1,1} = \frac{1}{p_{1,-1}}\,, \qquad R_{1,k+1} = \frac{1}{p_{1,-1}}\left(R_{1k} - \sum_{i=0}^{k-1} p_{1i} R_{1,k-i}\right), \qquad k \geq 1; \\ & q_0 = \frac{1-f(\lambda)}{\lambda}\,, \qquad q_k = \sum_{i=1}^{k} a_i q_{k-i} - \frac{p_{k-1}}{\lambda}\,, \qquad k \geq 1; \\ & q_{1,0} = \frac{1-f(\lambda_1)}{\lambda_1}\,, \qquad q_{1k} = \sum_{i=1}^{k} a_i q_{1,k-i} - \frac{p_{1,k-1}}{\lambda_1}\,, \qquad k \geq 1. \end{aligned} \tag{5}$$

4. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЧИСЛА ЗАЯВОК В СИСТЕМЕ НА ПЕРИОДЕ ЗАНЯТОСТИ

Пусть $\tau(m) = \inf\{\,t \geq 0:\ \xi(t) = 0\,\}$ обозначает первый период занятости для рассматриваемой системы обслуживания и

$$\begin{aligned} \varphi_n(t,\,k) &= \mathbf{P}_n\{\,\xi(t)=k,\ \tau(m) > t\,\}, \qquad 1 \leq n,\, k \leq m+1, \\ \Phi_n(s,\,k) &= \int_0^\infty e^{-st}\varphi_n(t,\,k)\,dt, \qquad \mathrm{Re}\ s > 0. \end{aligned}$$

Введём обозначения:

$$\begin{aligned} g_n(s,k) &= g(s,k)\overline{p}_{m-n}(s) + q_{k-n}(s) + I\{k=m+1\}\overline{q}_{m-n+2}(s), \\ g_{1n}(s,k) &= g(s,k)\overline{p}_{1,m-n}(s) + q_{1,k-n}(s) + I\{k=m+1\}\overline{q}_{1,m-n+2}(s), \\ g(s,k) &= I\{h+1 \leq k \leq m\} f(s)\widetilde{f}^{m-k}(s)\,\frac{1-\widetilde{f}(s)}{s}\,. \end{aligned}$$

Здесь $I\{A\}$ равно 1 либо 0, в зависимости от того, состоялось событие A или нет. Пусть также

$$L_n(s) = p_{h-n}(s) + \widetilde{f}^{m-h}(s)\overline{p}_{m-n}(s) - f(s)\widetilde{f}^{m-h}(s)\sum_{i=h+1-n}^{m-1-n} p_i(s)\sum_{j=1}^{m-n-i} R_{1,j}(s)\overline{p}_{1,m-n-i-j}(s);$$

$$\Delta_h(s,k) = \sum_{i=1}^{h} R_i(s)\biggl(g_i(s,k) + f(s)\sum_{j=h+1-i}^{m-1-i} p_j(s)\biggl(R^{-1}_{1,m-h}(s)R_{1,m-i-j}(s)$$
$$\times\sum_{l=1}^{m-h} R_{1l}(s)g_{1,h+l}(s,k) - \sum_{l=1}^{m-i-j} R_{1l}(s)g_{1,i+j+l}(s,k)\biggr)\biggr);$$

$$\Delta(s) = R_h(s) - f(s)\sum_{i=1}^{h} R_i(s)L_i(s) - f(s)R^{-1}_{1,m-h}(s)\sum_{i=1}^{h} R_i(s)$$
$$\times\sum_{j=h+1-i}^{m-1-i} p_j(s)R_{1,m-i-j}(s)\biggl(1 + f(s)\widetilde{f}^{m-h}(s)\sum_{i=1}^{m-h} R_{1i}(s)\overline{p}_{1,m-h-i}(s)\biggr).$$

Теорема 1. *Для* $1 \le k \le m+1$ *и* $\operatorname{Re} s > 0$ *выполнены равенства*

$$\int_0^\infty e^{-st}\,\mathbf{P}_n\{\,\xi(t) = k,\ \tau(m) > t\,\}\,dt = \biggl(R_{h-n}(s) - f(s)\sum_{i=1}^{h-n} R_i(s)L_{n+i}(s)\biggr)\Phi_h(s,k)$$
$$-\sum_{i=1}^{h-n} R_i(s)\biggl(f(s)\sum_{j=h+1-n-i}^{m-1-n-i} p_j(s)\biggl(\Phi_m(s,k)R_{1,m-n-i-j}(s)$$
$$-\sum_{l=1}^{m-n-i-j} R_{1l}(s)g_{1,n+i+j+l}(s,k)\biggr) + g_{n+i}(s,k)\biggr), \qquad 1 \le n \le h-1; \tag{6}$$

$$\int_0^\infty e^{-st}\,\mathbf{P}_n\{\,\xi(t) = k,\ \tau(m) > t\,\}\,dt = R_{1,m-n}(s)\Phi_m(s,k) - f(s)\widetilde{f}^{m-h}(s)\Phi_h(s,k)$$
$$\times\sum_{i=1}^{m-n} R_{1i}(s)\overline{p}_{1,m-n-i}(s) - \sum_{i=1}^{m-n} R_{1i}(s)g_{1,n+i}(s,k), \qquad h+1 \le n \le m-1,$$

где

$$\Phi_h(s,k) = \frac{\Delta_h(s,k)}{\Delta(s)}, \qquad \Phi_m(s,k) = \frac{1}{R_{1,m-h}(s)}\biggl(\biggl(1 + f(s)\widetilde{f}^{m-h}(s)$$
$$\times\sum_{i=1}^{m-h} R_{1i}(s)\overline{p}_{1,m-h-i}(s)\biggr)\Phi_h(s,k) + \sum_{i=1}^{m-h} R_{1i}(s)g_{1,h+i}(s,k)\biggr). \tag{7}$$

Доказательство. Очевидно, что $\varphi_0(t,\,k) = 0$. Используя формулу полной вероятности, для $1 \le n \le m$ получим соотношения

$$\varphi_n(t,k) = \sum_{i=0}^{m-n}\int_0^t \mathbf{P}\{\eta(x,\lambda(n)) = i\,\}\,\varphi_{n+i-1}(t-x,\,k)\,dF(x)$$
$$+\int_0^t \mathbf{P}\{\eta(x,\lambda(n)) \ge m+1-n\,\}\int_0^{t-x}\mathbf{P}\biggl\{\sum_{i=1}^{m-h}\widetilde{\beta}_i \in dv\biggr\}\varphi_h(t-x-v,\,k)\,dF(x)$$

$$
\begin{aligned}
&+I\{h+1 \le k \le m\} \int_0^t \mathbf{P}\{\eta(x,\lambda(n)) \ge m+1-n\}\mathbf{P}\left\{\sum_{i=1}^{m-k} \widetilde{\beta}_i < t-x \le \sum_{i=1}^{m+1-k} \widetilde{\beta}_i\right\} dF(x) \\
&+\big(\mathbf{P}\{\eta(t,\lambda(n)) = k-n\} + I\{k=m+1\}\mathbf{P}\{\eta(t,\lambda(n)) \ge m+2-n\}\big)\overline{F}(t),
\end{aligned}
\tag{8}
$$

где

$$
\lambda(n) = \begin{cases} \lambda, & 1 \le n \le h; \\ \lambda_1, & h+1 \le n \le m. \end{cases}
$$

Объясним вероятностный смысл слагаемых в правых частях равенств (8). Первое слагаемое соответствует ситуации, когда первое обслуживание завершилось ко времени t (включая t), и за время обслуживания первой заявки длина очереды не превысила $m-1$. Второе слагаемое соответствует ситуации, в которой первое обслуживание завершилось до момента t, и за время обслуживания первой заявки длина очереды достигла m, но после завершения обслуживания первой заявки (в момент x) длина очереди достигла значения $h-1$ перед моментом t. Третье слагаемое соответствует ситуации, в которой первое обслуживание завершилось до момента t, и за время обслуживания первой заявки длина очереды достигла m, а после завершения обслуживания первой заявки длина очереди не уменьшилась до значения $h-1$ перед моментом t.

Последнее слагаемое в (8) соответствует ситуации, в которой первое обслуживание завершилось после времени t. Для того, чтобы это слагаемое не ранялось нулю, необходимо, во-первых, чтобы выполнялось условие $k \ge n$, и, во-вторых, если $n \le k \le m$, то на промежутке $[0;t]$ поступят только $k-n$ заявок, а если $k = m+1$, то на промежутке $[0;t]$ может поступить не менее $m+1-n$ заявок.

Перейдя в равенствах (8) к преобразованиям Лапласа, с помощью соотношений (1)–(3) получаем систему уравнений для определения функций $\Phi_n(s,k)$ $(1 \le n \le m)$

$$
\Phi_n(s,\,k) = f(s)\sum_{i=-1}^{m-n-1} p_i(s)\Phi_{n+i}(s,\,k) + f(s)\widetilde{f}^{m-h}(s)\overline{p}_{m-n}(s)\Phi_h(s,\,k) + g_n(s,\,k),\ 1 \le n \le h; \tag{9}
$$

$$
\begin{aligned}
\Phi_n(s,\,k) = f(s)&\sum_{i=-1}^{m-n-1} p_{1i}(s)\Phi_{n+i}(s,\,k) \\
&+ f(s)\widetilde{f}^{m-h}(s)\overline{p}_{1,m-n}(s)\Phi_h(s,\,k) + g_{1n}(s,\,k), \qquad h+1 \le n \le m,
\end{aligned}
\tag{10}
$$

с граничным условием

$$
\Phi_0(s,\,k) = 0. \tag{11}
$$

Используя лемму 1 работы [6], решения системы уравнений (10) представим в виде

$$
\begin{aligned}
\Phi_n(s,\,k) = R_{1,m-n}(s)\Phi_m(s,\,k) - f(s)\widetilde{f}^{m-h}(s)\Phi_h(s,\,k)&\sum_{i=1}^{m-n} R_{1i}(s)\overline{p}_{1,m-n-i}(s) \\
-\sum_{i=1}^{m-n} R_{1i}(s)g_{1,n+i}(s,k), \qquad h \le n \le m-1.&
\end{aligned}
\tag{12}
$$

С помощью равенств (12) уравнения (9) приводим к виду

$$\Phi_n(s,\,k) = f(s)\sum_{i=-1}^{h-n-1} p_i(s)\Phi_{n+i}(s,\,k) + f(s)L_n(s)\Phi_h(s,\,k) + f(s)\sum_{i=h+1-n}^{m-1-n} p_i(s)$$
$$\times\left(\Phi_m(s,\,k)R_{1,m-n-i}(s) - \sum_{j=1}^{m-n-i} R_{1,j}(s)g_{1,n+i+j}(s,k)\right) + g_n(s,k), \qquad 1\le n\le h,$$

позволяющему снова применить лемму 1 [6] и найти решения этой системы:

$$\Phi_n(s,\,k) = \left(R_{h-n}(s) - f(s)\sum_{i=1}^{h-n} R_i(s)L_{n+i}(s)\right)\Phi_h(s,k) - \sum_{i=1}^{h-n} R_i(s)\Bigg(f(s)\sum_{j=h+1-n-i}^{m-1-n-i} p_j(s)$$
$$\times\left(\Phi_m(s,k)R_{1,m-n-i-j}(s) - \sum_{l=1}^{m-n-i-j} R_{1l}(s)g_{1,n+i+j+l}(s,k)\right) + g_{n+i}(s,k)\Bigg),\ 0\le n\le h-1. \tag{13}$$

Положив в (12) $n=h$, а в (13) $n=0$, с учётом условия (11) получим систему двух линейных уравнений для опеределения $\Phi_h(s,\,k)$ и $\Phi_m(s,\,k)$:

$$\left(1 + f(s)\widetilde{f}^{m-h}(s)\sum_{i=1}^{m-h} R_{1i}(s)\overline{p}_{1,m-h-i}(s)\right)\Phi_h(s,\,k)$$
$$- R_{1,m-h}(s)\Phi_m(s,\,k) = -\sum_{i=1}^{m-h} R_{1i}(s)g_{1,h+i}(s,\,k);$$
$$\left(R_h(s) - f(s)\sum_{i=1}^{h} R_i(s)L_i(s)\right)\Phi_h(s,k) - f(s)\Phi_m(s,k)\sum_{i=1}^{h} R_i(s)\sum_{j=h+1-i}^{m-1-i} p_j(s)R_{1,m-i-j}(s)$$
$$= -f(s)\sum_{i=1}^{h} R_i(s)\sum_{j=h+1-i}^{m-1-i} p_j(s)\sum_{l=1}^{m-i-j} R_{1l}(s)g_{1,i+j+l}(s,k) + \sum_{i=1}^{h} R_i(s)g_i(s,k).$$

Её решения определяются в виде (7), а равенства (6) вытекают из соотношений (12) и (13). Теорема доказана. □

5. ПЕРИОД ЗАНЯТОСТИ И СТАЦИОНАРНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

Если система начинает работать в момент поступления первой группы заявок, то

$$\int_0^\infty e^{-st}\,\mathbf{P}\{\,\xi(t)=k,\ \tau(m)>t\,\}\,dt = \sum_{n=1}^{m} a_n\Phi_n(s,\,k) + \overline{a}_{m+1}\Phi_{m+1}(s,\,k). \tag{14}$$

Поставив цель получения выражения для $\Phi_{m+1}(s,\,k)$, по формуле полной вероятности найдём $\varphi_{m+1}(t,\,k)$:

$$\varphi_{m+1}(t,k) = \int_0^t\int_0^{t-x} \mathbf{P}\left\{\sum_{i=1}^{m-h}\widetilde{\beta}_i\in dv\right\}\varphi_h(t-x-v,\,k)\,d\widetilde{F}(x)$$
$$+I\{h+1\le k\le m\}\int_0^t \mathbf{P}\left\{\sum_{i=1}^{m-k}\widetilde{\beta}_i < t-x \le \sum_{i=1}^{m+1-k}\widetilde{\beta}_i\right\}d\widetilde{F}(x) + I\{k=m+1\}\overline{\widetilde{F}}(t).$$

Преобразование Лапласа от $\varphi_{m+1}(t,\,k)$ представляется в виде

$$\Phi_{m+1}(s,\,k)=\widetilde{f}^{m-h+1}(s)\Phi_h(s,\,k)+I\{h+1\le k\le m+1\}\widetilde{f}^{m-k+1}(s)\,\frac{1-\widetilde{f}(s)}{s}\,. \qquad (15)$$

Используя соотношения (12), (13) и (15), можем подробно расписать равенство (14)

$$\begin{aligned}\int\limits_0^\infty e^{-st}\,\mathbf{P}\{\,\xi(t)=k,\ \tau(m)>t\,\}\,dt&=\Bigg(\sum_{n=1}^{h-1}a_n\Big(R_{h-n}(s)-f(s)\sum_{i=1}^{h-n}R_i(s)L_{n+i}(s)\Big)+a_h\\&-f(s)\widetilde{f}^{m-h}(s)\sum_{n=h+1}^{m-1}a_n\sum_{i=1}^{m-n}R_{1i}(s)\overline{p}_{1,m-n-i}(s)+\overline{a}_{m+1}\widetilde{f}^{m+1-h}(s)\Bigg)\Phi_h(s,\,k)\\&-A(s)\Phi_m(s,\,k)+\sum_{n=1}^{h-1}a_n\sum_{i=1}^{h-n}R_i(s)\Bigg(f(s)\sum_{j=h+1-n-i}^{m-1-n-i}p_j(s)\\&\times\sum_{l=1}^{m-n-i-j}R_{1l}(s)g_{1,n+i+j+l}(s,\,k)-g_{n+i}(s,\,k)\Bigg)-\sum_{n=h+1}^{m-1}a_n\sum_{i=1}^{m-n}R_{1i}(s)g_{1,n+i}(s,\,k)\\&+\overline{a}_{m+1}I\{h+1\le k\le m+1\}\widetilde{f}^{m-k+1}(s)\,\frac{1-\widetilde{f}(s)}{s}\,,\end{aligned} \qquad (16)$$

где

$$A(s)=f(s)\sum_{n=1}^{h-1}a_n\sum_{i=1}^{h-n}R_i(s)\sum_{j=h+1-n-i}^{m-1-n-i}p_j(s)R_{1,m-n-i-j}(s)-\sum_{n=h+1}^{m-1}a_nR_{1,m-n}(s)-a_m.$$

Для определения $\int\limits_0^\infty e^{-st}\,\mathbf{P}\{\,\tau(m)>t\,\}\,dt$ необходимо перейти в равенстве (16) к суммированию по k от 1 до $m+1$. Убедившись, что

$$\begin{aligned}&g_n(s)=\sum_{k=1}^{m+1}g_n(s,\,k)=f(s)\,\frac{1-\widetilde{f}^{m-h}(s)}{s}\,\overline{p}_{m-n}(s)+\frac{1-f(s)}{s}\,;\\&g_{1n}(s)=\sum_{k=1}^{m+1}g_{1n}(s,\,k)=f(s)\,\frac{1-\widetilde{f}^{m-h}(s)}{s}\,\overline{p}_{1,m-n}(s)+\frac{1-f(s)}{s}\,;\\&\Delta_h(s)=\sum_{k=1}^{m+1}\Delta_h(s,\,k)=\sum_{i=1}^{h}R_i(s)\Bigg(g_i(s)+f(s)\sum_{j=h+1-i}^{m-1-i}p_j(s)\Bigg(R^{-1}_{1,m-h}(s)R_{1,m-i-j}(s)\\&\qquad\times\sum_{l=1}^{m-h}R_{1l}(s)g_{1,h+l}(s)-\sum_{l=1}^{m-i-j}R_{1l}(s)g_{1,i+j+l}(s)\Bigg)\Bigg);\qquad\Phi_h(s)=\sum_{k=1}^{m+1}\Phi_h(s,\,k)=\frac{\Delta_h(s)}{\Delta(s)}\,;\\&\Phi_m(s)=\sum_{k=1}^{m+1}\Phi_m(s,\,k)=\frac{1}{R_{1,m-h}(s)}\,\Bigg(\Bigg(1+f(s)\widetilde{f}^{m-h}(s)\sum_{i=1}^{m-h}R_{1i}(s)\overline{p}_{1,m-h-i}(s)\Bigg)\Phi_h(s)\\&\qquad+\sum_{i=1}^{m-h}R_{1i}(s)g_{1,h+i}(s)\Bigg),\end{aligned}$$

из (16) получаем выражение для преобразования Лапласа от функции распределения периода занятости

$$
\begin{aligned}
\int\limits_0^\infty e^{-st}\,\mathbf{P}\{\,\tau(m)>t\,\}\,dt &= \Bigg(\sum_{n=1}^{h-1} a_n\Big(R_{h-n}(s)-f(s)\sum_{i=1}^{h-n}R_i(s)L_{n+i}(s)\Big)+a_h \\
&\quad - f(s)\widetilde{f}^{m-h}(s)\sum_{n=h+1}^{m-1}a_n\sum_{i=1}^{m-n}R_{1i}(s)\overline{p}_{1,m-n-i}(s)+\overline{a}_{m+1}\widetilde{f}^{m+1-h}(s)\Bigg)\Phi_h(s) \\
&\quad - A(s)\Phi_m(s)+\sum_{n=1}^{h-1}a_n\sum_{i=1}^{h-n}R_i(s)\Bigg(f(s)\sum_{j=h+1-n-i}^{m-1-n-i}p_j(s) \\
&\quad\times\sum_{l=1}^{m-n-i-j}R_{1l}(s)g_{1,n+i+j+l}(s)-g_{n+i}(s)\Bigg)-\sum_{n=h+1}^{m-1}a_n\sum_{i=1}^{m-n}R_{1i}(s)g_{1,n+i}(s) \\
&\quad + \overline{a}_{m+1}\,\frac{1-\widetilde{f}^{m+1-h}(s)}{s}\,.
\end{aligned}
\tag{17}
$$

Перейдя в равенстве (17) к пределу при $s\to+0$, получим выражение для средней продолжительности периода занятости изучаемой системы обслуживания. Для вычисления этого предела используем последовательности, определённые равенствами (4), (5), и учтём предельные соотношения

$$
\lim_{s\to+0}\frac{1-f(s)}{s}=M;\qquad \lim_{s\to+0}\frac{1-\widetilde{f}^n(s)}{s}=n\widetilde{M}\quad(n\ge1);\qquad \lim_{s\to+0}\Delta(s)=1;
$$

$$
\lim_{s\to+0}g_n(s)=M+(m-h)\widetilde{M}\overline{p}_{m-n};\qquad \lim_{s\to+0}g_{1n}(s)=M+(m-h)\widetilde{M}\overline{p}_{1,m-n};
$$

$$
A=\lim_{s\to+0}A(s)=\sum_{n=1}^{h-1}a_n\sum_{i=1}^{h-n}R_i\sum_{j=h+1-n-i}^{m-1-n-i}p_jR_{1,m-n-i-j}-\sum_{n=h+1}^{m-1}a_nR_{1,m-n}-a_m\,.
$$

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Теорема 2. *Средняя продолжительность периода занятости системы определяется в виде*

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}\,\tau(m) &= \sum_{i=1}^{h}R_i\Bigg(M+(m-h)\widetilde{M}\overline{p}_{m-i}+R_{1,m-h}^{-1}\sum_{j=h+1-i}^{m-1-i}p_j\Bigg(M\Bigg(R_{1,m-i-j}\sum_{l=1}^{m-h-1}R_{1l} \\
&\quad - R_{1,m-h}\sum_{l=1}^{m-i-j-1}R_{1l}\Bigg)+(m-h)\widetilde{M}(R_{1,m-h}-R_{1,m-i-j})\Bigg)\Bigg) \\
&\quad - C_hAR_{1,m-h}^{-1}+\sum_{n=1}^{h-1}a_n\sum_{i=1}^{h-n}R_i\Bigg(\sum_{j=h+1-n-i}^{m-1-n-i}p_jC_{n+i+j}-M-(m-h)\widetilde{M}\overline{p}_{m-n-i}\Bigg) \\
&\quad - \sum_{n=h+1}^{m-1}a_nC_n+(m+1-h)\widetilde{M}\overline{a}_{m+1},
\end{aligned}
\tag{18}
$$

где

$$
C_n=M\sum_{i=1}^{m-n}R_{1i}+(m-h)\widetilde{M}(R_{1,m-n}-1).
$$

Рассуждая так же, как в работе [11, с. 169–170] и пользуясь узловой теоремой восстановления [12, с. 46], приходим к равенствам

$$\begin{aligned}
&\lim_{t\to\infty}\mathbf{P}\{\,\xi(t)=k\,\}=\frac{\lambda}{1+\lambda\mathbf{E}\,\tau(m)}\int\limits_0^\infty \mathbf{P}\{\,\xi(u)=k,\ \ \tau(m)\ge u\,\}\,du, \qquad 1\le k\le m+1;\\
&\lim_{t\to\infty}\mathbf{P}\{\,\xi(t)=0\,\}=\frac{\lambda}{1+\lambda\mathbf{E}\,\tau(m)}\int\limits_0^\infty \mathbf{P}\{\,\tau(m)<u,\ \ \tau(m)+\xi_1\ge u\,\}\,du.
\end{aligned} \tag{19}$$

Поскольку $\mathbf{P}\{\,\tau(m)<u,\ \ \tau(m)+\xi_1\ge u\,\}=\mathbf{P}\{\,\tau(m)+\xi_1\ge u\,\}-\mathbf{P}\{\,\tau(m)\ge u\,\}$, то

$$\int\limits_0^\infty \mathbf{P}\{\,\tau(m)<u,\ \ \tau(m)+\xi_1\ge u\,\}\,du=\frac{1}{\lambda}\,. \tag{20}$$

Перейдя в равенстве (16) к пределу при $s\to+0$, получим соотношение

$$\begin{aligned}
\int\limits_0^\infty &\mathbf{P}\{\,\xi(t)=k,\ \tau(m)>t\,\}\,dt=\delta_h(k)-AR_{1,m-h}^{-1}\sum_{i=1}^{m-h}R_{1i}\,G_{1,h+i}(k)+\sum_{n=1}^{h-1}a_n\sum_{i=1}^{h-n}R_i\\
&\times\left(\sum_{j=h+1-n-i}^{m-1-n-i}p_j\sum_{l=1}^{m-n-i-j}R_{1l}\,G_{1,n+i+j+l}(k)-G_{n+i}(k)\right)-\sum_{n=h+1}^{m-1}a_n\sum_{i=1}^{m-n}R_{1i}\,G_{1,n+i}(k)\\
&+\widetilde{M}\overline{a}_{m+1}I\{h+1\le k\le m+1\},
\end{aligned} \tag{21}$$

где

$$\begin{aligned}
\delta_h(k)&=\sum_{i=1}^{h}R_i\left(G_i(k)+\sum_{j=h+1-i}^{m-1-i}p_j\left(R_{1,m-h}^{-1}R_{1,m-i-j}\sum_{l=1}^{m-h}R_{1l}G_{1,h+l}(k)\right.\right.\\
&\qquad\left.\left.-\sum_{l=1}^{m-i-j}R_{1l}G_{1,i+j+l}(k)\right)\right);\\
G_i(k)&=q_{k-i}+I\{h+1\le k\le m\}\widetilde{M}\overline{p}_{m-i}+I\{k=m+1\}\overline{q}_{m+2-i};\\
G_{1i}(k)&=q_{1,k-i}+I\{h+1\le k\le m\}\widetilde{M}\overline{p}_{1,m-i}+I\{k=m+1\}\overline{q}_{1,m+2-i}.
\end{aligned}$$

Введём обозначения: $\rho_k(m)=\lim\limits_{t\to\infty}\mathbf{P}\{\,\xi(t)=k\,\},\ \ 0\le k\le m+1;$

$$\begin{aligned}
B_n(k)&=\sum_{i=1}^{h-n}R_iG_{n+i}(k)=\sum_{i=1}^{h-n}R_iq_{k-n-i}+\widetilde{M}\sum_{i=1}^{h-n}R_i\overline{p}_{m-n-i}\,;\\
D_n(k)&=\sum_{i=1}^{m-n}R_{1i}G_{1,n+i}(k)=\sum_{i=1}^{k-n}R_{1i}q_{1,k-n-i}+\widetilde{M}(R_{1,m-n}-1).
\end{aligned}$$

Учитывая соотношения (19), (20) и равенство $\sum\limits_{i=1}^{n}R_{1i}\overline{p}_{1,n-i}=R_{1n}-1$, следующее из (5), с помощью (21) получаем следующее утверждение.

Теорема 3. *Стационарное распределение числа заявок в системе определяется в виде:*

$$\rho_0(m) = \frac{1}{1+\lambda\,\mathbf{E}\,\tau(m)}\,;$$

$$\rho_k(m) = \lambda\rho_0(m)\biggl(\sum_{i=1}^{k} R_i q_{k-i} - \sum_{n=1}^{k-1} a_n \sum_{i=1}^{k-n} R_i q_{k-n-i}\biggr), \qquad 1 \le k \le h;$$

$$\rho_k(m) = \lambda\rho_0(m)\biggl(B_0(k) - \sum_{n=1}^{h-1} a_n B_n(k) + \sum_{i=1}^{h} R_i \sum_{j=h+1-i}^{m-1-i} p_j\bigl(R_{1,m-h}^{-1} R_{1,m-i-j} D_h(k) - D_{i+j}(k)\bigr) - AR_{1,m-h}^{-1} D_h(k) + \sum_{n=1}^{h-1} a_n \sum_{i=1}^{h-n} R_i \sum_{j=h+1-n-i}^{m-1-n-i} p_j D_{n+i+j}(k) - \sum_{n=h+1}^{m-1} a_n D_n(k) + \widetilde{M}\overline{a}_{m+1}\biggr), \qquad h+1 \le k \le m; \tag{22}$$

$$\rho_{m+1}(m) = \lambda\rho_0(m)\biggl(\sum_{i=1}^{h} R_i\biggl(\overline{q}_{m+1-i} + \sum_{j=h+1-i}^{m-1-i} p_j\Bigl(R_{1,m-h}^{-1} R_{1,m-i-j} \sum_{l=1}^{m-h} R_{1l}\,\overline{q}_{1,m+1-h-l} - \sum_{l=1}^{m-i-j} R_{1l}\,\overline{q}_{1,m+1-i-j-l}\Bigr)\biggr) - \sum_{n=h+1}^{m-1} a_n \sum_{i=1}^{m-n} R_{1i}\,\overline{q}_{1,m+1-n-i} - AR_{1,m-h}^{-1} \sum_{i=1}^{m-h} R_{1i}\,\overline{q}_{1,m+1-h-i} + \widetilde{M}\overline{a}_{m+1} + \sum_{n=1}^{h-1} a_n \sum_{i=1}^{h-n} R_i\biggl(\sum_{j=h+1-n-i}^{m-1-n-i} p_j \sum_{l=1}^{m-n-i-j} R_{1l}\,\overline{q}_{1,m+1-n-i-j-l} - \overline{q}_{m+1-n-i}\biggr)\biggr).$$

6. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СТАЦИОНАРНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК

Пользуясь равенством (18), выражение для средней продолжительности периода занятости можно представить в виде $\mathbf{E}\,\tau(m) = MT(m) + \widetilde{M}\widetilde{T}(m)$. Тогда среднее время обслуживания одной заявки найдём по формуле

$$\overline{M} = \frac{\mathbf{E}\,\tau(m)}{T(m)+\widetilde{T}(m)}\,.$$

Формулу для вероятности обслуживания $\mathbf{P}_{\mathrm{sv}}(m)$ получим как отношение среднего числа обслуженных заявок к среднему числу прибывших за единицу времени

$$\mathbf{P}_{\mathrm{sv}}(m) = \frac{\bigl(1-\rho_0(m)\bigr)\bigl(T(m)+\widetilde{T}(m)\bigr)}{\lambda e_a \mathbf{E}\,\tau(m)} = \frac{\rho_0(m)\bigl(T(m)+\widetilde{T}(m)\bigr)}{e_a}\,. \tag{23}$$

Стационарные характеристики очереди — среднюю длину очереди $\mathbf{E}\,Q(m)$ и среднее время ожидания обслуживания $\mathbf{E}\,w(m)$ находим по формулам

$$\mathbf{E}\,Q(m) = \sum_{k=1}^{m} k\rho_{k+1}(m); \qquad \mathbf{E}\,w(m) = \frac{\mathbf{E}\,Q(m)}{\lambda e_a \mathbf{P}_{\mathrm{sv}}(m)}\,. \tag{24}$$

7. ПРИМЕР ВЫЧИСЛЕНИЯ СТАЦИОНАРНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ И ХАРАКТЕРИСТИК СИСТЕМЫ

Предположим, что $m = 9$, $h = 5$, заявки могут прибывать только по одной или по две ($a_1 = 0,75$, $a_2 = 0,25$), $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, время обслуживания в нормальном режиме равномерно распределено на отрезке $[1/3;\, 1]$ со средним значением $M = 2/3$, а распределение времени обслуживания для режима полной блокировки произвольно со средним значением $\widetilde{M} = 1/3$. Тогда средняя продолжительность периода занятости $\mathbf{E}\,\tau(m)$, найденная по формуле (18), составляет 171,518. Во второй строке таблицы 1 представлены вероятности $\rho_k(m)$, вычисленные по формулам (22). В двух нижних строках этой таблицы для сравнения приведены значения соответствующих вероятностей, полученные с помощью системы имитационного моделирования GPSS World [13] для значения времени моделирования $t = 10^6$ и двух разных распределений времени обслуживания в режиме полной блокировки: равномерного распределения на отрезке $[0;\, 2/3]$ (распределение I) и детерминированного значения 1/3 (распределение II) соответственно. Значения стационарных характеристик системы, найденные по формулам (23) и (24), а также вычисленные с помощью GPSS World, приведены в таблице 2.

Таблица 1. Стационарное распределение числа заявок в системе

Число заявок (k)	0	1	2	3	4	5
$\rho_k(m)$ согласно (22)	0,00291	0,00734	0,01676	0,03662	0,07964	0,17297
$\rho_k(m)$ (GPSS World, распр. I)	0,00301	0,00740	0,01709	0,03681	0,07959	0,17320
$\rho_k(m)$ (GPSS World, распр. II)	0,00292	0,00744	0,01718	0,03687	0,08003	0,17284

Число заявок (k)	6	7	8	9	10
$\rho_k(m)$ согласно (22)	0,24521	0,21010	0,14106	0,06553	0,02187
$\rho_k(m)$ (GPSS World, распр. I)	0,24488	0,21026	0,14086	0,06515	0,02175
$\rho_k(m)$ (GPSS World, распр. II)	0,24541	0,20926	0,14080	0,06557	0,02186

Таблица 2. Стационарные характеристики системы

Характеристика	$\mathbf{P}_{\text{sv}}(m)$	$\mathbf{E}\,Q(m)$	$\mathbf{E}\,w(m)$
Аналитическое значение	0,66326	5,21598	3,14566
Значение согл. GPSS World (распр. I)	0,663	5,212	3,143
Значение согл. GPSS World (распр. II)	0,664	5,212	3,142

8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Преимущество предложенного алгоритма вычисления стационарных характеристик состоит в том, что рекуррентные соотношения (5), служащие для определения последовательностей $\{p_k\}$, $\{p_{1k}\}$, $\{q_k\}$, $\{q_{1k}\}$, $\{R_k\}$, $\{R_{1k}\}$, явно не зависят от объёма накопителя m и значения порога h, а зависят только от параметров входящего потока и функции распределения времени обслуживания $F(x)$. Поэтому в случае изменения значений параметров m и h нет необходимости вычислять заново значения этих последовательностей. Отметим, что для рассмотренной системы обслуживания стационарные характеристики не зависят от вида распределения времени обслуживания в режиме блокировки (функции $\widetilde{F}(x)$), а только от среднего значения этого распределения $\widetilde{M}$. Это свойство подтверждается и результатами имитационного моделирования, предствленными в таблицах 1 и 2.

9. ПРИЛОЖЕНИЕ. ПРОГРАММА ДЛЯ GPSS WORLD

```
Lam1 EQU 1        ; значение λ1
Lam2 EQU 1        ; значение λ2
Em EQU 9       ; объём накопителя
AH EQU 5       ; значение порога
PSV VARIABLE N$LB6/(N$LB02)       ; вероятность обслуживания
TSIM EQU 1000000       ; время моделирования
DISTR TABLE (F$KAN+Q$QUE) 0,1,11       ; гистограмма распределения числа заявок
GENERATE 1
TABULATE DISTR       ; вычислять распределение числа заявок
TERMINATE
LB5 GENERATE (Exponential(5,0,(1/Lam1)))       ; показательное распределение с параметром λ1
TRANSFER 750,,LB01       ; задание вероятностей a1 и a2 для первого потока
SPLIT 2,LB01       ; поступление заявок парами
TRANSFER ,OUT
GENERATE (Exponential(5,0,(1/Lam2)))       ; показательное распределение с параметром λ2
TRANSFER 750,,LB02       ; задание вероятностей a1 и a2 для второго потока
SPLIT 2,LB02       ; поступление заявок парами
TRANSFER ,OUT
LB02 TEST L Q$QUE,Em,OUT       ; условие ограничения длины очереди
GATE LS KEY1,LB3       ; включён ли первый ключ блокировки входа?
GATE LS KEY2,LB3       ; включён ли второй ключ блокировки входа?
TRANSFER ,LBQ
LB0 TEST L Q$QUE,Em,OUT       ; условие ограничения длины очереди
GATE LS KEY1,LB3       ; включён ли первый ключ блокировки входа?
LBQ QUEUE QUE       ; занять место в очереди
TEST E Q$QUE,Em,LB2       ; равна ли длина очереди числу m?
SPLIT 1,LB1       ; заблокировать вход
LB2 SEIZE KAN
DEPART QUE
TEST E Q$QUE,(AH-1),LB4       ; равна ли длина очереди h − 1?
LOGIC S KEY1       ; включить первый ключ
LOGIC S KEY2       ; включить второй ключ
ADVANCE (Uniform(5,(1/3),1))   ; равномерное распределение (функция F(x))
TRANSFER ,LB6
LB4 GATE LS KEY1,LB7       ; включён ли первый ключ?
TEST G (F$KAN+Q$QUE),AH,LADV   ; условие переключения на режим частичной блокировки
LOGIC R KEY2       ; выключить второй ключ
LADV ADVANCE (Uniform(5,(1/3),1))
TRANSFER ,LB6
LB7 (Uniform(5,0,(2/3)))   ; равномерное распределение (функция F̃(x))
;LB7 ADVANCE (1/3)   ; случай детерминированного времени обслуживания
LB6 RELEASE KAN
TERMINATE
LB1 LOGIC R KEY1     ; выключить первый ключ
LOGIC R KEY2       ; выключить второй ключ
TERMINATE
```

```
LB3 TERMINATE
OUT TERMINATE
GENERATE ,,,1
LOGIC S KEY1        ; включить первый ключ
LOGIC S KEY2        ; включить второй ключ
TERMINATE
GENERATE TSIM        ; реализовать время моделирования
SAVEVALUE PSV,V$PSV        ; записать вероятность обслуживания
TERMINATE 1
START 1
```

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Абаев П. О., Гайдамака Ю. В., Самуйлов К. Е. Гистерезисное управление сигнальной нагрузкой в сети SIP-серверов. *Вестник Российского университета дружбы народов. Математика. Информатика. Физика*, 2011, № 4, стр. 54–71.

2. Abaev P., Gaidamaka Yu., Samouylov K. Queuing Model for Loss-Based Overload Control in a SIP Server Using a Hysteretic Technique. In: *Lecture Notes in Computer Science*, Heidelberg, Springer-Verlag, 2012, vol. 7469, pp. 371–378.

3. Abaev P., Gaidamaka Yu., Samouylov K. Modeling of Hysteretic Signaling Load Control in Next Generation Networks. In: *Lecture Notes in Computer Science*, Heidelberg, Springer-Verlag, 2012, vol. 7469, pp. 440–452.

4. Печинкин А. В., Разумчик Р. В. Стационарные характеристики системы $M_2|G|1|r$ с гистерезисной политикой управления интенсивностью входящего потока. *Информационные процессы*, 2013, т. 13, № 3, стр. 125–140.

5. Жерновый К. Ю. Исследование системы $M^\theta/G/1/m$ с переключениями режимов обслуживания и восстанавливающей блокировкой потока заявок. *Информационные процессы*, 2011, т. 11, № 2, стр. 203–224.

6. Жерновый К. Ю., Жерновый Ю. В. Система $M^\theta/G/1/m$ с двухпороговой гистерезисной стратегией переключения интенсивности обслуживания. *Информационные процессы*, 2012, т. 12, № 2, стр. 127–140.

7. Zhernovyi Yu.V. Stationary Characteristics of $M^X/M/1$ Systems with Hysteretic Switching of the Service Intensity. *Journal of Communications Technology and Electronics*, 2013, vol. 58, № 6, pp. 613–627.

8. Жерновый Ю. В., Жерновый К. Ю. Стационарные характеристики системы $M_2^X/M/n$ с гистерезисным управлением интенсивностью входящего потока. *Информационные процессы*, 2013, т. 13, № 4, стр. 362–373.

9. Бочаров П. П., Печинкин А. В. *Теория массового обслуживания.* М.: РУДН, 1995.

10. Королюк В. С. *Граничные задачи для сложных пуассоновских процессов.* Киев: Наукова думка, 1975.

11. Жерновый К. Ю. Исследование системы $M^\theta/G/1/m$ с переключениями режимов обслуживания и пороговой блокировкой потока заявок. *Информационные процессы*, 2010, т. 10, № 2, стр. 159-180.

12. Ивченко Г. И., Каштанов В. А., Коваленко И. Н. *Теория массового обслуживания.* М.: Высшая школа, 1982.

13. Боев В. Д. *Моделирование систем. Инструментальные средства GPSS World.* Санкт-Петербург: БХВ-Петербург, 2004.

Probabilistic characteristics of the $M_2^\theta/G/1/m$ queue with threshold control of service time and arrival rate

Zhernovyi Yu. V., Zhernovyi K. Yu.

We consider an $M_2^\theta/G/1/m$ queuing system with arrival of customers batches, which uses a threshold control mechanism of service time and arrival rate. The system receives two independent flows of customers, one of which is blocked in an overload mode (under the condition that the number of customers in the system exceeds a given threshold value h). Complete blocking of the input flow is carried out from the moment when the queue length reaches the number of m until the beginning of the service of the first customer, for which the number of customers in the system does not exceed h. From the beginning of service of the first customer during complete blocking until its ends the time of service of customer is distributed under the law of $\widetilde{F}(x)$ (an increased service rate is used). Rest of the time the system applies the normal service rate with the distribution function $F(x)$ of service time. Laplace transforms for the distributions of the number of customers in the system during the busy period and for the distribution function of the busy period are found. The average duration of the busy period is obtained. Formulas for the stationary distribution of the number of customers in the system, for the probability of service and for the stationary characteristics of the system are established. The obtained results are verified with the help of simulation model constructed with the assistance of GPSS World tools.

KEYWORDS: queueing system, flows of two types of customers, batch arrival of customers, threshold control, busy period, distribution of the number of customers.