МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Омский государственный технический университет»

В. Н. Задорожный

ИМИТАЦИОННОЕ И СТАТИСТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Учебное пособие

*Допущено Учебно-методическим объединением вузов
по университетскому политехническому образованию
в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений,
обучающихся по направлению подготовки
230100 «Информатика и вычислительная техника»*

2-е издание, исправленное и дополненное

Омск
Издательство ОмГТУ
2013

УДК 519.2:004.421.5:004.7(075)
ББК 22.17+32.81я73
З-15

Рецензенты:

А. К. Гуц, д-р физ.-мат. наук, профессор,
зав. каф. кибернетики ОмГУ им. Ф. М. Достоевского;
В. А. Филимонов, д-р техн. наук, профессор,
старший научный сотрудник ОФ ИМ им. С. Л. Соболева СО РАН

Задорожный, В. Н.
З-15 Имитационное и статистическое моделирование : учеб. пособие / В. Н. Задорожный. – 2-е изд., испр. и доп. – Омск : Изд-во ОмГТУ, 2013. – 136 с. : ил.

ISBN 978-5-8149-1461-3

Приводятся основные сведения о методах и средствах имитационного и статистического моделирования систем.

Учебное пособие предназначено для использования при изучении дисциплины «Моделирование систем» и смежных дисциплин студентами, обучающимися по направлениям подготовки «Системный анализ и управление», «Информатика и вычислительная техника».

УДК 519.2:004.421.5:004.7(075)
ББК 22.17+32.81я73

Учебное издание

Задорожный Владимир Николаевич

ИМИТАЦИОННОЕ И СТАТИСТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Учебное пособие

2-е издание, исправленное и дополненное

Редактор *М. А. Болдырева*
Компьютерная верстка *О.Н. Савостеевой*

Сводный темплан 2013 г.
Подписано в печать 18.02.13. Формат 60×84 $^{1}/_{16}$. Бумага офсетная.
Отпечатано на дупликаторе. Усл. печ. л. 8,5. Уч.-изд. л. 8,5.
Тираж 100 экз. Заказ 158.

Издательство ОмГТУ. 644050, г. Омск, пр. Мира, 11; т. 23-02-12
Типография ОмГТУ

ISBN 978-5-8149-1461-3 © ОмГТУ, 2013

ПРЕДИСЛОВИЕ

Учебная дисциплина «Моделирование систем» изучается студентами направления «Информатика и вычислительная техника» профилей подготовки «Автоматизированные системы обработки информации и управления», «Системный анализ и управление», «Информатика и вычислительная техника» с целью усвоения теории и овладения технологиями компьютерного моделирования сложных систем. Вырабатывая индивидуальные практические умения по моделированию, по эффективному решению задач анализа и синтеза информационных и организационно-технических систем, студенты закладывают один из краеугольных камней в фундамент своей будущей профессиональной квалификации.

Теоретическое содержание дисциплины, предусмотренное действующим государственным образовательным стандартом, охватывает две группы вопросов, требующих от студентов усиленной подготовки. К первой из них относятся вопросы, для успешного изучения которых студенту необходимо, как минимум, знать основы теории вероятностей и математической статистики и иметь навыки программирования (на любом языке) или навыки работы с Ms Excel. Эти вопросы относятся к статистическому моделированию и включают построение датчиков псевдослучайных величин, моделирование случайных факторов, расчёт интегралов методом Монте-Карло и статистическое моделирование надёжности. В учебном пособии эти традиционные темы расширены материалом, полученным в соавторстве со студентами, который относится к теории перколяции и к моделированию случайных фракталов.

Другая группа вопросов относится к теме имитационного моделирования (ИМ) систем. Их включение в учебное пособие обусловлено тем, что широко используемая в учебном процессе классическая система имитационного моделирования GPSS/PC в последние годы повсеместно заменяется системой GPSS World, ориентированной на Windows. При этом студенческая версия GPSS World распространяется через Интернет бесплатно. Поэтому в пособии даётся тот минимум рекомендаций, который позволит практически использовать GPSS World в лабораторных работах. Бурным развитием ИМ, и особенно появлением универсального пакета моделирования AnyLogic, сводящего на одну платформу все четыре парадигмы ИМ, обусловлено написание раздела, уточняющего общую концепцию ИМ (гл. 6).

Методам статистического и имитационного моделирования в пособии уделяется больше внимания, чем прочим методам, поскольку они менее прочих методов используются в других дисциплинах направления «Информатика и вычислительная техника». В то же время для всестороннего системного анализа предметов профессиональной деятельности необходимо специальное изучение и использование соответствующих универсальных подходов к моделированию систем и универсальных технологий моделирования. К числу таких подходов и технологий в первую очередь можно отнести статистическое и имитационное моделирование. Вместе с тем, в пособии освещаются и другие вопросы дисциплины «Моделирование систем». Материал пособия основан на известной классической литературе по моделированию систем [1–13] и на методических разработках [14–21]. В данном втором издании лабораторный практикум по ИМ (часть 3) расширен работой 5, посвященной оптимизации сетей массового обслуживания.

ПЕРЕЧЕНЬ СОКРАЩЕНИЙ И ОБОЗНАЧЕНИЙ

БСВ	базовая случайная величина
ИВС	информационно-вычислительная сеть
ИМ	имитационное моделирование
ЛПР	лицо, принимающее решение
м. о.	математическое ожидание
ОДР	область допустимых решений
ПП	переключательный процесс
п. р. в.	плотность распределения вероятностей
с. в.	случайная величина
СеМО	сеть массового обслуживания
СМО	система массового обслуживания
СЧА	стандартный числовой атрибут
УНИРС	учебно-научно-исследовательская работа студентов
ф. р. в.	функция распределения вероятностей
D	детерминированное распределение (в обозначениях Кендалла)
E	распределение Эрланга
G	распределение общего вида
H	гиперэкспоненциальное распределение
HB	ограниченное гиперболическое распределение
M	экспоненциальное распределение
R	равномерное распределение (от нуля)
RT	равномерное распределение (от половины м. о.)

ЧАСТЬ 1. МЕТОДЫ СТАТИСТИЧЕСКОГО И ИМИТАЦИОННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

1. Статистическое моделирование

Применение статистического моделирования широко распространено в задачах анализа и проектирования автоматизированных систем, информационно-вычислительных сетей и других сложных организационно-технических объектов.

Статистическое моделирование – это метод решения вероятностных и детерминированных задач, основанный на эффективном использовании случайных чисел и законов теории вероятностей. Статистическое моделирование эксплуатирует способность современных компьютеров порождать и обрабатывать за короткие промежутки времени огромное количество случайных чисел.

Подавая последовательность случайных чисел на вход исследуемой функции или модели, на её выходе получают преобразованную последовательность случайных величин – *выборку*. При правильной организации подобного статистического эксперимента выборка содержит ценную информацию об исследуемой функции или модели, которую трудно или практически невозможно получить другими способами. Информация извлекается из выборки методами математической статистики (раздел теории вероятностей).

Метод статистического моделирования (синоним этого названия – метод Монте-Карло) позволяет, таким образом, опираясь на строгие законы теории вероятностей, свести широкий класс сложных задач к относительно простым арифметико-логическим преобразованиям выборок. Поэтому такой метод получил весьма широкое распространение. В частности, он почти всегда используется при имитационном моделировании реальных сложных систем.

2. Построение и тестирование датчиков базовой случайной величины

2.1. Датчики БСВ

Базовой случайной величиной (БСВ) в статистическом моделировании называют непрерывную случайную величину z, равномерно распределенную на интервале ($0 \le t \le 1$). Её плотность распределения вероятностей (п. р. в.) задаётся формулой

$$f(t) = 1, \qquad (0 \le t \le 1). \tag{1.1}$$

Математическое ожидание (м. о.) $M(z)$ и дисперсия $D(z)$ базовой случайной величины z имеют следующие значения: $M(z) = ½$ и $D(z) = {}^{1}/_{12}$. Нетрудно определить и начальный момент r-го порядка: $M(z^{r}) = 1/(r + 1)$, ($r = 1, 2, \ldots$).

БСВ моделируются на ЭВМ с помощью программных датчиков БСВ. Датчик БСВ – это программа, выдающая по запросу одно случайное значение БСВ $z \in \{0 \le t \le 1\}$. Путём многократного обращения к датчику БСВ получают выборку независимых случайных значений $z_1, z_2, z_3, \ldots, z_n$.

Программный датчик БСВ обычно вычисляет значения z_1, z_2, z_3, … по какой-либо рекуррентной формуле вида

$$z_{i+1} = f(z_i) \tag{1.2}$$

при заданном стартовом значении z_0.

Заданное значение z_0 полностью определяет посредством формулы (1.2) всю последовательность z_1, z_2, z_3, … , поэтому величину z на выходе датчика БСВ называют *псевдослучайной* величиной. В практическом применении датчиков БСВ статистические свойства псевдослучайной последовательности чисел в широких пределах идентичны свойствам «чисто случайной» последовательности.

Программные датчики БСВ обладают, по сравнению с аппаратными датчиками, следующими достоинствами:

– простотой создания датчиков;

– простотой применения;

– простотой тиражирования датчиков;

– надёжностью;

– быстродействием;

– компактностью;

– высокой точностью достижения необходимых статистических свойств, сравнимой с точностью представления вещественных чисел;

– возможностью повторного воспроизведения, когда это нужно, любой последовательности случайных значений без их предварительного запоминания.

Путём преобразования БСВ можно получать модельные реализации многих других случайных объектов, включая любые непрерывные или дискретные случайные величины (как простые, так и многомерные), случайные события, случайные процессы, графы, схемы и т. д. Поэтому БСВ z называют *базовой* случайной величиной.

2.2. Метод середины квадрата

Метод середины квадрата предложен для получения псевдослучайных чисел по общему правилу (1.2) Д. фон Нейманом в 1946 г. Вот один из вариантов этого метода:

1) возьмём произвольное 4-значное число;

2) возведём полученное 4-значное число в квадрат и, если необходимо, добавим к результату слева нули до восьмизначного числа;

3) возьмём четыре цифры из середины восьмизначного числа в качестве очередного псевдослучайного 4-значного числа;

4) если нужны еще псевдослучайные числа, то вернёмся к 2);

5) конец алгоритма.

Например, если в качестве начального 4-значного числа взять 1994, то из него получается следующая последовательность псевдослучайных чисел: 9760, 2576, 6357, 4114, 9249, 5440, 5936, 2360, 5696, 4444, 7491, 1150, 3225, 4006, 0480, 2304, 3084, 5110, 1121, 2566, ...

Сам по себе метод середины квадрата не получил широкого распространения, так как выдает «больше чем нужно малых значений» [9]. Но использованный в нём принцип применяется во многих, если не во всех, более поздних датчиках БСВ. Этот принцип состоит в вырезании и/или перемешивании нескольких цифр в числовом результате какой-либо простой арифметической операции.

2.3. Мультипликативный конгруэнтный метод

Так называемый мультипликативный конгруэнтный датчик БСВ однозначно задаётся двумя параметрами: *модулем* m и *множителем* k. Обычно эти параметры представляют собой достаточно большие целые числа.

При заданных m, k псевдослучайные числа z_i вычисляются мультипликативным конгруэнтным датчиком по рекуррентной формуле

$$A_i = (k \cdot A_{i-1}) \bmod m, \qquad i = 1, 2, \ldots \tag{1.3}$$
$$z_i = A_i / m,$$

где m – модуль; k – множитель; A_0 – начальное значение; mod – операция вычисления остатка от деления произведения$(k \cdot A_{i-1})$ на m. Заметим, что вычисление остатка от деления эквивалентно выбору младшей цифры частного в системе счисления с основанием m.

Датчик (1.3) дает *периодическую* псевдослучайную последовательность z_1, z_2, …, с длиной периода $T \le m - 1$. Чтобы длина периода T была максимальной, модуль m берут близким к максимальному представимому в компьютере целому числу. Для упрощения операций деления и вычисления остатков в двоичных ЭВМ часто берут $m = 2^n$. Рекомендуется также брать достаточно большой множитель k, причем взаимно простой с m.

В [22] можно найти более подробные рекомендации по выбору параметров датчика. Заметим, однако, что не существует рекомендаций, гарантирующих высокое качество датчиков до того, как будет проведено их специальное тестирование.

В заключение параграфа приведём таблицу параметров датчиков, рекомендуемых в публикациях [2, 9, 10] и в ряде языков программирования (табл. 1.1).

Таблица 1.1

Рекомендуемые параметры датчиков

Источник	Модуль m	Множитель k
Язык моделирования СИМУЛА	2^{35}	5^{16}
Библиотека АЛГОЛ-процедур	2^{35}	5^{15}
Пакеты LLRANDOM, IMSL	$2^{31} - 1$ (простое число)	16807
Язык моделирования SIMSCRIPT	$2^{31} - 1$	63036001
[2, 10]	2^{40}	5^{17}
[10]	2^{36}	5^{15}
[9]	2^{42}	5^{17}

2.4. Тестирование равномерности БСВ

Обозначим равномерное распределение вероятностей на интервале (0, 1) через R[0,1]. Тогда утверждение, что БСВ z имеет распределение R[0,1], можно кратко записать в виде $z \sim$ R[0,1].

С помощью статистических тестов проверяют два свойства датчика БСВ, делающих его точной моделью идеальной математической БСВ: во-первых, проверяют *равномерность распределения* чисел, выдаваемых датчиком на интервале (0, 1), и, во-вторых, их статистическую *независимость*. При этом последовательность псевдослучайных чисел z_i на выходе датчика рассматривают как статистическую выборку.

Проверка равномерности распределения БСВ сводится к построению эмпирических вероятностных характеристик (моментов и распределений) случайной величины (с. в.) z по выборке $z_1, z_2, z_3, \ldots, z_n$ и их сравнению с теоретическими характеристиками распределения R[0,1]. В силу закона больших чисел с ростом длины выборки n эмпирические характеристики должны приближаться к теоретическим. При этом, поскольку компьютер позволяет легко получать выборки весьма большой длины, такое сближение эмпирических и теоретических характеристик можно наблюдать непосредственно, без использования специальных статистических тестов.

В настоящее время, как правило, любые языки программирования и пакеты моделирования содержат встроенные датчики БСВ и необходимость в самостоятельной разработке или тестировании датчиков возникает редко. Так, в Ms Excel имеется функция СЛЧИС**( )**, возвращающая значение БСВ.

Пример 1. Создайте файл «**СлВеличины.xls**». Назовите первый лист **СлВ**. Введите в ячейку **A1** формулу =СЛЧИС( ). Скопируйте её в диапазон **A1:A100**. Вы видите в этом диапазоне выборку из n = 100 значений БСВ. При нажатии на клавишу F9 случайные значения в столбце **A** меняются.

Найдите суммы k-х степеней этих случайных чисел (для k = 1, 2, 3, 4) и поделите эти суммы на 100.

Примечание: сумму кубов (и подобно им – других степеней) чисел диапазона **A1:A100** можно вычислить в любой ячейке листа по формуле =СУММ(A1:A100^3), которую после её набора следует вводить нажатием Ctrl+Shift+Enter. Полученные значения представляют собой эмпирические начальные моменты k-го порядка. Сравните их с теоретическими значениями моментов. Посмотрите, насколько изменяются эмпирические моменты в разных опытах, осуществляемых нажатием клавиши F9. Чтобы удобнее было сравнивать эмпирические и теоретические значения, ограничьте точность их отображения двумя знаками после запятой.

Проведите такой же расчёт при длине выборки, увеличенной на два порядка, т. е. при n = 10 000. Средние отклонения эмпирических моментов от теоретических уменьшатся при этом приблизительно на порядок. Таким образом, с ростом n наблюдается явная сходимость эмпирических моментов псевдослучайной последовательности, выдаваемой в Excel датчиком БСВ, к теоретическим моментам равномерного распределения R[0,1].

Пример 2. На листе **СлВ** рядом со столбцом **А**, содержащим 10 тысяч значений БСВ, запишите в столбце **В** числа 0,0001, 0,0002, … , 1,0000. Это легко сделать, введя два первых числа этой арифметической прогрессии в ячейки **В1** и **В2**, выделив их обе и щёлкнув двойным щелчком мыши по «маркеру заполнения» в правом нижнем углу выделенного диапазона из двух клеток.

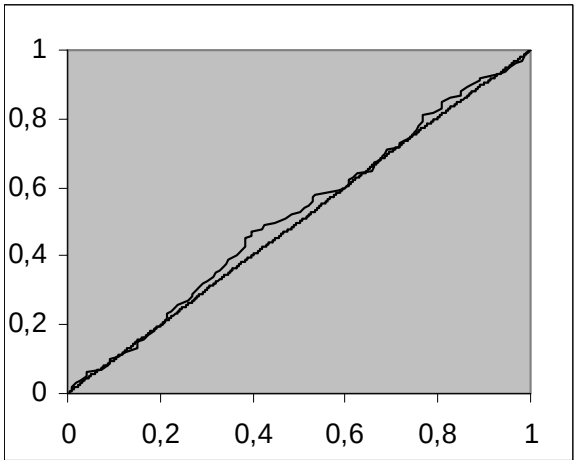


Рис. 1.1. Эмпирические ф. р. в. базовых случайных чисел в Excel

Чтобы построить график эмпирической функции распределения вероятностей (ф. р. в.), остаётся упорядочить случайные числа в столбце **А** по возрастанию. Чтобы после сортировки они не пересчитывались, поступите следующим образом. Скопируйте диапазон **А1:А10000** (в буфер) и снова вставьте на место, но уже посредством меню **…специальная вставка/значения**. После этого отсортируйте диапазон **А1:А10000** по возрастанию. Теперь в диапазоне **А1:В10000** протабулирована эмпирическая ф. р. в.; выделите этот диапазон, выберите в меню мастера диаграмм тип диаграммы «точечная» и посмотрите на полученный график: он будет мало отличаться от графика теоретической ф. р. в., описываемой уравнением $F(t) = t$ $(0 \le t \le 1)$. На рис. 1.1 показаны *две* полученные таким способом эмпирические ф. р. в.: одна получена при длине выборки n = 100 (более искривлённый график), другая – при n = 10 000. Наглядно видна *сходимость* эмпирической ф. р. в. к теоретической ф. р. в. $F(t) = t$ с ростом n. Сохраните файл «**СлВеличины.xls**».

2.5. Тестирование независимости БСВ

Простейшую проверку статистической независимости БСВ можно осуществить, оценивая линейную корреляцию между числами z_i и z_{i+s}, отстоящими друг от друга в псевдослучайной последовательности на фиксированный шаг $s \ge 1$. Для вывода формулы, с помощью которой можно по выборке рассчитать оценку коэффициента корреляции такой пары чисел, рассмотрим теоретическое определение коэффициента корреляции двух произвольных с. в. x и y. Коэффициент корреляции определяется для них формулой

$$R(x, y) = \frac{M(x \cdot y) - M(x) \cdot M(y)}{\sqrt{D(x) \cdot D(y)}}. \qquad (1.4)$$

Если x ~ R[0,1] и y ~ R[0,1], то $M(x) = M(y) = 1/2$ и $D(x) = D(y) = 1/12$, и формула (1.4) принимает следующий вид:

$$R(x,y) = 12 \cdot M(xy) - 3. \qquad (1.5)$$

Условимся рассматривать в выборке всякую пару чисел (z_i, z_{i+s}) как реализацию пары с. в. (x, y). Тогда во всей выборке z_1, z_2, … , z_n имеем следующие n–s реализаций пары (x, y):

$$(z_1, z_{1+s}), \quad (z_2, z_{2+s}), \quad \ldots \quad ,(z_{n-s}, z_n). \tag{1.6}$$

По этим реализациям можно рассчитать оценку $\hat{R}$ коэффициента корреляции $R(x,y)$. Формулу для вычисления оценки $\hat{R}$ можно вывести из равенства (1.5) следующим образом. Заменяя в (1.5) справа м. о. $M(xy)$ соответствующим эмпирическим м. о. (средним арифметическим выборочных значений), а слева – обозначение $R(x,y)$ коэффициента корреляции бозначением $\hat{R}$ его оценки, получаем:

$$\hat{R} = 12\frac{1}{n-s}\left(\sum_{i=1}^{n-s} z_i z_{i+s}\right) - 3. \tag{1.7}$$

Коэффициент корреляции двух с. в. характеризует степень линейной зависимости между ними. Поэтому с ростом длины выборки n оценка $\hat{R}$ должна приближаться к нулю (т. е. должно быть $R(x,y) = 0$, линейная зависимость должна отсутствовать). В противном случае датчик БСВ не отвечает требованию независимости БСВ. В то же время, если $R(x,y) = 0$, то это еще не гарантирует независимости случайных чисел. Но все же один из тестов – тест на *линейную* зависимость – можно считать успешно пройденным.

Следует обратить внимание, что сходимость оценки коэффициента корреляции, как и сходимость оценок м. о. и других эмпирических моментов, относится к классу *сходимостей по вероятности*. Последовательность значений оценки $\hat{R}$ при различных n представляет собой случайный процесс. Значения оценки $\hat{R}$ с ростом n спонтанно то растут, то уменьшаются. Стабильно уменьшается лишь *вероятность* того, что отклонение $\left|\hat{R} - R(x,y)\right|$ оценки $\hat{R}$ от предельного точного значения $R(x,y)$ превзойдёт заданную (любую) фиксированную величину. При этом $\hat{R}$ и оценки других моментов, как правило, сходятся ещё и *в среднем*, причём с ростом n среднее отклонение оценки (по абсолютной величине) от точного предельного значения $R(x,y)$ убывает пропорционально $\sqrt{n}$.

Проверить независимость БСВ в Ms Excel можно также с помощью имеющегося в нём пакета анализа данных.

Пример 3. Откройте файл «**СлВеличины.xls**», созданный при выполнении примеров 1 и 2. Перейдите на новый лист и назовите его **Выборка**. Введите в ячейку **A1** формулу =СЛЧИС(). Скопируйте её на диапазон **A1:B10000**. Нажмите несколько раз ключ F9, чтобы убедиться в правильном пересчёте полученных столбцов случайных чисел.

Коэффициент корреляции между двумя числами в строках диапазона можно вычислить с помощью меню **Сервис/Анализ данных/корреляция**, выдающего диалоговое окно «Корреляция» (если опция **Анализ данных** отсутствует,

то нужно вначале в **Сервис/Надстройки…** выбрать пункт **Пакет анализа** и нажать **ОК)**. В диалоговом окне «Корреляция» укажите входной интервал A1:B10000, выберите группирование («радиокнопочку») **по столбцам** и укажите любой выходной интервал размером 3×3 ячейки (или его верхнюю левую ячейку). Нажмите **ОК**. В указанном вами выходном диапазоне ячеек листа появятся результаты анализа коэффициентов корреляции. Оценка корреляции между числами первого и второго столбца будет находиться в пределах 0,01 или немногим более. Пересчитайте случайные числа по ключу F9 и повторите опыт. Проделайте это несколько раз. Результат анализа всегда будет лежать в указанных пределах и иметь разные знаки. Усредняя результаты всех опытов, получаем близкий к нулю результат и приходим к выводу, что базовые случайные числа не коррелируют.

К более мощным тестам, проверяющим наличие равномерности и независимости, относятся:

– тест «гиперкубов» на равномерность заполнения N-мерных кубов точками с координатами $(z_1, \dots, z_N)$, $(z_{N+1}, \dots, z_{2N})$, … , описанный в [2, 22];

– тест «серий» на длину подпоследовательностей (например, на длину серий чисел z_i, которые начинаются одинаковой цифрой) [2];

– тест «максимумов и минимумов» и другие.

При $N = 2$ смысл теста «гиперкубов» можно наглядно продемонстрировать в Ms Excel.

Пример 4. На листе **Выборка**, полученном в примере 3, выделите диапазон **A1:B5000** и в мастере диаграмм выберите тип диаграммы Точечная, вид диаграммы без линий (составляемой только из маркеров). Нажмите **Готово**. Из-за большого числа маркеров на полученной диаграмме они получаются плохо различимыми. Поэтому щёлкните правой кнопкой мыши по маркерам и выберите в контекстном меню опцию **Формат рядов данных…** . В диалоговом окне на вкладке Вид выберите размер маркера 2 пт и тип маркера – в виде маленького кружка. Нажмите **ОК**. Диаграмма приобретёт приблизительно такой вид, как на рис. 1.2.

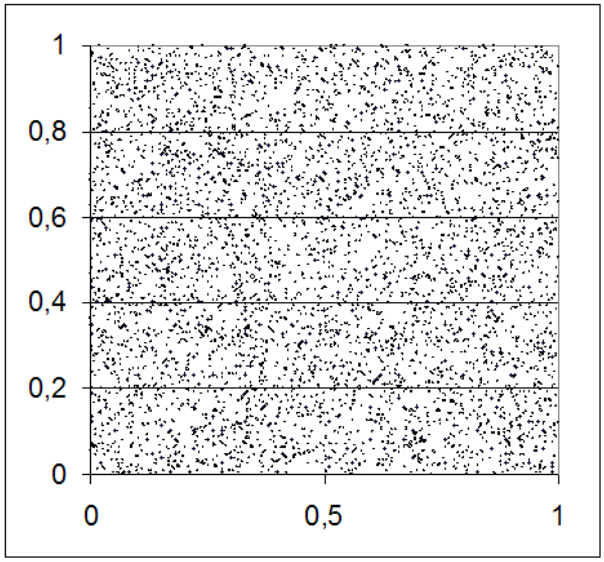


Рис. 1.2. Распределение случайных точек в единичном квадрате

Каждая точка диаграммы имеет пару координат, взятую из строки диапазона **A1:B5000**. Видно, что точки распределены в единичном квадрате случайно и плотность распределения равномерная. Видно также, что точки не сгущаются вдоль каких-либо линий, что говорит об отсутствии видимых зависимостей между ними. В общем случае тест гиперкубов, частным случаем которого является тест

квадратов, использует для проверки свойств равномерности распределения и независимости БСВ количественные статистические критерии. Нажмите несколько раз F9 и понаблюдайте, как при случайном выпадении точек проявляются равномерность их распределения и отсутствие видимых связей между ними. Сохраните файл.

2.6. Противоречивость требований к программным датчикам БСВ

В настоящее время существуют десятки специальных методов тестирования программных датчиков БСВ. При необходимости глубже изучить этот вопрос можно воспользоваться работами [2, 16, 22]. Однако прежде чем серьёзно углубляться в тестирование датчиков, следует заметить, что проблема их тестирования имеет в целом не математическую природу, и вопрос о приемлемости любого программного датчика не имеет безупречного (с позиций «чистой математики») решения.

Так, для БСВ z_i на выходе мультипликативного конгруэнтного датчика (1.3) наличие свойств равномерности и независимости не может быть доказано *в принципе*, поскольку этих свойств у БСВ z_i просто нет. Числа z_i в (1.3) не имеют равномерной п. р. в. (1.1), поскольку дискретны и, как любые дискретные с. в., не имеют ни равномерной, ни вообще какой-либо другой п. р. в. Кроме того, числа z_i в (1.3) всегда зависимы: зависимость между ними дается самой формулой (1.3), из которой следует, что

$$z_i = \left[(km \cdot z_{i-1}) \bmod m\right] / m\,, \tag{1.8}$$

т. е. что каждое следующее значение БСВ однозначно определяется предыдущим. Причём при $s = T$, где T – период последовательности, пара чисел z_i и z_{i+s} связана простой линейной зависимостью $z_i = z_{i+s}$.

Но при тестировании независимости БСВ z_i мы как бы «забываем», что в действительности зависимость имеет место изначально, причём зависимость эта максимально жёсткая, полностью детерминированная. Понятно, что такое наше тестирование независимости может установить не независимость БСВ, а лишь некоторое ее подобие. Однако парадокс состоит в том, что в широких пределах применения датчиков это подобие оказывается весьма близким к тождеству: дискретная и детерминированная величина оказывается весьма близкой к нужной нам непрерывной и случайной величине. При компьютерном моделировании противоположности сходятся.

Как явная дискретность БСВ z_i, так и явная их функциональная зависимость логически несовместимы с требованиями непрерывности и независимости, но на практике это имеет ограниченное значение – не большее, чем, например, значение неточности выполнения арифметических операций с плавающей точкой. В то же время сделанное здесь замечание о противоречивом характере требований к датчикам БСВ указывает на некоторые «подводные камни» статистического моделирования, на важность хорошего знания основ теории вероятностей и на необходимость применения только тех датчиков БСВ, которые разработаны и тщательно выверены компьютерными математиками-профессионалами.

3. Моделирование случайных факторов

Случайными факторами будем называть случайное событие, случайную величину, случайный процесс и вообще любые объекты, случайный выбор которых определяется соответствующими вероятностями. Под реализацией случайного фактора будем понимать сам акт случайного выбора одного такого объекта из заданного множества, наделённого вероятностной мерой.

Построение модели любого случайного фактора сводится к подходящему функциональному преобразованию базовых случайных величин z_i. При моделировании случайных факторов будем исходить из того, что имеющийся в нашем распоряжении датчик БСВ идеален, т. е. величины z_i на его выходе – равномерно распределённые ($z_i \sim R[0,1]$) и независимые. Это позволит нам свободно конструировать модели разнообразных случайных факторов и устанавливать их свойства, опираясь только на положения теории вероятностей и не прибегая к громоздким процедурам статистического тестирования.

В то же время в целях наглядности представления результатов будем модели случайных факторов иллюстрировать примерами простой статистической обработки выборок, получаемых с помощью этих моделей.

3.1. Моделирование случайных событий и дискретных случайных величин

3.1.1. *Моделирование случайных событий*

Пусть задано некоторое множество элементарных исходов $\{A_1, \dots, A_n\}$ с их вероятностями $p_1, \dots, p_n$ соответственно ($p_1 + \dots + p_n = 1$).

Чтобы построить программную модель, «оживляющую» такую совокупность исходов, разобьём мысленно интервал значений БСВ ($0 \le t \le 1$) на n отрезков длиной $p_1, p_2, \dots, p_n$. Это всегда возможно, так как $p_1 + \dots + p_n = 1$. Например, можно определить отрезки так:

$$\begin{aligned} &\alpha_1 = (0,\ p_1), \\ &\alpha_2 = (p_1,\ \ p_1 + p_2), \\ &\alpha_3 = (p_1 + p_2,\ \ p_1 + p_2 + p_3), \\ &\dots\dots\dots\dots \\ &\alpha_n = (p_1 + p_2 + \dots + p_{n-1},\ 1). \end{aligned} \tag{1.9}$$

Алгоритм моделирования случайных исходов A_j состоит в том, чтобы, обратившись к датчику БСВ, определить, в какой из интервалов $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ попало значение БСВ. Факт его попадания в конкретный интервал α_j предопределяет переход алгоритма к процедуре имитации соответствующего, имеющего тот же номер, исхода A_j. Поскольку вероятность попадания БСВ в интервал α_j равна его длине p_j, то и вероятность исхода A_j будет равна p_j.

Пример 5. На свободном листе Ms Excel в ячейку **A1** введите формулу =СЛЧИС(). В соседнюю ячейку **B1** введите =ЕСЛИ(A1<0,5;0;1). Эта формула выдаёт 0, если БСВ в ячейке **A1** находится между 0 и 0,5, и выдаёт 1, если БСВ

в ячейке **A1** находится между 0,5 и 1. Таким образом, в ячейке **B1** имитируется результат выбрасывания монеты. Нажмите несколько раз клавишу F9.

Скопируйте содержимое строки **A1:B1** в диапазон **A1:B20**. Правым щелчком мыши выделите столбец **A** и выберите в открывшемся контекстном меню опцию Скрыть. Оставшийся видимым столбец **B** имитирует результат выбрасывания 20 монет. Положим, единица в столбце **B** означает выпадение герба. Промоделируйте несколько выбрасываний 20 монет нажатием ключа F9. Выделите диапазон **B1:B20**, чтобы на нижней серой индикаторной панели листа увидеть сумму этого диапазона, равную числу выпавших единиц (гербов). Повторяя нажатия F9, проверьте, часто ли происходит случайное событие, определяемое следующим высказыванием: «Число выпавших гербов меньше 7».

3.1.2. *Моделирование дискретных случайных величин*

Принцип моделирования дискретных с. в. не отличается от принципа моделирования случайных событий. Дискретная с. в. x задаётся конечным или счётным множеством возможных значений x_1, x_2, ... и их вероятностями p_1, p_2, ... Она реализуется по тому же принципу, по которому моделируются случайные события. Интервал (0, 1) предварительно разбивается на отрезки, длины которых равны вероятностям $p_1, p_2, \ldots$ элементарных исходов A_j. При этом каждый конкретный исход A_j рассматривается здесь как выбор случайной величиной соответствующего значения $x = x_j$.

В двух частных случаях этот общий алгоритм реализации дискретной с. в. целесообразно упростить.

Первый случай – это случай целочисленной с. в. x, принимающей значения 0, 1, ... , n–1 с одинаковыми вероятностями, равными $1/n$. Такую дискретную с. в. можно получить с помощью БСВ z одним оператором присваивания, реализующим формулу вычисления целой части:

$$x = \lfloor n \cdot z \rfloor. \tag{1.10}$$

Формулу (1.10) можно легко приспособить и к другим близким ситуациям. Например, для моделирования игральной кости с числом очков x от 1 до 6 можно результат её выбрасывания проимитировать по формуле

$$x = \lfloor 6 \cdot z \rfloor + 1. \tag{1.11}$$

Второй случай, когда алгоритм реализации дискретной с. в. следует упрощать, это случай дискретной с. в. с бесконечным (счётным) множеством возможных значений. В такой ситуации часто можно построить компактную программу, лишь применяя рекурсивный вариант общего метода. Суть проблемы состоит в том, что перед программированием алгоритма разбить интервал (0, 1) на бесконечное число вероятностных отрезков с длинами p_1, p_2, ... невозможно. Поэтому в программе сначала реализуется значение БСВ z, а затем выполняется построение и одновременно – проверка вероятностных отрезков интервала (0, 1), по одному (последовательно, одного за другим), до тех пор, пока не будет построен и проверен отрезок, в котором при его проверке обнаружится реализованное значение БСВ z. После этого случайной величине x присваивается соответствующее найденному отрезку значение x_j. Благодаря такому последова-

тельному построению и просмотру вероятностных отрезков для реализации любого значения x_j приходится строить лишь конечное их число. Конкретный пример использования этого метода для реализации пуассоновской с. в. приводится в [16].

Пример 6. Пусть требуется реализовать дискретную с. в. x, принимающую значения 2; 5; 15; –30 и 3,14 с вероятностями 0,1; 0,15; 0,45; 0,2 и 0,1 соответственно. Если отрезки с длинами, равными перечисленным вероятностям, откладывать на числовой оси вправо от нуля, то их правыми границами будут точки 0,1; 0,25; 0,7; 0,9 и 1. Запишите на чистом листе Ms Excel в диапазоне **B1:F2** табличку чисел:

0,1	0,25	0,7	0,9	1
2	5	15	–30	3,14

В ячейку **A3** для получения БСВ введите формулу =СЛЧИС(). Теперь для реализации датчика нужной дискретной с. в. остаётся определить, между какими границами, указанными в верхней строке таблички, попадает значение БСВ, и выбрать соответствующее значение с. в. из нижней строки таблички.

Поскольку в Excel подобные условные операции организуются не самым очевидным образом, приведём подробную инструкцию, поясняющую, как это сделать.

В ячейку **B3** введите формулу =ЕСЛИ(($A3<B$1)*($A3>A$1);1;0). Эта формула выдаёт 1, если значение ячейки **A3** (это БСВ) находится в первом вероятностном отрезке, указанном ячейками **A1** и **B1**, т. е. от 0 до 0,1 (ячейка **A1** должна быть пустой). Скопируйте **B3** вправо на диапазон **B3:F3**. В нём появляется строка из нулей и одной единицы, указывающей своим положением на то значение из таблички вверху, которое должно быть выбрано в качестве реализации с. в. x. Автоматический выбор этого значения организуйте в ячейке **G3**. Для этого запишите в неё формулу =СУММПРОИЗВ($B$2:$F$2;B3:F3). Нажимая ключ F9, убедитесь, что в **G3** теперь появляются случайные значения нашей дискретной с. в.

Теперь скопируйте строку **A3:G3** вниз на 10–20 строк, выделите и скройте столбцы **A-F**. Оставшийся видимым столбец **G** содержит только выборку значений заданной дискретной с. в. По ключу F9 эти значения обновляются.

3.1.3. *Встроенные генераторы случайных величин*

Многие пакеты и языки моделирования имеют встроенные генераторы различных дискретных и непрерывных с. в. Их использование имеет определённые достоинства и недостатки, с которыми целесообразно ознакомиться до принятия решения о том, нужно ли разрабатывать собственный датчик.

В Ms Excel в меню **Сервис/Анализ данных/Генерация случайных чисел** предоставляется возможность генерации выборок из следующего списка распределений: Равномерное, Нормальное, Бернулли, Биномиальное, Пуассона, Модельное и Дискретное. Рекомендуется поэкспериментировать с этими генераторами, так как они достаточно удобны в использовании. Их недостаток состоит лишь в том, что для обновления выборок требуется повторно проходить меню.

3.2. Моделирование непрерывных случайных величин

Для построения датчиков непрерывных с. в., имеющих заданное распределение вероятностей, разработано большое число алгоритмов [2, 6–15]. В современной учебной литературе по моделированию методы построения датчиков непрерывных с. в. наиболее полно разбираются в книге [8]. Основные методы реализации непрерывных с. в. разъясняются также в [16]. Вместе с тем, во многих языках и пакетах моделирования имеется большое число удобных для использования встроенных датчиков непрерывных с. в.

С учётом сказанного ниже приводятся лишь алгоритмы и формулы для реализации наиболее часто встречающихся непрерывных с. в. и некоторые примеры их реализации на Excel.

3.2.1. *Моделирование равномерной случайной величины*

С. в. $x \sim \mathrm{R}[A, B]$, равномерно распределённую на интервале $A \le t \le B$, можно реализовать путём линейного преобразования БСВ z:

$$x = (B - A)\cdot z + A. \qquad (1.12)$$

При этом из (1.12) получаем

$$M(x) = A + (B - A)/2, \qquad (1.13)$$

$$D(x) = (B - A)^2/12. \qquad (1.14)$$

3.2.2. *Моделирование экспоненциальной случайной величины*

Экспоненциальная с. в. x имеет ф. р. в.

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t}, \qquad (1.15)$$

где $t \ge 0$, параметр $\lambda > 0$. Её м. о. и дисперсия

$$M(x) = 1/\lambda, \quad D(x) = 1/\lambda^2. \qquad (1.16)$$

Экспоненциальную с. в. можно реализовать с помощью следующего преобразования БСВ z:

$$x = -(1/\lambda)\cdot\ln(z). \qquad (1.17)$$

<u>Пример 7</u>. На чистом листе Ms Excel в диапазоне **A1:A1000** с помощью функции =СЛЧИС() создайте выборку из 1000 значений БСВ. Полагая $\lambda = 1$, в соответствии с (1.17) запишите в ячейке **B1** формулу =–Ln(A1). Двойным щелчком по маркеру заполнения скопируйте её в диапазон **B1:B1000**. В этом диапазоне получена выборка с. в. x с экспоненциальным распределением (1.15) при $\lambda = 1$.

Проверьте вид распределения полученной с. в. путём построения её эмпирической ф. р. в. Для этого скопируйте диапазон **B1:B1000** в буфер и вставьте в **C1** посредством меню ...**Специальная вставка/значения**, после чего отсортируйте диапазон **C1:C1000** по возрастанию. В ячейки диапазона **D1:D1000** запишите арифметическую прогрессию 0,001, 0,002, ... , 1,000 и постройте диаграмму Точечная по диапазону **C1:D1000**, как в п. 2.4. Диаграмма будет выглядеть примерно как на рис. 1.3 («дрожащая» кривая линия, фрагмент которой справа увеличен).

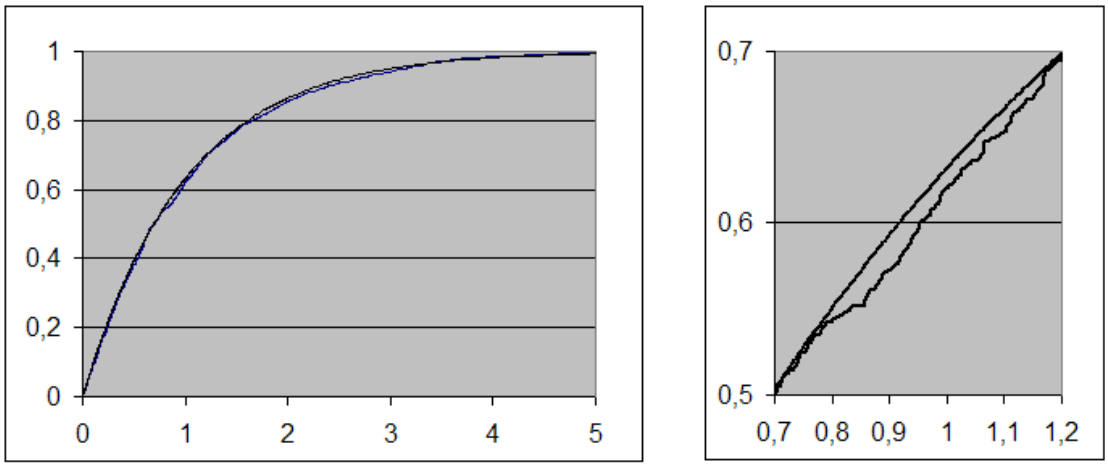


Рис. 1.3. Сравнение эмпирической и теоретической ф. р. в. экспоненциальной с. в.

Гладкую теоретическую кривую, приведенную на рис. 1.3, можно добавить к вашей диаграмме, если в ячейку **E1** ввести формулу (1.15) для вычисления теоретического значения ф. р. в. в виде =1-exp(-C1); затем её надо скопировать на весь диапазон **E1:E1000**. Добавление этого диапазона данных к диаграмме производится через контекстное меню диаграммы **Исходные данные.../Ряд/ Добавить**.

3.2.3. *Моделирование эрланговской случайной величины*

Эрланговская с.в. x порядка $k \geq 1$ имеет ф. р. в.

$$F(t) = 1 - \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(\lambda t)^i}{i!} \cdot e^{-\lambda t}, \qquad t \geq 0, \tag{1.18}$$

и п. р. в.

$$f(t) = \frac{\lambda(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} \cdot e^{-\lambda t}, \qquad t \geq 0, \tag{1.19}$$

где параметр $\lambda > 0$. Её м. о., дисперсия и начальные моменты r-го порядка таковы:

$$M(x) = k/\lambda, \qquad D(x) = k/\lambda^2, \qquad M(x^r) = k(k+1) \cdots (k+r-1)/\lambda^r. \tag{1.20}$$

Поскольку распределением Эрланга обладает сумма k независимых экспоненциальных с. в., имеющих одно и то же значение параметра λ, то, с учётом (1.17), сгенерировать эрланговскую с. в. x можно просто как сумму:

$$x = \sum_{i=1}^{k} -\frac{1}{\lambda} \ln z_i = -\frac{1}{\lambda} \ln(z_1 \ldots z_k), \tag{1.21}$$

где z_i ($i = 1, ..., k$) – независимые реализации БСВ.

3.2.4. *Моделирование нормальной случайной величины*

Утверждение, что некоторая с. в. x имеет нормальное распределение с м. о. $M(x) = \mu$ и дисперсией $D(x) = \sigma^2$, записывают в виде $x \sim N(\mu, \sigma)$. П. р. в. этой с. в.

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}. \qquad (1.22)$$

Её ф. р. в. $F(t)$ не выражается в элементарных функциях в виде конечной формулы. Для реализации любой нормальной с. в. достаточно иметь датчик стандартной (т. е. нормированной и центрированной) нормальной с. в. $\dot{x} \sim N(0,1)$. Чтобы реализовать с. в. x с распределением (1.22) используют следующее линейное преобразование стандартной нормальной с. в. $\dot{x}$:

$$x = \sigma\dot{x} + \mu. \qquad (1.23)$$

При этом стандартную нормальную с. в. часто реализуют приближённо, как сумму других с. в., основываясь на центральной предельной теореме теории вероятностей. Например, её можно реализовать в виде такой суммы двенадцати независимых значений БСВ:

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^{12} z_i - 6. \qquad (1.24)$$

Однако такой подход даёт плохое приближение для больших уклонений от среднего, превышающих 2σ.

Метод Бокса и Мюллера позволяет получить два независимых значения $\dot{x}_1$ и $\dot{x}_2$ стандартной нормальной с. в. из двух независимых значений z_1 и z_2 БСВ по формулам:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \sqrt{-2\ln z_1}\,\sin(2\pi z_2), \\ \dot{x}_2 = \sqrt{-2\ln z_1}\,\cos(2\pi z_2). \end{cases} \qquad (1.25)$$

Этот метод точный, но считается трудоёмким [8]. Однако, как показывают эксперименты, это мнение устарело ввиду того, что современные персональные компьютеры оснащены арифметическими сопроцессорами. Точный метод (1.25) в действительности оказывается также и более быстрым, чем приближённый метод (1.24).

Приведём ещё формулу для чётных начальных моментов r-го порядка с. в. $\dot{x}$:

$$M(\dot{x}^{2k}) = (2k-1)!! = (2k-1)\cdot(2k-3)\cdot \ldots \cdot 1. \qquad (1.26)$$

Все её моменты нечётного порядка равны нулю.

3.2.5. *Применение гистограмм и полигонов*

В [22] приводятся алгоритмы реализации тех с. в., у которых п. р. в. имеют форму гистограммы (рис. 1.4, *а*) или полигона (рис. 1.4, *б*). Такие п. р. в. появляются обычно либо как результат обработки эмпирических данных, либо как результат аппроксимации теоретических распределений. Общая площадь, заключённая внутри гистограммы или полигона, равна единице (свойство п. р. в.).

Реализацию с. в. по заданной гистограмме можно осуществить путём случайного выбора номера интервала постоянства п. р. в. (вероятность каждого такого интервала гистограммы равна площади построенного на нём прямоугольника) и последующей реализации на этом интервале равномерной с. в.

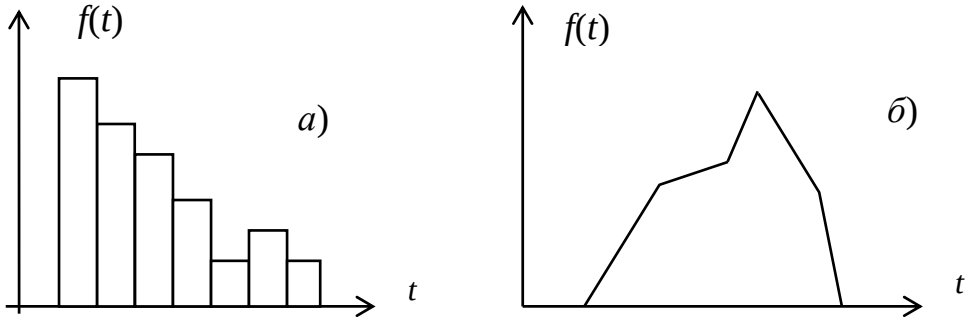


Рис. 1.4. Гистограмма (*а*) и полигон (*б*)

Если п. р. в. $f(t)$ задана в виде полигона, то можно перейти от неё к ф. р. в. $F(t)$ и разыграть с. в. x методом обращения [16]. Поскольку $F(t)$ является интегралом от п. р. в.:

$$F(t) = \int_{-\infty}^{t} f(s)ds, \tag{1.27}$$

то здесь $F(t)$ представляет собой кусочно-квадратичную зависимость, и её график агрегируется из отрезков разных параболических дуг. Тем не менее из непрерывности $f(t)$ следует, что график функции $F(t)$ – гладкий, без изломов. Построенный методом обращения этой ф. р. в. генератор с. в. x должен содержать процедуру, которая по разыгранному значению БСВ z определяет на оси ординат графика $F(t)$ тот интервал значений, на который проецируется одна из агрегированных дуг и в который попало значение z. После этого x можно вычислить как значение обратной от z функции

$$x = F^{-1}(z) \tag{1.28}$$

по квадратному уравнению этого отрезка дуги.

Пример 8. Предположим, график $f(t)$ представляет собой две боковые стороны равнобедренного треугольника с основанием на отрезке (0, 2). Из равенства площади треугольника единице следует, что его высота равна 1. Из (1.27) по этой $f(t)$ определяем:

$$F(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ t^2/2, & 0 \le t < 1, \\ 2t - t^2/2 - 1, & 1 \le t < 2, \\ 1, & 2 \le t. \end{cases} \tag{1.29}$$

Применение к этой ф. р. в. обращения (1.28) приводит к следующей комбинированной формуле для генерации x:

$$x = \begin{cases} \sqrt{2z}, & z < 1/2, \\ 2 - \sqrt{2 - 2z}, & 1/2 \le z. \end{cases} \tag{1.30}$$

В связи с рассмотренным примером заметим, что описанную в нём «треугольную» п. р. в. имеет также сумма двух независимых БСВ. Следовательно, вместо (1.30) для генерации x можно использовать более простую формулу $x = z_1 + z_2$.

Это наблюдение позволяет предположить, что для генерации с. в., которые задаются кусочно-линейными п. р. в. – полигонами, можно найти метод, более эффективный, чем метод обращения, если использовать суммирование равномерных или кусочно-равномерных случайных величин. По всей видимости, наряду с операцией суммирования в этом методе целесообразно было бы использовать операцию случайного выбора (т. н. смешивание) случайных величин.

Проверку этого предположения оставляем читателю.

3.3. Моделирование случайных процессов

Всякий случайный процесс – дискретный или непрерывный – моделируют последовательностью с. в., которые генерируются либо как статистически независимые, либо как взаимозависимые величины. При этом применяют разные способы реализации зависимости между с. в. Чаще всего, поскольку модель всегда имеет какой-либо «физический смысл», способ реализации зависимости между с. в. определяется причинно-следственными связями, действующими в моделируемой системе. Во многих случаях идеализация и упрощение моделируемых причинно-следственных отношений приводит к типичным математическим схемам описания случайных процессов. К числу таких типичных математических схем относятся Марковские процессы, Гауссовы процессы, Броуновское движение, случайное блуждание на прямой и др. [23, 24].

Свойства процессов, описываемых подобными схемами, хорошо изучены методами теории вероятностей. Но в тех случаях, когда в отношении этих процессов решаются задачи, отличающиеся от классических задач, или когда сами исследуемые процессы не вписываются в изученные математические схемы, используют статистическое моделирование. В качестве примера такого статистического моделирования рассмотрим моделирование Броуновского движения.

3.3.1. Броуновское движение на неограниченной плоскости

Процесс Броуновского движения на плоскости можно приближённо представить в виде последовательности случайных перемещений точечной частицы, выполняемых в дискретные моменты времени $t = 0, 1, 2, \ldots$.

Будем полагать, что в момент $t = 0$ частица находится в начале системы координат. Перемещение частицы в любой из следующих моментов времени реализуется выбором случайного направления в пределах от 0 до 2π радиан и смещением частицы в этом направлении на шаг единичной длины.

Модель такого Броуновского движения легко можно реализовать средствами Ms Excel.

Пример 9. Откройте чистый лист Excel, введите в ячейки **A1**, **B1** и **C1** три заголовка *Угол*, *X*, *Y* и под ними (соответственно в ячейках **A2**:**C3**) введите формулы:

Угол	*X*	*Y*
=2*ПИ()*СЛЧИС()	=COS(A2)	=SIN(A2)
=2*ПИ()*СЛЧИС()	=B2+COS(A3)	=C2+SIN(A3)

Нетрудно видеть, что непосредственно под заголовками полученной таблички вычисляется положение частицы в момент времени $t = 0$. В первой ко-

лонке реализуется случайное направление вектора перемещения частицы, во второй – абсцисса конца вектора (имеющего единичную длину), в третьей – его ордината. Последняя строка таблички – **A3:C3** – формирует следующее положение частицы (в момент времени t = 1), определяемое расчётом смещения частицы относительно предыдущего положения (сформированного в ячейках **B2** и **C2**). Эту строку **A3:C3** можно копировать вниз. Скопируйте её до 1001-й строки листа. В результате в колонках **B** и **C** появляется последовательность из 1000 положений (координат) частицы, совершающей Броуновское движение на плоскости.

Выделите диапазон **B2:C1001** и постройте по нему диаграмму типа Точечная вида Диаграмма со значениями, соединёнными отрезками без маркеров. Реализуйте несколько независимых Броуновских движений посредством нажатия клавиши F9. На рис. 1.5 показаны три реализации Броуновского процесса, полученные описанным способом.

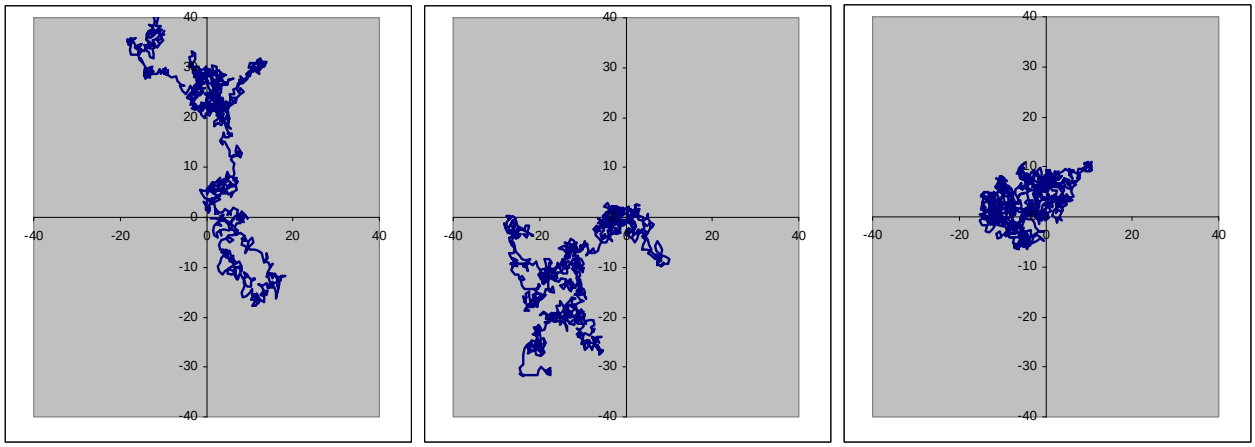


Рис. 1.5. Реализации Броуновского движения на плоскости

Оцените на глаз расстояние, на которое частица удаляется от своего начального положения за 1000 шагов. Теоретически оно в среднем должно быть примерно равно квадратному корню из числа шагов (т. е. составлять около 32 единиц).

3.3.2. Броуновское движение в замкнутой области

При исследовании Броуновского движения, в котором нужно учитывать какие-либо ограничивающие факторы, аналитические методы математики оказываются малоэффективными. Статистическое моделирование позволяет учитывать подобные факторы без особого труда.

Пример 10. На рис. 1.6 приведена траектория Броуновского движения в кольце, полученного путём небольшой модификации модели, рассмотренной в п. 3.2.1. Справа на рис. 1.6 показан увеличенный фрагмент этой же траектории частицы. Модель Броуновского движения в кольце отличается от модели Броуновского движения на неограниченной плоскости только тем, что посредством условного оператора =ЕСЛИ… выполняется проверка, не выходит ли новое случайное положение частицы за пределы кольца, и если выходит, то расчётные координаты определяются как координаты «отражения» частицы от достигнутой границы кольца. Выполните самостоятельно указанную несложную модификацию модели Броуновского движения на плоскости.

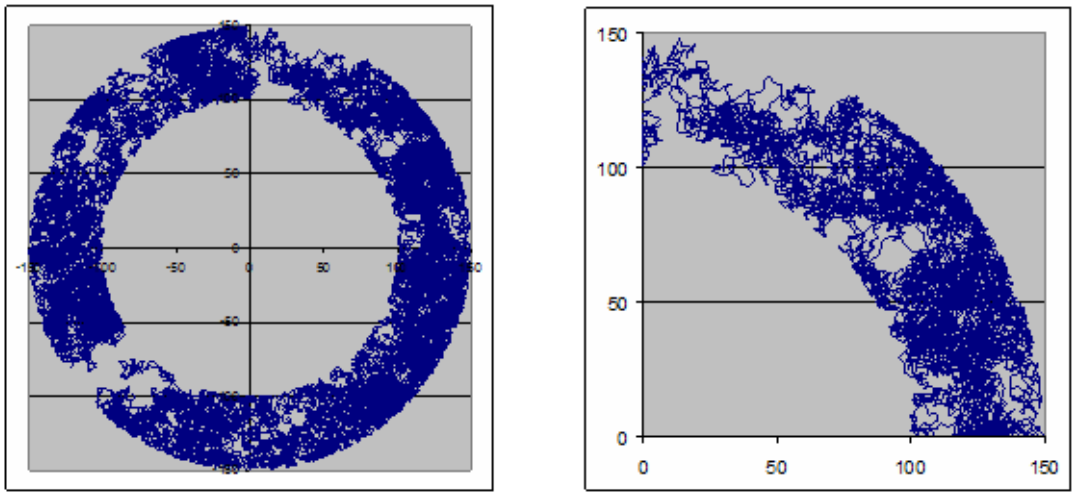


Рис. 1.6. Реализация Броуновского движения в кольце

При необходимости нетрудно ввести в модель и другие дополнительные факторы – мембраны и фильтры, влияющие на перемещение частицы, анизотропию направлений, удлиняющую смещение от центра по сравнению со смещением к центру (этим способом можно промоделировать вращающиеся цилиндры сепаратора) и т. д.

3.3.3. Фрактальные пейзажи

В математическом эссе [25] приводится обзор результатов относительно новой математической теории, основанной на теории множеств и теории размерностей, которая позволяет простыми средствами описывать и исследовать большое число пространственных (геометрических) закономерностей структурирования живой и неживой материи. В основе этой теории лежит понятие фрактала – множества точек, обладающего свойством наглядного или абстрактного (рис. 1.7) «самоподобия» (масштабной инвариантности) и характеризуемого наряду с обычной целой (Евклидовой) размерностью дробной размерностью Хаусдорфа – Безиковича.

Броуновское движение представляет собой одну из разновидностей фракталов.

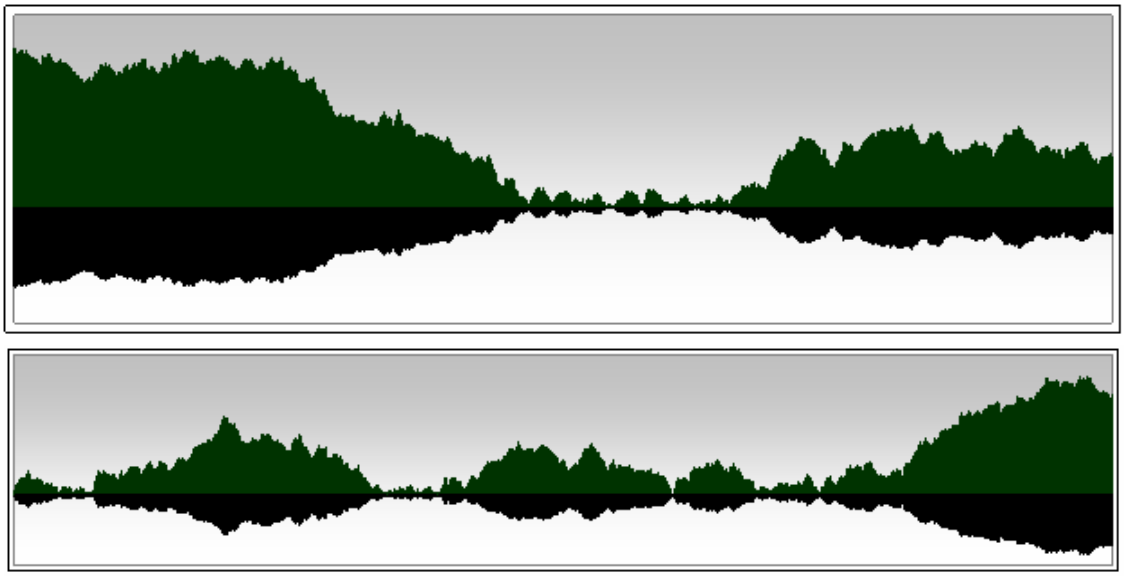


Рис. 1.7. Случайные пейзажи (графики построены в Ms Excel)

На рис. 1.7 приведены две диаграммы, на каждой из которых верхний график (лес) представляет собой зависимость абсолютной величины ординаты Броуновской частицы на плоскости от времени (номера шага). Нижний график (отражение в озере) получается умножением верхнего графика на (–0,5).

Постройте такие графики самостоятельно, это несложно. Интересной фрактальной особенностью таких графиков является то, что при растягивании рисунка с графиком по горизонтали в любое число раз остаются неизменными все статистические характеристики «кромки леса», воспринимаемые визуально. Этот эффект вызывает впечатление, что происходит не растягивание рисунка, а многократное приближение к реальному горизонту пейзажа. При растягивании рисунка между верхушками деревьев появляются всё новые и новые верхушки. Указанное фрактальное свойство графика проявляется уже при использовании приближения, построенного на одной – десяти тысячах перемещений блуждающей частицы (точное математическое Броуновское движение складывается из бесконечного множества бесконечно малых перемещений). Нажимая клавишу F9, можно за несколько секунд сгенерировать десятки таких фрактальных пейзажей.

4. Расчёт интегралов методом Монте-Карло

4.1. Основная идея

Основные вероятностные характеристики непрерывной с. в. x определяются интегралами, связанными с её п. р. в. $f(t)$. К их числу относятся следующие характеристики:

– вероятность попадания x в интервал (a,b)

$$P\{a \le x \le b\} = \int_a^b f(t)dt\,; \tag{1.31}$$

– математическое ожидание x

$$M(x) = \int_{-\infty}^{\infty} t \cdot f(t)dt\,; \tag{1.32}$$

– математическое ожидание любой функции φ от с. в. x

$$M[\varphi(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) \cdot f(t)dt \tag{1.33}$$

и, в частности, математическое ожидание x^r (r-й начальный момент)

$$M(x^r) = \int_{-\infty}^{\infty} t^r \cdot f(t)dt\,. \tag{1.34}$$

Часто эти интегралы сложны для вычисления. При статистическом моделировании вместо точных значений (1.31)–(1.34) можно вычислять и использовать соответствующие приближённые эмпирические оценки, легко рассчитываемые по выборке $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

– оценку вероятности попадания x в интервал (a,b)

$$\hat{P}\{a \le x \le b\} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} I\,[a \le x_i \le b]\,, \tag{1.35}$$

где функция $I\,[A]$ – индикатор события A – равна 1, когда событие A имеет место, и равна нулю в противном случае;

– оценку математического ожидания x

$$\hat{M}(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\,; \tag{1.36}$$

– оценку математического ожидания любой функции $\varphi(x)$ от с. в. x

$$\hat{M}\,[\varphi(x)] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \varphi\,(x_i)\,, \tag{1.37}$$

и, в частности, оценку математического ожидания x^r (r-го начального момента)

$$\hat{M}(x^r) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^r\,. \tag{1.38}$$

Оценки (1.35)–(1.38) легко вычисляются, и погрешности, с которыми они приближают точные значения характеристик, легко контролируются. Действительно, как суммы большого числа независимых с. в. они имеют нормальное распределение. При этом м. о. оценок характеристик совпадают с точными значениями характеристик, а фактические отклонения оценок от точных значений характеристик подчиняются известному правилу «трёх сигм» [16] и могут быть сделаны сколь угодно малыми путём увеличения объёма выборки n.

Более подробные сведения о статистических оценках, включая теорию состоятельности, несмещённости и эффективности оценок, можно найти в учебниках по математической статистике [23, 24].

Основная идея метода Монте-Карло состоит в том, чтобы использовать расчёт эмпирических оценок в качестве способа вычисления определённых интегралов вида (1.31)–(1.34). Поскольку к такому виду легко сводятся практически любые определённые интегралы, метод Монте-Карло оказывается достаточно универсальным методом.

Преимущества метода Монте-Карло и условия, в которых они проявляются, можно увидеть, рассмотрев некоторые примеры его применения.

4.2. Сведение интеграла к вероятности

Наиболее простой способ вычисления определённого интеграла методом Монте-Карло – это сведение интеграла к вероятности. Суть этого способа легко понять из следующего примера.

Пример 11. Рассчитаем методом Монте-Карло определённый интеграл

$$S = \int_0^1 \sqrt{1-t^2}\,dt\,, \tag{1.39}$$

который представляет собой площадь четверти круга единичного радиуса с цент-ром в начале координат (рис. 1.8). Если в единичный квадрат, ограниченный на рис. 1.8 координатными осями и штриховой линией, бросить случайную точку, то она попадёт в круг с вероятностью $p = S/S_0$, где S_0 – площадь квадрата – известна. Отсюда следует, что искомое значение интеграла $S = pS_0$ однозначно выражается через вероятность p. В данном случае $S_0 = 1$, значит $S = p$. Вероятность p легко можно оценить методом Монте-Карло, выбрасывая в квадрат достаточно большое число n случайных точек. Оценка $\hat{p}$ вероятности p вычисляется при этом по формуле

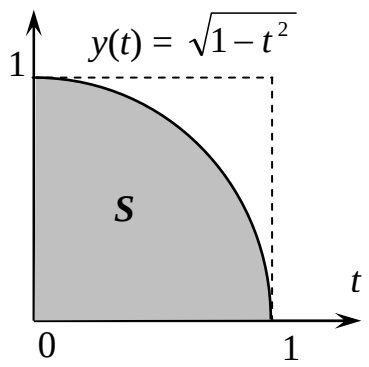


Рис. 1.8. К расчету интеграла

$$\hat{p} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} I(A_i), \qquad (1.40)$$

где событие A_i – это событие попадания точки в круг.

Случайные точки должны иметь равномерное распределение внутри квадрата. Такие точки мы уже «выбрасывали» в примере 4 (см. рис. 1.2). Их координаты записаны в файле «**СлВеличины.xls**» на листе **Выборка** в диапазоне **A1:B10000**. Откройте этот файл или заполните на любом новом листе Ms Excel указанный диапазон значениями БСВ с помощью функции =СЛЧИС(). Чтобы вычислить оценку (1.40), введите в ячейку **C1** формулу =ЕСЛИ((A1^2+B1^2<1);1;0). Эта формула выдаёт значение 1, если сумма квадратов координат случайной точки не превосходит 1, и выдаёт 0 – в противном случае. Таким образом, введённая формула вычисляет индикатор попадания точки в круг. Скопируйте её в диапазон **C1:C10000** двойным щелчком по маркеру заполнения выделенной ячейки **C1**. В ячейку **D1** введите формулу =СУММ(C1:C10000)/10000, вычисляющую оценку (1.40). В этой ячейке завершается расчёт приближённого значения искомого определённого интеграла S методом Монте-Карло.

В ячейку **E1** введите точное значение величины S, составляющее, очевидно, $S = \pi/4 = 0{,}785398$, в ячейку **F1** – формулу =D1-E1, вычисляющую фактическое отклонение приближённой оценки от точной. После завершения пересчёта листа несколько раз нажмите функциональный ключ F9 и понаблюдайте за величиной погрешности в ячейке **F1**.

Убедитесь, что погрешность не выходит за пределы, определённые правилом «трёх сигм». Согласно этому правилу, с вероятностью 1–0,0027 погрешность Δ эмпирической оценки $\hat{M}(x)$ лежит в пределах

$$|\Delta| = \left|\hat{M}(x) - M(x)\right| \le 3\sigma_n, \qquad (1.41)$$

где $\sigma_n = \sqrt{D(x)/n}$ – среднее квадратичное отклонение оценки $\hat{M}(x)$;

$D(x)$ – дисперсия усредняемой выборочной с. в. x;

n – объём выборки.

Формула (1.41), опирающаяся на значение дисперсии $D(x)$ усредняемой с. в. x, является основной формулой планирования статистических экспериментов.

При вычислении эмпирической вероятности усредняемая с. в. x является индикатором того случайного события, вероятность которого нужно оценить, поэтому $x \in \{0, 1\}$. Легко установить, что дисперсия $D(x) = p(1-p)$, где $p = \mathrm{P}\{x = 1\}$ – вероятность индицируемого события. В нашем случае p известна: $p = S = \pi/4 = 0{,}785398$, откуда $D(x) = p(1-p) = 0{,}168548$. Поскольку $n = 10\,000$, то из (1.41) получаем $\sigma_n \approx 0{,}004$, $3\sigma_n \approx 0{,}012$. Нажимая многократно клавишу F9 для пересчёта листа, можно убедиться, что абсолютная величина погрешности в ячейке **F1** действительно практически никогда не превышает 0,012.

Следует заметить, что на практике, когда применяется метод Монте-Карло, точное значение вероятности p, конечно, не бывает известно. Поэтому вероятность p при расчёте $D(x)$ определяется приближённо, уже в ходе применения метода. В рассмотренном только что случае эта приближённая вероятность находится в ячейке **D1**. Её использование вместо точной вероятности не изменяет существенно выводов о погрешности расчёта.

Пример 12. Сравним погрешность рассмотренного варианта метода Монте-Карло с погрешностью пошаговых методов интегрирования. Поскольку погрешность интегрирования зависит от числа точек в области интегрирования, по которым проводится вычисление, сравнение будем производить при одинаковом числе точек $n = 10\,000$. Расчёт интеграла как вероятности будем сравнивать с детерминированным расчётом методом сеток [26].

Вначале сравним расчёт площади S (рис. 1.5), уже проведённый методом Монте-Карло, с расчётом этой же площади методом сеток. На чистом листе Ms Excel введём координаты 10 000 точек, заполняющих единичный квадрат с постоянным шагом по вертикали и по горизонтали, равным 0,01. Квадрат должен быть заполнен 100 рядами точек по 100 точек в каждом ряду. Наиболее быстро это можно сделать следующим образом.

В диапазон **A1:A10000** занесите арифметическую прогрессию от 0 до 9999 с шагом 1 (для этого запишите число 0 в ячейку **A1** и используйте меню **Правка/Заполнить/Прогрессия…**). Далее используем, с небольшой модификацией, стандартный программистский приём преобразования адресов элементов линейного массива в адреса элементов двумерного массива. В ячейку **B1** запишите формулу =ЦЕЛОЕ(A1/100)/100, а в ячейку **C1** – формулу =ОСТАТ(A1;100)/100. Скопируйте **B1** и **C1** вниз на все 10 000 строк. Таким образом, теперь в диапазоне **B1:C10000** построчно записаны координаты всех 10 000 точек, регулярной сеткой покрывающих единичный квадрат. Эту сетку можно увидеть, построив по диапазону **B1:C10000** диаграмму типа Точечная. Чтобы маркеры на ней не сливались, приходится уменьшать размер маркеров до 2 пт, растягивать диаграмму, и/или увеличивать масштаб отображения листа.

Для вычисления интеграла в ячейку **D1** введите формулу, определяющую, находится ли точка регулярной сетки в круге: =ЕСЛИ(B1^2+C1^2<1;1;0),

и скопируйте её вниз методом двойного щелчка. В ячейку **F1** введите формулу =СУММ(D1:D10000)/10000. Здесь получен результат расчёта интеграла методом сеток. Он составляет 0,7949 и отличается от точного значения на 0,0095. Погрешность метода Монте-Карло, применённого нами выше, составила 0,012. Таким образом, оба сравниваемых метода характеризуются здесь сопоставимыми погрешностями.

Теперь сравним возможности расчёта этими методами кратных интегралов, решая задачу, подобную только что рассмотренной. В четырёхмерном пространстве положительный гипероктант содержит 1/16 часть четырёхмерного шара единичного радиуса, с центром в начале координат. Объём V этой части гипершара целиком заключён внутри единичного гиперкуба.

Расчёт объёма V шестнадцатой части гипершара методом Монте-Карло почти не отличается от выполненного выше расчёта площади S четверти круга. Отличия состоят лишь в том, что четырьмя координатами случайных точек =СЛЧИС() заполняются четыре столбца **A1:D10000**, а формула индикатора попадания точки в гипершар, которую можно записать в ячейку **E1**, имеет вид =ЕСЛИ(A1^2+B1^2+C1^2+D1^2<1;1;0). После её копирования в столбец **E1:E10000** и расчёта объёма V как среднего значения в этом столбце получаем оценку объёма, составляющую примерно 0,31. Оценка погрешности по правилу трёх сигм составляет 0,014.

Теперь проведём расчёт объёма V методом сеток. Десять тысяч точек в регулярной сетке, заполняющей единичный гиперкуб, должны следовать друг за другом вдоль каждого из четырёх координатных направлений с шагом 0,1. На чистом листе Excel в диапазон **A1:A10000** запишите числа от 0 до 9999 – это номера точек. Их четыре координаты найдите в столбцах **B1:E10000** модифицированным стандартным приёмом программистов, использованным выше для двухмерного случая, а именно введите в ячейки **B1**, **C1**, **D1** и **E1** следующие четыре формулы:

=ЦЕЛОЕ(A1/1000)/10	=ЦЕЛОЕ(ОСТАТ(A1;1000)/100)/10	=ЦЕЛОЕ(ОСТАТ(A1;100)/10)/10	=ОСТАТ(A1;10)/10

В ячейку **F1** введите формулу, определяющую, находится ли точка регулярной сетки внутри гипершара: =ЕСЛИ(B1^2+C1^2+D1^2+E1^2<1;1;0). Скопируйте все пять формул ячеек **B1:F1** вниз методом двойного щелчка. В поле **G1** результат расчёта определите по формуле =СУММ(F1:F10000)/10000. Он составляет 0,4213.

Итак, метод Монте-Карло дал оценку $V \approx 0{,}31 \pm 0{,}014$, пошаговый метод сеток при тех же затратах компьютерного времени (при том же количестве вычислений $n = 10\,000$) показывает результат $V \approx 0{,}4213$. Поскольку здесь вычисляется несложный интеграл, можно найти и точное его значение. Определяя посредством точного интегрирования объём четырёхмерного гипершара радиуса R, составляющий $\pi^2R^4/2$, находим, что при $R = 1$ его шестнадцатая часть $V = \pi^2R^4/32 = 0{,}308425$. Таким образом, при вычислении кратного интеграла метод Монте-Карло оказался более точным. Погрешность метода сеток $(0{,}4213–0{,}308425) \approx 0{,}113$ оказалась приблизительно на порядок больше погрешности метода Монте-Карло.

Чтобы завершить характеристику достоинств метода Монте-Карло, предположим ещё, что погрешность выполненного расчёта необходимо уменьшить в k раз. При использовании метода Монте-Карло погрешность убывает примерно пропорционально квадратному корню из числа опытов n, поэтому n придётся увеличить в k^2 раз. При использовании метода сеток погрешность убывает примерно пропорционально шагу между точками сетки, поэтому число точек придётся увеличить в k^4 раз. Например, чтобы в рассмотренном примере расчёта пошаговый метод сеток достиг точности метода Монте-Карло, т. е. чтобы снизить погрешность метода сеток на порядок, нужно число точек в регулярной сетке увеличить приблизительно до $n = 10\,000 \times 10^4 = 100\,000\,000$.

4.3. Сведение интеграла к математическому ожиданию

Пусть требуется вычислить определенный интеграл вида

$$I = \int_a^b h(t)dt \tag{1.42}$$

с конечным или бесконечным интервалом интегрирования (a, b). Чтобы применить метод Монте-Карло, перепишем интеграл (1.42) в форме (1.33) м. о. функции и рассчитаем это м. о., используя оценку (1.37).

Вначале введём под знак интеграла какую-либо (произвольную) п. р. в. $f(t)$:

$$I = \int_a^b h(t)dt = \int_a^b \frac{h(t)}{f(t)} f(t)\,dt\,. \tag{1.43}$$

Очевидно, выбранная функция $f(t)$ не должна быть равна нулю в точках интервала интегрирования (a, b). Теперь для приведения интеграла к форме (1.33) остаётся, не меняя значения интеграла, перейти к бесконечным пределам интегрирования.

Для этого определим вспомогательную функцию $H(t)$ через заданную подынтегральную функцию $h(t)$ так, чтобы $H(t)$ совпадала с $h(t)$ на интервале (a, b), но была равна нулю вне этого интервала:

$$H(t) = \begin{cases} h(t) & \text{при } t \in (a,b), \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases} \tag{1.44}$$

Тогда преобразование (1.43) можно продолжить так:

$$I = \int_a^b \frac{h(t)}{f(t)} f(t)dt = \int_a^b \frac{H(t)}{f(t)} f(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{H(t)}{f(t)} f(t)dt. \tag{1.45}$$

Представление (1.45) интеграла (1.42) является м. о. функции $[H(x)/f(x)]$ от с. в. $x \sim f(t)$ (сравните (1.45) с формулой (1.33)). Таким образом, искомый интеграл

$$I = \int_a^b h(t)dt = M\left[\frac{H(x)}{f(x)}\right], \qquad x \sim f(t), \tag{1.46}$$

т. е. может быть рассчитан методом Монте-Карло с использованием оценки (1.37). Для такого расчёта нужно только сгенерировать выборку с. в. x, имеющей п. р. в. $f(t)$, вычислить и усреднить функцию $[H(x)/f(x)]$ выборочных значений x.

Заметим, что если выбирается такая $f(t)$, которая равна нулю при всех $t \notin (a, b)$, то в представлении (1.46) вместо $H(x)$ можно использовать непосредственно функцию $h(x)$, поскольку в этом случае в генерируемой выборке x всегда попадает в (a, b).

4.4. Примеры расчета интеграла как математического ожидания

Пример 13. Представим интеграл (1.39) в форме м. о., выбирая п. р. в. $f(t)$ равномерного распределения $R[0, 1]$, т. е. полагая $f(t) = 1$ при $0 \le t \le 1$. Поскольку интервал распределения здесь совпадает с интервалом интегрирования, то нет необходимости использовать вспомогательную функцию $H(x)$, и (1.46) записывается в виде

$$S = \int_0^1 \sqrt{1-t^2}\,dt = M\left[\frac{\sqrt{1-x^2}}{1}\right] = M\left(\sqrt{1-x^2}\right), \qquad x \sim R[0, 1]. \qquad (1.47)$$

На чистом листе Ms Excel в диапазоне **A1:A10000** сгенерируйте выборку значений БСВ x. В ячейке **B1** реализуйте усредняемую в (1.47) с. в. $\sqrt{1-x^2}$, используя для этого формулу =КОРЕНЬ(1-A1^2). Затем заполните выборкой усредняемых значений с. в. диапазон **B1:B10000**, копируя ячейку **B1** методом двойного щелчка.

В ячейке **D1** вычислите оценку =СУММ(B1:B10000)/10000 интеграла S, в ячейке **D2** – оценку =СТАНДОТКЛОН(B1:B10000) среднеквадратичного отклонения усредняемой с. в., необходимую для контроля точности. Фактическую погрешность расчёта =D1-ПИ()/4 введите в ячейку **F1**, а формулу предельного размаха погрешности =3*D2/100 введите в ячейку **F2**. Полезно ограничить представление числа в ячейке **F2** тремя знаками после запятой. Вычисленный размах фактических погрешностей составляет 0,007.

Поскольку S вычисляется как интеграл функции *одной* переменной (размерность интеграла $r = 1$), то здесь будет справедливо метод Монте-Карло сравнивать с пошаговыми методами на примере метода прямоугольников. Применяя метод прямоугольников (основания которых задаются на отрезках между точками 0,0000, 0,0001, ... 0,9999), получаем оценку интеграла $S \approx 0{,}785448$. Погрешность этой оценки составляет всего 0,00005. Таким образом, преимущества метода Монте-Карло перед пошаговыми методами начинают проявляться лишь при размерности интеграла $r \ge 2$. Заметим, что при размерности $r > 2$ он становится практически единственным методом, пригодным для численного расчёта интегралов.

В то же время и при размерности $r = 1$ – в тех случаях, когда область интегрирования имеет сложную конфигурацию, – метод Монте-Карло может оказаться существенно более предпочтительным, чем пошаговые методы.

Пример 14. Пусть требуется вычислить определённый интеграл

$$I_1 = \int_A h(t)\,dt = \int_A \left(\frac{1}{t^2}\right) dt\,, \qquad (1.48)$$

у которого область интегрирования A определена как совокупность таких непрерывных интервалов на оси $t > 0$, в которых значения t (в десятичном представлении) имеют сумму s первых трёх цифр после запятой в пределах $3 < s < 18$. Например, первый из интервалов области A – это интервал $0{,}004 \le t < 0{,}010$, второй интервал – $0{,}013 \le t < 0{,}020$ и т. д.

Область интегрирования A представляет собой бесконечную совокупность разделённых промежутками интервалов разной длины, которую трудно покрыть сеткой равноотстоящих точек с шагом достаточно малым, чтобы можно было применить пошаговые численные методы интегрирования и проконтролировать точность расчётов. Гораздо удобнее в подобных случаях использовать метод Монте-Карло.

Выбирая для применения метода в форме (1.46) п. р. в. $f(t) = 0{,}001/t^2$, для $t > 0{,}001$, мы можем разыгрывать с. в. x, имеющую эту п. р. в., по формуле $x = 0{,}001/z$, где z – БСВ [16, с. 42–43]. При попадании с. в. x в область A интегрирования имеем $H(x) = h(x) = 1/x^2$, и, следовательно, усредняемая по методу (1.46) с. в. $H(x)/f(x)$ в области A равна $(1/x^2) / (1/x^2) = 1$. Вне области A имеем по определению $H(x) = 0$. Разыгрывая с. в. x и усредняя $H(x)$, мы получим оценку искомого интеграла I_1. Это можно сделать следующим образом.

На чистом листе Ms Excel в диапазоне **A1:A10000** сформируйте выборку с. в. x: введите в ячейку **A1** формулу =0,001/СЛЧИС() и скопируйте её на весь указанный диапазон ячеек. В соседнем столбце в ячейку **B1** введите формулу =A1-ЦЕЛОЕ(A1), вычисляющую дробную часть x, и скопируйте на такой же диапазон ячеек. В следующих трёх столбцах введите в ячейки **C1**, **D1, E1** и аналогично размножьте формулы

=ЦЕЛОЕ(10*B1), =ЦЕЛОЕ(100*B1-10*C1), =ЦЕЛОЕ(1000*B1-100*C1-10*D1),

которые выделяют соответственно первую, вторую и третью цифры после запятой у числа x. Они нужны для того, чтобы определить принадлежность числа x области интегрирования A. В столбце **F** введите в ячейку **F1** формулу вычисления $H(x)$ (усредняемой с. в.) =ЕСЛИ((C1+D1+E1>3)*(C1+D1+E1<18);1;0) и скопируйте её на диапазон **F1:F10000.** Определяя далее её среднее и размах погрешностей по правилу трёх сигм, найдите оценку искомого интеграла. Она такова: $I_1 = 0{,}22 \pm 0{,}01$.

Серьёзные технические трудности, к которым приводит в рассмотренном примере применение пошаговых методов и которые связаны с выбором шага интегрирования, для метода Монте-Карло не свойственны, поскольку в нём отсутствует само понятие шага интегрирования.

4.5. Управление скоростью сходимости

От выбора функции $f(t)$ зависит скорость сходимости оценки интеграла к его точному значению. Скорость сходимости определяется главным образом дисперсией усредняемой в (1.46) с. в. $y = H(x)/f(x)$. Чем меньше $D(y)$, тем мень-

ше размах погрешностей оценки и тем меньшее число опытов n требуется для определения интеграла с требуемой точностью.

В [16] даются рекомендации по ускорению сходимости расчётов и приводится пример вычисления интеграла на полубесконечном интервале, где за счёт правильного выбора плотности $f(t)$ объём расчётов сокращается примерно в тысячу раз.

5. Статистическое моделирование надёжности

5.1. Классическая задача надёжности

В классической задаче надёжности рассматриваются системы следующего вида.

Система состоит из N элементов, которые случайно и независимо, с известными вероятностями, могут отказывать. Совокупность состояний элементов будем представлять двоичным вектором $X = (x_1, x_2, \dots, x_N)$, где x_i – состояние i-го элемента системы – равно 1, когда этот элемент находится в состоянии отказа, и равно 0, когда элемент находится в работоспособном состоянии ($i = 1, \dots, N$).

Закон распределения с. в. X полностью определяется вероятностями отказа элементов $p_i = \mathrm{P}\{x_i = 1\}$. Обозначим набор этих вероятностей через P:

$$P = (p_1, p_2, \dots, p_N). \tag{1.49}$$

Из того, что элементы отказывают независимо, следует, что все с. в. x_i независимы и что вероятность реализации любого конкретного двоичного набора состояний элементов $\Omega = \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N$ составляет

$$\mathrm{P}\{X=\Omega\} = \mathrm{P}\{\Omega\} = \mathrm{P}\{x_1=\omega_1, x_2=\omega_2, \dots, x_N=\omega_N\} = \prod_{i=1}^{N} p_i^{\omega_i}(1-p_i)^{(1-\omega_i)}. \tag{1.50}$$

Так как вектор P вероятностей (1.49) полностью определяет закон распределения (1.50) вероятностей с. в. X, то будем писать $X \sim P$.

Система в целом также либо работает, либо находится в состоянии отказа. В классической задаче надёжности состояние $y \in \{0, 1\}$, характеризующее работоспособность системы в целом, однозначно определяется совокупностью состояний X её элементов и в принципе всегда может быть задано логической функцией вида

$$y = y(X) = y(x_1, x_2, \dots, x_N), \tag{1.51}$$

где значение $y = 1$ означает состояние отказа системы в целом, $y = 0$ – её рабочее состояние.

Обозначим через Q вероятность отказа системы, т. е. $Q = \mathrm{P}\{y=1\} = M(y)$.

В классической задаче надёжности требуется найти вероятность отказа системы Q при известных вероятностях отказа элементов.

Таким образом, формально классическая задача надёжности сводится к определению м. о. функции $y(X)$ случайной величины X.

Эта задача может решаться как формальными, аналитическими методами, так и методами статистического моделирования.

5.2. Аналитические и статистические методы расчёта надёжности

5.2.1. *Представления надёжностной структуры систем*

Описание аналитических методов решения классической задачи надёжности в научно-технической литературе традиционно опирается на представление моделируемой системы в виде надёжностного графа. Как правило, надёжностный граф – это двухполюсный граф, рёбра которого соответствуют элементам системы и изображаются подобно сопротивлениям на электрической схеме, прямоугольниками (рис. 1.9). Такое изображение надёжностной структуры системы наглядно и удобно для инженеров – специалистов с техническим образованием. Интерпретируется надёжностная структура системы, представляемая подобным графом, следующим образом. Считается, что отказу i-го элемента системы соответствует выпадение из графа i-го ребра. Система в целом считается отказавшей в тех случаях, когда из-за отказа элементов между полюсами графа A и B не остается ни одного пути.

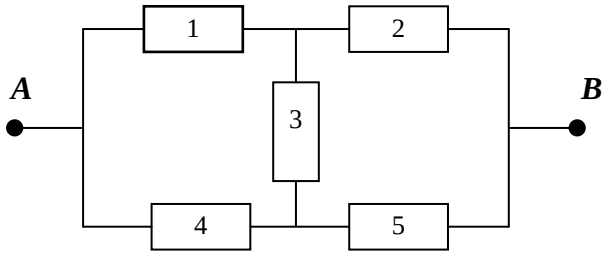


Рис. 1.9. Пример надёжностного графа

Таким образом, надёжностный граф является не чем иным, как одним из способов представления логической функции (1.51). Очевидно, что любой надёжностный граф можно представить логической (двоичной) функцией $y(X) = y(x_1, x_2, \dots, x_N)$ таблично, или в виде соответствующей логической формулы, или алгоритмом и т. д. Например, граф, изображённый на рис. 1.9, можно представить логической функцией $y(X)$, которая ниже описана таблично (табл. 1.2).

Однако обратное неверно, т. е. не любую логическую функцию $y(X)$ можно представить в виде надёжностного графа. Например, если для работоспособности системы достаточно иметь лишь некоторое минимальное число исправных элементов, которое отличается от 1 и от N, то её надёжностную структуру – зависимость $y(X)$ – невозможно изобразить надёжностным графом. В то же время она легко задаётся логической функцией. В качестве примера можно привести такую систему из трёх элементов, которая работоспособна при условии, что число отказавших элементов не превышает единицы. Эта система легко описывается логической функцией, заданной, например, с помощью формулы $y = x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3$, но не представляется надёжностным графом.

Таким образом, язык логических функций менее нагляден, но более универсален, чем язык надёжностных графов. Его универсальность здесь даже несколько избыточна, так как не любая логическая функция имеет разумную интерпретацию в качестве модели надёжностной структуры. Для такой интерпретации функция должна ещё обладать свойством монотонности в том смысле, что если $y(x_1, \dots, x_i, \dots, x_N) = 1$ при $x_i = 0$, то при изменении значения аргумента x_i (только его) с 0 на 1 должно быть $y(x_1, \dots, x_i, \dots, x_N) = 1$ непременно. Иными словами, если система не работает при работающем элементе x_i, то при отказе

его (при тех же состояниях остальных элементов) система не может стать работающей. Образно говоря, все «частные производные» функции $y(x_1, x_2, \ldots, x_N)$ должны быть неотрицательны.

Основные методы аналитического и статистического решения классической задачи надёжности описаны в учебном пособии [16]. Для дальнейшего развития темы перечислим основные выводы этого пособия, которые касаются этих методов расчёта надёжности.

5.2.2. *Расчёт надёжности приводимых систем*

Система называется приводимой, если её надёжностная структура представляется параллельно-последовательным графом. Наилучшим методом расчёта надёжности приводимой системы является аналитический метод. По её графу можно сразу написать формулу, выражающую в буквенном виде зависимость вероятности отказа системы Q от вероятностей отказа элементов $p_1, p_2, \ldots, p_N$. В этой формуле обозначение каждой из N вероятностей встречается ровно один раз, и сложность формулы (число выполняемых операций при её использовании) приблизительно равно N.

Расчётная формула основана на представлении приводимого графа в виде суперпозиции строго последовательных и строго параллельных двухполюсников, вероятность отказа которых описывается простыми формулами. Двухполюсник, состоящий из последовательно соединённых K элементов, отказывает при отказе хотя бы одного из них, поэтому вероятность отказа такого двухполюсника составляет $Q' = 1 - q_1 q_2 \ldots q_K$, где $q_i = (1 - p_i)$ – вероятность работоспособного состояния i-го элемента в последовательном соединении. Двухполюсник, состоящий из параллельно соединённых K элементов, отказывает только при одновременном отказе всех элементов, поэтому вероятность отказа такого двухполюсника составляет $Q'' = p_1 p_2 \ldots p_K$, где p_i – вероятность отказа i-го элемента в параллельном соединении. Поскольку приводимый граф представляет собой суперпозицию последовательных и параллельных подграфов, то формула вероятности отказа всей системы представляет собой соответствующую суперпозицию формул приведенного вида.

Преимуществами такого аналитического решения являются его точность, так как в буквенном виде формула точна абсолютно, и общность, так как выражение вероятности отказа системы $Q = Q(p_1, p_2, \ldots, p_N)$ через вероятности отказа элементов охватывает сразу весь диапазон возможных значений параметров $p_1, p_2, \ldots, p_N$.

5.2.3. *Аналитический расчёт надёжности неприводимых систем*

Если система неприводима, то в общем случае аналитический расчёт её надёжности требует разложения множества исходов (множества наборов состояний элементов) на все 2^N возможных элементарных исходов и суммирования вероятностей тех из них, при которых система отказывает. Наименьший неприводимый надёжностный граф изображён выше на рис. 1.9. В табл. 1.2 приведён расчёт этого графа. Этот пример наглядно демонстрирует, как можно осуществить аналитический расчёт надёжности любого другого неприводимого надёжностного графа.

Таблица 1.2

Пример табличного анализа надёжности системы

Значения с. в. X $x_1x_2x_3x_4x_5$	$y(X)$	Вероятности исходов для $y = 1$	Значения с. в. X $x_1x_2x_3x_4x_5$	$y(X)$	Вероятности исходов для $y = 1$
0 0 0 0 0	0		1 0 0 0 0	0	
0 0 0 0 1	0		1 0 0 0 1	0	
0 0 0 1 0	0		1 0 0 1 0	1	$p_1q_2q_3p_4q_5$
0 0 0 1 1	0		1 0 0 1 1	1	$p_1q_2q_3p_4p_5$
0 0 1 0 0	0		1 0 1 0 0	0	
0 0 1 0 1	0		1 0 1 0 1	1	$p_1q_2p_3q_4p_5$
0 0 1 1 0	0		1 0 1 1 0	1	$p_1q_2p_3p_4q_5$
0 0 1 1 1	0		1 0 1 1 1	1	$p_1q_2p_3p_4p_5$
0 1 0 0 0	0		1 1 0 0 0	0	
0 1 0 0 1	1	$q_1p_2q_3q_4p_5$	1 1 0 0 1	1	$p_1p_2q_3q_4p_5$
0 1 0 1 0	0		1 1 0 1 0	1	$p_1p_2q_3p_4q_5$
0 1 0 1 1	1	$q_1p_2q_3p_4p_5$	1 1 0 1 1	1	$p_1p_2q_3p_4p_5$
0 1 1 0 0	0		1 1 1 0 0	0	
0 1 1 0 1	1	$q_1p_2p_3q_4p_5$	1 1 1 0 1	1	$p_1p_2p_3q_4p_5$
0 1 1 1 0	1	$q_1p_2p_3p_4q_5$	1 1 1 1 0	1	$p_1p_2p_3p_4q_5$
0 1 1 1 1	1	$q_1p_2p_3p_4p_5$	1 1 1 1 1	1	$p_1p_2p_3p_4p_5$

Так, исход $X = 01001$ в табл. 1.2 означает, что отказали элементы 2 и 5, т. е. $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, $x_5 = 1$. Из рис. 1.9 видно, что при удаленных рёбрах 2 и 5 полюсы A и B несвязны. Следовательно, для данного исхода X состояние системы $y = 1$.

Суммируя вероятности всех исходов с $y = 1$, перечисленных в табл. 1.2, получаем для надёжностного графа на рис. 1.9 следующую расчетную формулу:

$$Q = M(y) = q_1p_2q_3q_4p_5 + q_1p_2q_3p_4p_5 + q_1p_2p_3q_4p_5 + q_1p_2p_3p_4q_5 +$$
$$+ q_1p_2p_3p_4p_5 + p_1q_2q_3p_4q_5 + p_1q_2q_3p_4p_5 + p_1q_2p_3q_4p_5 + p_1q_2p_3p_4q_5 +$$
$$+ p_1q_2p_3p_4p_5 + p_1p_2q_3q_4p_5 + p_1p_2q_3p_4q_5 + p_1p_2q_3p_4p_5 + p_1p_2p_3q_4p_5 +$$
$$+ p_1p_2p_3p_4q_5 + p_1p_2p_3p_4p_5,$$

или, после упрощения:

$$Q = p_1p_4 + p_2p_5(1 - p_1p_4) + p_3(q_1p_2p_4q_5 + p_1q_2q_4p_5). \qquad (1.52)$$

Самой сложной частью аналитического расчета надёжности в подобных случаях является вычисление y для всех 2^N значений X, ведь для этого нужно, вообще говоря, 2^N раз проанализировать связность полюсов графа. Или, если зависимость $y(X)$ задана не графом, а, например, некоторым алгоритмом, то нужно 2^N раз выполнить этот алгоритм. Даже при относительно небольших значениях n, равных нескольким десяткам, такой расчёт становится во многих случаях практически невозможным.

5.2.4. *Статистический расчёт надёжности*

Непосредственный статистический расчёт надёжности представляет собой многократную реализацию с. в. X – набора состояний элементов системы, вычисление значений $y(X)$ для каждой реализации (для каждого *опыта*) и их усреднение.

В результате проведения n опытов оценка $\hat{Q}$ вероятности отказа системы определяется по формуле

$$\hat{Q} = \hat{M}(y) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i = \frac{n_{\text{отк}}}{n}, \qquad i = 1 \ldots n, \tag{1.53}$$

где y_i – состояние системы в i-м опыте; $n_{\text{отк}}$ – число отказов, т. е. число опытов, в которых происходил отказ системы. Погрешность оценки (1.53) в соответствии с правилом трёх сигм (1.41) находится с вероятностью 1–0,0027 в пределах

$$|\Delta| \le 3\sigma_n = 3 \cdot \sqrt{\frac{D(y)}{n}} = 3 \cdot \sqrt{\frac{Q(1-Q)}{n}}. \tag{1.54}$$

С учётом того, что обычно вероятность отказа системы Q близка к нулю, можно пренебречь множителем $(1 - Q)$, близким к единице. Кроме того, по той же причине малости Q, от абсолютной погрешности Δ в (1.54) переходят к относительной погрешности $\delta = \Delta/Q$. В результате этих замен неравенство принимает следующий вид:

$$|\delta| \le 3v_n = \frac{3}{\sqrt{Q \cdot n}}, \tag{1.55}$$

где $v_n = \sigma_n / Q$ – коэффициент вариации оценки $\hat{Q}$ при n опытах. Наконец, поскольку точное значение Q в (1.55) неизвестно, его заменяют оценкой $\hat{Q} = \frac{n_{\text{отк}}}{n}$, откуда

$$|\delta| \le \frac{3}{\sqrt{n_{\text{отк}}}}. \tag{1.56}$$

Это неравенство позволяет достаточно легко контролировать относительную ошибку в ходе статистического эксперимента по числу $n_{\text{отк}}$ наблюдаемых отказов системы.

Если в (1.55) зафиксировать размах относительной погрешности, полагая $3v_n = \delta_0$, и выразить через него число опытов n, при котором он достигается, получим требование

$$n = \frac{9}{Q \cdot \delta_0^2}. \tag{1.57}$$

Зависимость числа опытов, т. е. затрат компьютерного времени от погрешности статистической оценки δ_0, описывается законом обратных квадратов. Размах δ_0 на практике задают в диапазоне от 1 до 0,1.

Метод статистического моделирования надёжности прост в использовании. Как видно из (1.57), трудоёмкость расчёта, выражаемая числом опытов,

при этом никак не зависит от числа N элементов в системе, в то время как при аналитическом расчёте она растёт как 2^N.

Формула (1.57) раскрывает, однако, специфическую проблему непосредственного статистического моделирования, состоящую в больших затратах компьютерного времени, необходимых для расчёта высоконадёжных структур. При малой вероятности отказа Q, которая на практике может достигать значений $Q \approx 10^{-5}$–10^{-15}, число опытов n, как видно из (1.57), становится чрезмерно большим.

5.2.5. *Аналитико-статистические методы моделирования*

Многократное, достигающее нескольких порядков, сокращение затрат времени на моделирование высоконадёжных структурно сложных систем достигается путём эффективного использования в статистическом эксперименте известных общих законов теории вероятностей и математической статистики. Задача моделирования преобразуется в аналитико-статистических методах таким образом, что среднее значение оценки не изменяется, но резко снижается её дисперсия. Поэтому аналитико-статистические методы моделирования часто называют также методами понижения дисперсии [6].

При моделировании надёжности систем в терминах классической задачи надёжности наиболее часто используют метод взвешивания (метод существенной выборки), метод расслоения (метод стратифицированной выборки) или их комбинированные варианты. Эти методы достаточно подробно излагаются в [16].

5.2.6. *Другие модели надёжности*

В других, более сложных и универсальных подходах к моделированию надёжности учитываются вероятностные характеристики потоков отказов и восстановлений. Эти подходы в настоящее время также можно называть классическими. Сравнительные достоинства и недостатки аналитического, статистического и аналитико-статистического моделирования в этих подходах также сохраняют свой общий, рассмотренный выше характер.

Для изучения аналитических методов расчёта надёжности рекомендуются книги [27–29]. Методы имитационного моделирования и аналитико-статистические методы разрабатываются в [30]. Здесь исследуются модели достаточно общего вида, в которых комплексно представлены как аспекты отказов и восстановлений элементов, так и аспекты производительности восстанавливающих систем (ремонтных групп). Соответствующие математические модели органично сочетают подходы теории надёжности и теории массового обслуживания. В книге [31] для моделирования надёжности систем используется мощный язык переключательных процессов (ПП) на непрерывном времени и уравнений динамики ПП, включающих, наряду с логическими операторами, различного рода операторы запаздывания.

5.3. Предел Бремермана – Эшби

Принцип неопределенности Гейзенберга указывает на естественные пределы микроминиатюризации устройств, предназначенных для обработки тех-

нической информации. Ошибка в измерении количества движения физической частицы, то есть импульса, и погрешность измерения ее координаты связаны постоянной Планка так, что любые попытки повысить точность измерения импульса приводят к росту погрешности определения координаты, и наоборот. Учитывая конечную скорость передачи информации в пространстве – скорость света, и точные пределы пропускной способности каналов с помехами, установленные Шенноном, можно вычислить *предел скорости*, достижимой техническими средствами обработки информации. Этот предел называется пределом Бремермана или пределом Бремермана – Эшби и составляет приблизительно 10^{47} *бит/г* в секунду. Самый совершенный компьютер не может выполнять в одном грамме своего вещества более чем 10^{47} битовых операций в секунду.

Возможности современных компьютеров ещё очень далеки от этого теоретического предела. Однако само его существование указывает на отсутствие перспектив у многих направлений развития компьютерной математики, упирающихся, например, в необходимость перебора большого числа вариантов решений.

Предел Бремермана – Эшби можно переформулировать и в виде *ограничения объёма* технической информации, который может быть обработан в принципе. Если предположить, что всё вещество земного шара мы сумеем превратить в совершенный компьютер с параллельной обработкой информации, то за время, равное сегодняшнему возрасту Земли, такой компьютер смог бы выполнить не более 10^{97} битовых операций. Учитывая то, при каких предположениях получено это число, можно обоснованно утверждать, что всякая задача, требующая выполнения большего числа битовых операций (например, просто записи или чтения такого количества бит), технически нереализуема.

В качестве примера того, как быстро в ряде случаев алгоритмы решения задач упираются в этот предел, рассмотрим так называемую матрицу Эшби, состоящую из 20×20 клеток. Каждая клетка может находиться в одном из двух состояний, например, в состоянии, проводящем или не проводящем электрический ток. От состояний клеток зависит состояние системы в целом, например, будет ли проходить ток от левой границы матрицы к её правой границе. Предположим, ток между соседними клетками может проходить как по вертикали, так и по горизонтали, но не по диагонали. Предположим также, что для каждой клетки известна вероятность, с которой она находится в проводящем ток состоянии, и что нужно определить вероятность проводящего состояния матрицы в целом. Как видно из постановки этой задачи, она эквивалентна задаче расчёта надёжности, если клетки матрицы рассматривать как связанные по вертикали и по горизонтали элементы надёжностного графа системы. Этот граф неприводим, так как его элементы не являются двухполюсниками.

Если решать эту задачу точным аналитическим методом, основанным на разложении множества исходов на элементарные исходы с фиксированными состояниями элементов, то число отдельных исходов, перебираемых по аналогии с приведенной выше табл. 1.2, составит 2^N, где $N = 20\times20 = 400$. Таким образом, общее число исходов составляет здесь $2^N = 2^{400} \approx 10^{0,3\times400} = 10^{120}$, и оно значительно превышает предел Бремермана – Эшби. Следовательно, рассмот-

ренный аналитический способ решения этой задачи технически нереализуем, даже если вычисление $y(X)$ для каждого исхода X свести к одной битовой операции. В действительности же для каждого конкретного исхода нужно ещё проверять, существует ли в нём путь из связанных между собой проводящих клеток, который соединяет левую и правую границы матрицы.

Метод статистического моделирования позволяет обходить в подобных задачах предел Бремермана – Эшби и обнаруживать важные общие закономерности и законы функционирования сложной технической структуры, не исследуя систематически всех её возможных состояний.

Преимущества статистического моделирования сложных технических структур рассмотрим на примере исследования явления перколяции (протекания).

5.4. Модели теории протекания

5.4.1. *Статистическое моделирование матрицы Эшби*

Прежде чем рассматривать модели перколяции, выполним несколько экспериментов с матрицей Эшби.

Пример 14. В ячейку **A1** на чистом листе Ms Excel введите число 0,675. Это число будем использовать как вероятность p проводящего состояния (включения) элементов матрицы Эшби. Введите в ячейки любого свободного диапазона, имеющего размер 20 строк на 20 столбцов, формулу =ЕСЛИ(СЛЧИС()<$A$1;1;0). Сделайте ширину ячеек этого диапазона равной их высоте и примените к ним меню **Формат/Условное форматирование**, чтобы результат 0 выводился белым цветом на белом фоне, а 1 – чёрным на чёрном. Тогда включённые клетки матрицы будут изображаться в виде чёрных квадратиков. С помощью меню **Сервис/Параметры** на вкладке **Вид** отключите опцию **сетка**. Обрамите границы диапазона рамкой. Нажимая ключ F9, сгенерируйте и рассмотрите несколько реализаций построенной матрицы Эшби. На рис. 1.10 показаны полученные таким образом следующие одна за другой подряд четыре реализации. Во всех четырёх имеется путь из чёрных клеточек, соединяющий боковые границы матрицы. Напомним, что смежные клетки по диагонали не соединяются.

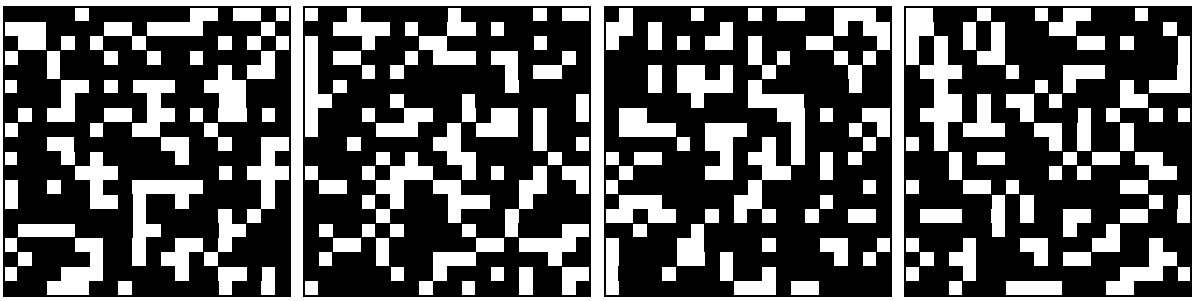


Рис. 1.10. Реализации матрицы Эшби при p = 0,675

Если заменить значение вероятности включения элемента в ячейке **A1** на 0,525, то получаются реализации матрицы, в которых связь между её боковыми границами, как правило, отсутствует (рис. 1.11).

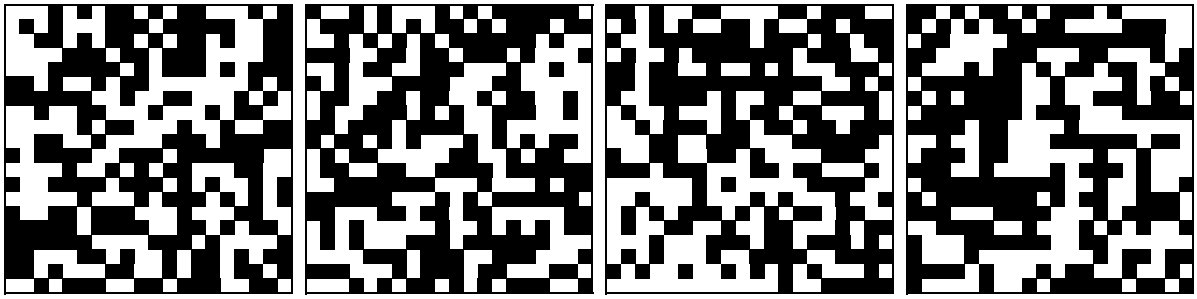


Рис. 1.11. Реализации матрицы Эшби при p = 0,525

Вблизи значения p = 0,6 результаты экспериментов начинают колебаться: связь то присутствует, то нет. При удалении от этого значения результат эксперимента становится предсказуемым всё более однозначно. Поэтому возникает предположение, что значение $p_{крит} \approx 0{,}6$ представляет собой некое критическое, пороговое значение вероятности включения элемента, которое достаточно жёстко определяет свойства проводимости матрицы в целом.

Эксперименты с помощью программы, выполняющей заданное число экспериментов с матрицами разного размера и при разных значениях p, подтверждают эту гипотезу и показывают, что с увеличением размеров матрицы сколь угодно малые отклонения вероятности включения элементов от критической жёстко определяют проводимость матрицы. Таким образом, можно сформулировать теорему: когда размеры матрицы стремятся к бесконечности, наличие у неё проводящего состояния определяется лишь знаком разности ($p - p_{крит}$). Поиск доказательства теоремы и определение точного значения вероятности $p_{крит}$ ещё не завершены, и читателю предлагается испытать здесь свои способности.

Рассмотренный пример показывает, что в ряде случаев при моделировании сложных структур можно извлекать важную информацию об их свойствах на основании только визуализации и наблюдения хода эксперимента, даже без детальной количественной обработки его результатов.

5.4.2. *Статистическое моделирование решёток Бернулли*

При решении задач физики решёток рассматривается так называемая «перколяция сквозь Бернуллиевы решётки» и используется понятие контактного кластера. Приведём пояснение этих терминов, используя следующую цитату из [25, с. 184]. «Простейшей задачей о перколяции … является перколяция по связям на квадратной решётке. Для упрощения картины представим себе большую квадратную решётку, составленную из двух видов стержней: одни сделаны из изолирующего винила, другие – из электропроводной меди. Такая решётка может считаться *решёткой Бернулли*, если каждый стержень выбран совершенно случайно, независимо от других стержней, причём вероятность выбора проводящего стержня равна p. Наибольшие скопления связанных между собой медных или виниловых стержней называются соответственно медными или виниловыми *кластерами*. Если решётка содержит хотя бы одну непрерывную цепочку медных стержней, электрический ток сможет *пройти* всю решётку *насквозь*, от одного края до другого. В таких случаях говорят, что решётка *перколирует*. (От латинского *per* «сквозь» и *colare* «течь».) Все стержни, нахо-

дящиеся в неразрывном электрическом контакте одновременно с верхним и нижним краями решётки, образуют «перколяционный кластер», а стержни, непосредственно участвующие в передаче, составляют так называемую «магистраль» кластера …

… Наиболее замечательная находка Хаммерсли имеет отношение к особой роли некоторой пороговой вероятности или, как он её назвал, *критической вероятности* $p_{крит}$. Эта величина появляется на сцене, когда размер решётки Бернулли (измеряемый числом стержней) стремится к бесконечности. Оказывается, когда $p > p_{крит}$, вероятность существования перколяционного кластера возрастает с размером решётки и стремится к единице. Когда же $p < p_{крит}$, вероятность перколяции устремляется к нулю.

Поскольку в случае перколяции по связям на квадратных решётках дело обстоит таким образом, что либо медь, либо винил должны перколировать, то $p_{крит} = {}^1/_2$».

Пример 15. Роль критической вероятности $p_{крит} = {}^1/_2$ в перколяции сквозь Бернуллиевы решётки можно увидеть в экспериментах уже с достаточно небольшими решётками. Заметим, что предельные теоремы не указывают на размеры решёток, при которых эти теоремы могут использоваться на практике. Статистическое моделирование позволяет восполнять подобные недостатки теории.

Откройте чистый лист Ms Excel, выделите его и сделайте ширину столбцов равной высоте. Выделите диапазон из 10×10 клеток и скопируйте во все его ячейки одну формулу =СЛЧИС(). Сначала для всего диапазона с помощью меню **Формат/Ячейки**… на вкладке **Шрифт** задайте белый цвет шрифта, чтобы в ячейках не отображалось их содержимое. Затем с помощью меню **Формат/Условное форматирование**… задайте для этого диапазона следующие три условных формата для вывода содержимого ячейки.

Условие 1 значение *между* 0,36 и 0,6 (далее кнопка **Формат**… /вкладка **Шрифт**), цвет *белый* (далее вкладка **Граница**), значок *граница снизу*.

Условие 2 значение *между* 0,6 и 0,84 (далее кнопка **Формат**… /вкладка **Шрифт**), цвет *белый* (далее вкладка **Граница**), значок *граница справа*.

Условие 3 значение *между* 0,84 и 1 (далее кнопка **Формат**… /вкладка **Шрифт**), цвет *белый* (далее вкладка **Граница**), значок *граница снизу и справа*.

Эти форматы задают условия только для вывода нижней и правой границ клетки, поскольку состояние левой её границы определится клеткой, расположенной левее, а состояние верхней границы – клеткой, расположенной выше.

Поскольку случайные числа в ячейке распределены равномерно на интервале (0, 1), то с вероятностью 0,6 – 0,36 = 0,24 (по условию 1) в ячейке появится только линия внизу. Аналогично с вероятностью 0,84 – 0,6 = 0,24 (условие 2) появится только линия справа, с вероятностью 1 – 0,84 = 0,16 (условие 3) появятся обе линии, и с вероятностью 0,36 – 0 = 0,36 (пропущенный в условиях случай, определяемый заданным ранее безусловным форматом) не будет выведено ни одной линии. Эти вероятности точно соответствуют вероятностям соответствующих событий в решётке при $p = 0{,}4$. Действительно, вероятность непоявления ни одной линии из двух есть $(1 - p)(1 - p)$,

вероятность появления ровно одной линии внизу есть $p(1-p)$, такова же вероятность появления ровно одной линии справа, и, наконец, вероятность одновременного появления обеих линий есть p^2.

С помощью кнопки Границы… задайте для всего диапазона горизонтальные линии сверху и снизу. С помощью меню **Сервис/Параметры**… на вкладке **Вид** снимите флажок **сетка**. Растиражируйте построенный диапазон посредством копирования. Перед вами – готовый стенд для проведения экспериментов одновременно с несколькими реализациями Бернуллиевой решётки. Пять реализаций решётки с $p = 0{,}4$ представлены на рис. 1.12. Хотя решётки невелики, предельный закон критической вероятности сказывается на них уже ощутимо. Ни в одной из реализаций перколяция – соединение верхней и нижней границ решётки – здесь не имеет места, поскольку $p = 0{,}4 < p_{крит} = 0{,}5$.

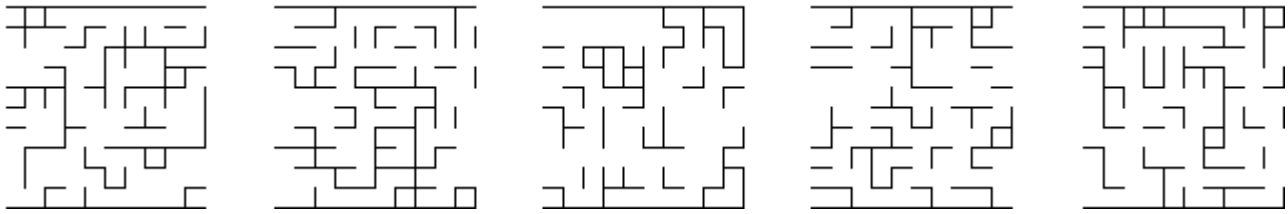


Рис. 1.12. Бернуллиевы решётки при $p = 0{,}4 < p_{крит}$

На рис. 1.13 приведены реализации решётки при $p = 0{,}5 = p_{крит}$. Примерно в половине из них появляются перколяционные кластеры.

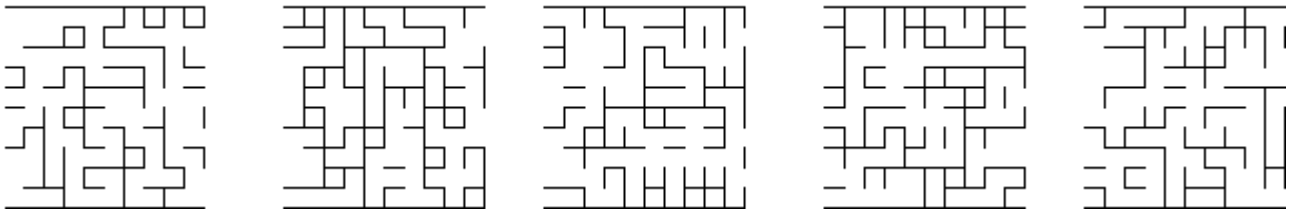


Рис. 1.13. Бернуллиевы решётки при $p = 0{,}5 = p_{крит}$

На рис. 1.14 приведены реализации решётки при $p = 0{,}6 > p_{крит}$. Перколяция произошла во всех реализациях решётки.

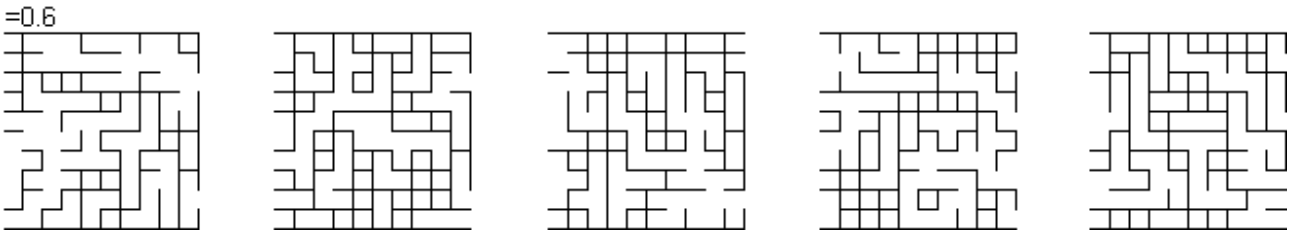


Рис. 1.14. Бернуллиевы решётки при $p = 0{,}6 > p_{крит}$

5.4.3. *Определение критической вероятности в решётках разного типа*

Если необходимы разнообразные точные количественные решения, то для статистического моделирования целесообразно писать специальные моделирующие программы.

Так, для более полного изучения явления перколяции в решётках разного типа (рис. 1.15) студентами в рамках УНИРС написана программа, позволяю-

щая моделировать решётки большого размера. Программа визуализирует результаты испытаний и путём многократных опытов рассчитывает для каждого типа решётки её критическую вероятность.

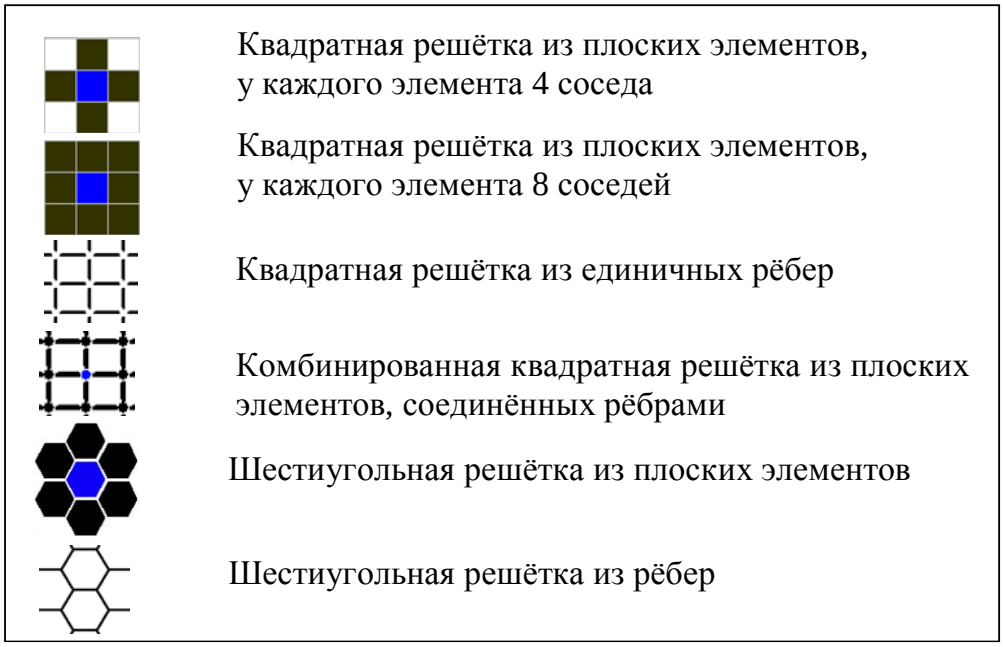


Рис. 1.15. Шесть типов решёток, исследуемых на перколяцию

На рис. 1.16 представлены результаты проведенных с помощью этой программы исследований. Каждый столбец диаграммы изображает оценку критической вероятности *отказа* элементов для решётки одного конкретного типа; порядок столбцов на рис. 1.16 (слева направо) соответствует порядку типов решёток, приведенных на рис. 1.15 (сверху вниз). Погрешность приведенных оценок составляет около 0,05.

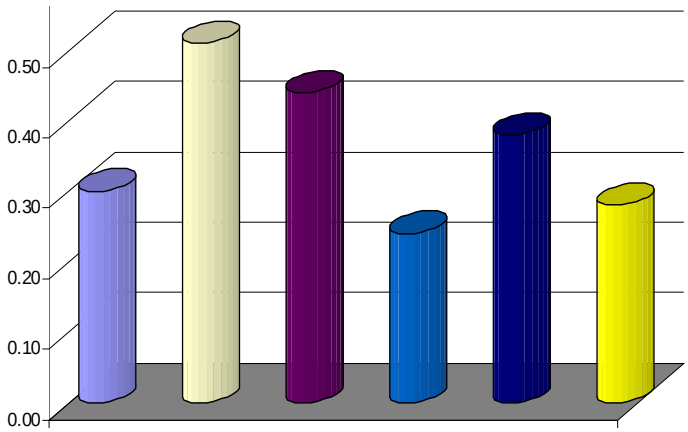


Рис. 1.16. Критическая вероятность $q_{крит} = 1 - p_{крит}$

Самостоятельный интерес представляет исследование размеров контактных кластеров в решётках. В качестве примера использования статистического моделирования для решения подобных задач упомянем программу, написанную под руководством автора студентами в рамках УНИРС. Программа в процессе статистического моделирования больших Бернуллиевых решёток выделяет отдельные контактные кластеры, раскрашивает и визуализирует их (рис. 1.17),

а также вычисляет различные статистические характеристики, включая эмпирические распределения вероятностей размеров кластеров.

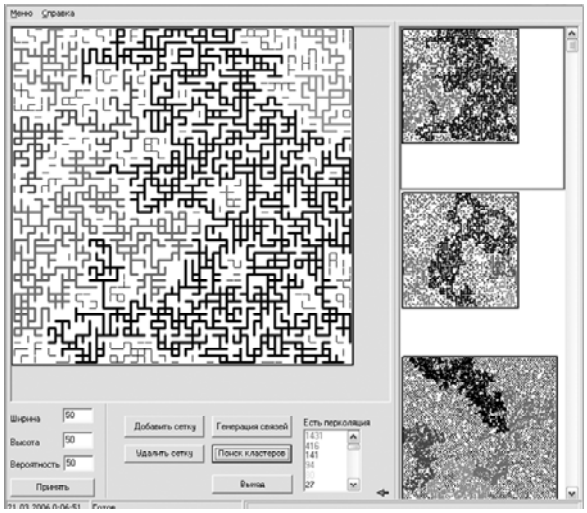


Рис. 1.17. Геометрия контактных кластеров

Теория перколяции применима в различных областях науки. Термин перколяция, означающий *протекание*, отражает соотвественно и возможность моделирования протекания жидкости, например воды или нефти, в почвенных средах. В физике теория перколяции применяется при расчете распространения токов в случайной сетке проводников. В разделе материаловедения «Теория разрушений» она используется для изучения распространения трещин при деформации материалов. В медицине теорию перколяции используют для моделирования распространения инфекций при заболеваниях организма.

Нетрудно оценить и хорошие перспективы применения этой теории в информатике и вычислительной технике. Если, например, необходимо оградить глобальную сеть от компьютерного вируса, то достаточно, чтобы каждый отдельный узел этой сети был недоступен для вируса с вероятностью, хотя бы немного превосходящей критическую вероятность. В этом случае сеть в целом будет гарантированно оставаться связной и работоспособной. Частичные потери функциональности сети (например, потери её суммарной производительности) определяются при этом распределением размеров кластеров, поражаемых вирусом. Для определения критической вероятности в подобных нерегулярных сетях и для установления законов распределения контактных кластеров требуется проводить статистическое моделирование решёток с *нерегулярной структурой*. Из приведённых примеров видно, что перколяционные модели являются перспективными «неклассическими» моделями надёжности сложных информационно-вычислительных систем.

6. Имитационное моделирование

Первоначально ИМ определялось как способ описания и моделирования *дискретно-событийных* процессов, присущих системам массового обслуживания, системам с отказами и восстановлением элементов, дискретным производствам и т. д. [12, 13]. Компьютерное моделирование подобных систем наиболее эффективно реализуется посредством программирования симулятора – «движка», воплощающего действие механизма причинно-следственных связей. При наличии симулятора моделирование сводится к заданию начального состояния системы, пуску симулятора и наблюдению за последующим развитием процессов в системе, которое безупречно корректно воспроизводится симулятором. С точки зрения логики моделирования здесь наиболее существенно то, что

от текущего момента времени и известного в нём состояния системы перемещение вперёд, к новым моментам времени и новым состояниям системы, производится путём продуцирования выводного знания. Симулятор циклически повторяет заложенный в него способ рассуждения, т. е. способ вывода и точного вычисления следствий о ближайшем будущем из параметров состояния, известных на данный момент модельного времени.

При моделировании, учитывающем влияние случайных факторов, эволюция системы воспроизводится многократно, и вычисляются необходимые статистические показатели, характеризующие наблюдаемые процессы. Такое многократное воспроизведение эволюции не является собственным атрибутом ИМ, но принадлежит методу Монте-Карло, который используется в ИМ как метод вычисления вероятностных характеристик системы. При моделировании случайных факторов многократное воспроизведение возможных вариантов развития процессов позволяет получить полосу наиболее вероятных траекторий изменения показателей, найти траектории математических ожиданий показателей, наихудший и наилучший сценарии развития процессов. Но учёт случайных факторов не обязательно присутствует в ИМ. Так, при моделировании производственных систем места для имитации случайностей остаётся тем меньше, чем выше степень автоматизации этих систем [32].

Современный уровень теории и практики ИМ [4] охватывает четыре парадигмы, в число которых, наряду с рассмотренной парадигмой *дискретно-событийного* моделирования, входят следующие три: моделирование *динамических систем*, *системная динамика* в смысле Форрестера [33] и *многоагентный подход*. Анализ используемой в них логики моделирования показывает, что все эти парадигмы, как и дискретно-событийное моделирование, основаны на причинно-следственном механизме продвижения процессов во времени. Различия в перечисленных парадигмах ИМ относятся лишь к способу интерпретации (т. е. к семантике) основных структурных компонентов имитационных моделей; но логика имитации процессов остаётся единой.

Так, логика моделирования непрерывных *динамических систем* в части механизма продвижения во времени совпадает с логикой дискретно-событийного моделирования. Её языковая реализация может быть сведена, например, к описанию моделируемых непрерывных процессов дифференциальными уравнениями (ДУ), представленными в форме Коши [33], которые решаются численными методами с автоматическим подбором шага времени. Подобная языковая реализация представляет собой своеобразный, но внешний атрибут парадигмы моделирования динамических систем. Ведь аналитическая форма ДУ используется в ИМ лишь в качестве компактной *промежуточной* формы описания причинно-следственного механизма развития процессов, но сам этот механизм в качестве действительной логической основы моделирования используется, фактически, начиная уже с этапа составления ДУ.

Составление ДУ, описывающих динамическую систему, есть фиксация действующих в системе причинно-следственных связей. Мы выражаем новые значения переменных в конце интервала времени (t, $t + dt$) через известные значения в его начале, опираясь именно на знание причинно-следственных связей

(сил, законов, принципов), действующих в системе. И на этапе имитации динамической системы, когда бесконечно малые приращения времени dt заменяются в уравнениях конечными приращениями Δt, имитация вновь разворачивается как перемещение во времени, последовательно реализующее заданные нами причинно-следственные связи. Здесь при более детальном рассмотрении можно, конечно, увидеть отличие от моделирования дискретно-событийных процессов и в способе выбора шага Δt, но с точки зрения логики моделирования и это отличие – внешнее, чисто техническое. Логика использования известного причинно-следственного механизма как «движка» имитации сохраняется неизменной.

Что касается парадигмы так называемой *системной динамики*, то она с самого начала предполагает описание непрерывных процессов (потоков и уровней) в форме, близкой к конечно-разностным уравнениям, т. е. отличается от моделирования динамических систем лишь внешне. При этом причинно-следственная логика продвижения процессов во времени здесь более очевидна, чем при имитации динамических систем, поскольку в подходах системной динамики отсутствует промежуточная фаза описания системы на языке дифференциалов.

Наконец, в *многоагентной* парадигме ИМ целенаправленное поведение взаимодействующих «агентов» также реализуется причинно-следственным механизмом продвижения во времени. Агенты – это объекты модели, интерпретируемые как независимые активные сущности, которые не управляются из единого центра, имеют ограниченную информацию о системе в целом и, преследуя каждый свои цели, предпринимают соответствующие действия, выбираемые из ограниченного перечня. Интерпретация правил выбора может опираться на кажущееся обращение времени: желаемая цель служит агенту отправным пунктом, причиной для выбора, лежащей в будущем, а сам выбор – следствием, осуществляемым в настоящем. Однако с формально-логической точки зрения выбор, осуществляемый любым агентом, предопределён достигнутым на момент выбора состоянием системы и значениями параметров, известных агенту. Поэтому действия агентов имитируются в модели точно так же, как и любые другие события, – как прямые следствия из достигнутого состояния системы. И модельное время продвигается симулятором строго вперёд, в точном соответствии с механизмом причин и следствий.

В семантическом плане концепция агентов как самостоятельных, активно действующих сущностей оказывается чрезвычайно полезной при моделировании систем, в которых совокупное действие подобных сущностей приводит к эволюции, непредсказуемой с точки зрения отдельных агентов и иногда более «разумной», чем поведение любого отдельно взятого агента. Эта концепция существенно расширяет сферу практического использования ИМ, поскольку приводит к новым смыслам при интерпретации моделей, и она поддерживается новыми языковыми и графическими средствами ИМ [4, 34]. Кроме того, многоагентный подход может быть использован не только в системах ИМ общего назначения. Например, он весьма эффективно реализуется в аналитических моде-

лях экономики, разрабатываемых на ВЦ РАН под руководством академика РАН А.А. Петрова [35].

Во всех четырёх версиях ИМ симулятор-движок продвигает вперёд «не совсем мгновенный» текущий временной срез системы. Этот срез, а точнее – временной слой, имеет минимальную «толщину», необходимую для правильного определения ближайших предстоящих изменений и для правильного рекуррентного пересчёта показателей, требующего помнить моменты последних произошедших изменений. Минимальная толщина временного слоя системы, находящегося в поле зрения симулятора, позволяет ему при ограниченных ресурсах компьютера перемещаться в модельном времени сколь угодно далеко, безошибочно, за секунды продвигая вперёд это своё поле зрения вдоль миллионов фактов отслеживаемой им причинно-следственной цепи и достигая заданных ЛПР рубежей.

Известными достоинствами ИМ являются гибкость и возможность моделирования систем на любом уровне детализации или абстракции. Непосредственно в ходе имитационного эксперимента можно вводить дополнительные данные, конструировать новые информативные показатели, наблюдать графики изменения показателей и переменных, использовать видео или анимацию в реальном масштабе времени и качественно (не количественно) оценивать процессы на основании только наблюдения анимационной картины. Эти достоинства ИМ позволяют эффективно использовать его и для решения теоретических проблем, в симбиозе с аналитическим моделированием. При решении практических проблем управления и проектирования в последние годы в России (вслед за США и Европой) ИМ всё более широко используется как системообразующее и наиболее ценное звено процессов принятия решений [36].

7. Новые возможности GPSS

7.1. Исходные положения

Практические учебные занятия по дисциплине «Моделирование систем» проводятся с использованием языка имитационного моделирования GPSS [8, 13, 37–40] на основе учебного пособия [15]. В этом пособии даётся введение в теоретические основы ИМ, приводятся необходимые примеры разработки программ и моделирования конкретных систем, а также сообщаются сведения справочного характера, достаточные для самостоятельного использования GPSS в других задачах моделирования. Имеются электронные версии этого пособия, позволяющие во время занятий обеспечить необходимым методическим материалом каждого учащегося, включая тех, кто использует дистанционную форму обучения.

Однако со времени издания пособия [15] вышло множество новых версий системы моделирования GPSS. В настоящее время наиболее распространённой русскоязычной версией является GPSS World – современная версия GPSS для персональных ЭВМ и ОС Windows. В связи с этим возникла необходимость привести основные отличия GPSS World от системы GPSS/PC, описанной в [15]. Эти отличия перечисляются ниже с использованием терминологии, известной

пользователям GPSS/PC. Приведенного здесь материала достаточно для перехода в учебном процессе к применению GPSS World, поскольку концепция языка GPSS в целом не изменилась. Если читателям потребуется разработка сложных моделей не учебного, а производственного или научно-исследователь-ского назначения, рекомендуется использовать учебные пособия [37] и [38], в которых доступно и полно описываются все теоретические и практические аспекты использования GPSS World, или фирменную документацию [39, 40].

7.2. Общие сведения о GPSS World

GPSS (General Purpose Simulation System) – общецелевая система моделирования сложных систем, разработанная Джеффри Гордоном в 1960 г. в компании IBM. Первоначально разрабатывалась и поддерживалась компанией IBM. В настоящее время имеются версии различных разработчиков. В Интернете обширную информацию о системе предоставляют следующие русскоязычные источники:

http://www.gpss.ru – портал GPSS.RU, посвященный имитационному моделированию с использованием GPSS и других средств;

http://gpss-forum.narod.ru – сайт Юрия Носкова о GPSS.

Предлагаемое ниже описание новых возможностей GPSS представляет собой информацию, полученную с помощью этих источников и адаптированную к учебным планам специальности.

Система GPSS World, разработанная компанией Minuteman Software (США), – это мощная среда компьютерного моделирования общего назначения, разработанная для профессионалов в области моделирования. Она охватывает области как дискретного, так и непрерывного компьютерного моделирования. GPSS World – это прямое развитие языка моделирования GPSS/PC, одной из первых реализаций GPSS для персональных компьютеров.

Использование механизма виртуальной памяти позволяет моделям GPSS World реально достигать размера миллиарда байт. Вытесняющая многозадачность и многопоточность обеспечивают высокую скорость реакции на управляющие воздействия и дают возможность GPSS World одновременно выполнять множество задач.

Возможность перехода из дискретной фазы моделирования в непрерывную фазу и обратно обеспечивает тесную связь с непрерывным моделированием. В непрерывной фазе могут быть установлены пороговые значения, управляющие созданием транзактов в дискретной фазе.

На уровне интерфейса GPSS World представляет собой реализацию архитектуры «документ-вид», общей для всех приложений операционной системы Windows. Объекты могут быть открыты в нескольких окнах, изменены и сохранены на постоянных носителях информации. Реализовано привычное меню главного окна с блокировкой недоступных команд меню.

GPSS World сохраняет и развивает высокий уровень интерактивности во время процесса моделирования, достигнутый в GPSS/PC.

GPSS World отличается высоким уровнем визуализации выполняющегося процесса моделирования. Для наблюдения и взаимодействия с процессом моделирования используются двадцать различных окон, соответствующих боль-

шей части объектов GPSS. Для получения, сохранения и печати визуального представления состояния процесса моделирования не требуется дополнительных усилий, кроме операций с окнами. В GPSS World встроена функция комплексной стилизованной анимации. Эта функция обеспечивается большим количеством окон, которые динамически отображают объекты GPSS в процессе моделирования по мере изменения их состояния. Для создания такой анимации не требуется дополнительных усилий. Графические изображения могут быть сохранены для включения в отчеты и/или распечатаны.

GPSS World является версией GPSS, улучшенной встроенным языком программирования PLUS – языком программирования низкого уровня моделирования. Эта версия GPSS включает в себя 53 типа блоков и 25 команд, а также более чем 35 системных числовых атрибутов, которые обеспечивают текущие переменные состояния, доступные в любом месте модели.

PLUS – это небольшой, но эффективный процедурный язык программирования, созданный из 12 типов операторов. Его эффективность во многом обеспечивается большой библиотекой процедур, содержащей математические функции и функции манипуляции со строками и обеспечивающей богатый выбор вероятностных распределений для генерации случайных величин.

В GPSS World модель определяется как последовательность операторов. Это операторы GPSS, операторы PLUS-процедур или операторы PLUS-экспериментов. Все операторы GPSS (за исключением списков данных функции) должны состоять из одной текстовой строки длиной до 250 символов. Любой оператор GPSS может входить в модель и сохраняться в файле модели или может быть передан процессу моделирования в интерактивном режиме.

7.3. Основные нововведения

В языке моделирования был сделан ряд изменений. Было исключено понятие управляющих операторов. Теперь все операторы, не являющиеся операторами блоков GPSS, называются просто командами. Номера строк игнорируются в GPSS World. Если же они используются, то должны начинаться в первом столбце текстовой строки.

Также в GPSS World не применяется автоматическое округление. Теперь необходимо явно использовать процедуру Int() или какой-либо другой метод, если требуется округлять промежуточные числовые результаты. Это справедливо для всех выражений, а также для операторов VARIABLE и BVARIABLE. Теперь значения, возвращаемые системными числовыми атрибутами (СЧА), в зависимости от конкретного СЧА могут быть целого, вещественного или строчного типа. Даже СЧА, возвращающие значения в тысячных долях, выполняют это с помощью вещественных чисел двойной точности, лежащих в интервале от 0 до 1000 включительно. «Старые» округления и целочисленные СЧА могут быть использованы в коммерческой версии GPSS World в специальном режиме – режиме совместимости с GPSS/PC.

PLUS-операторы, в отличие от операторов GPSS, могут занимать любое количество текстовых строк. Математические выражения, заключенные в скобки, теперь могут использоваться почти везде, где используются СЧА. Выраже-

ния являются неотъемлемой частью языка PLUS, но они также используются для расширения возможностей операндов в операторах GPSS. Если выражения используются в операндах операторов GPSS, то они должны быть заключены в скобки. Также были добавлены новые типы операторов.

7.4. Новые операторы и типы данных GPSS

В GPSS World добавлены следующие новые блоки:

– ADOPT – изменяет номер семейства;

– DISPLACE – меняет транзакту следующий по порядку блок в последовательности блоков;

– PLUS – вычисляет значение PLUS-выражения и сохраняет результат в параметре;

– INTEGRATION – включает/выключает интегрирование переменной пользователя;

– OPEN – инициализирует поток данных;

– CLOSE – закрывает поток данных;

– READ – считывает следующую строку данных из потока данных;

– WRITE – передает значение величины в поток данных;

– SEEK – изменяет указатель строки в потоке данных.

Добавлены операторы, обеспечивающие управление интегрированием непрерывных переменных, применение составных файлов модели и библиотек процедур, а также вызов PLUS-экспериментов:

– CONDUCT – выполняет зарегистрированный PLUS-эксперимент;

– EXIT – завершает сеанс работы с GPSS World, при этом может сохранять объекты;

– INTEGRATE – автоматически вычисляет интеграл для переменной пользователя;

– INCLUDE – считывает и транслирует дополнительные файлы модели.

Новый системный числовой атрибут A1 возвращает семейство активного транзакта. Его удобно использовать совместно с новым блоком ADOPT, который позволяет изменять семейство активного транзакта.

Переменные могут принимать значения одного из четырех типов. Переменные, управляемые пользователем, такие как ячейки, элементы матриц, параметры транзактов и переменные пользователя, могут принимать целочисленное, вещественное, строковое и неопределенное значение. Значения времени могут быть целыми или вещественными двойной точности.

Преобразование типов происходит автоматически. Процедуры, которые требуют в качестве аргумента значение определенного типа данных, принудительно преобразуют аргумент к соответствующему типу. Например, если передаётся строка процедуре, которая требует числовое значение, то будет использован числовой эквивалент этой строки. Точно так же, если попытаться вывести (WRITE) числовое значение, оно будет автоматически преобразовано в текстовую строку.

Строковые величины имеют много вариантов использования. Они могут использоваться в потоках данных для создания отчетов и файлов с результатами, а также для прямого доступа к внутренним данным. Строковые константы

обозначаются заключением строки между парой двойных кавычек. Для представления двойных кавычек внутри строки используется пара двойных кавычек. Например, для представления одной строки внутри другой строки необходимо использовать 6 символов кавычек. Внутренняя строка (подстрока) заключается между двумя парами двойных кавычек, а итоговая строка будет заключаться между еще одной парой двойных кавычек. Библиотека процедур содержит много строковых процедур, которые могут использоваться для создания и манипулирования строковыми данными.

Теперь ячейкам и матрицам может быть присвоено значение UNSPECIFIED (неопределенный тип данных). Команда INITIAL позволяет присваивать это значение ячейкам, элементам матрицы и даже целым матрицам. Если элемент данных UNSPECIFIED был использован в операции, которая требует некоторого значения, произойдет останов по ошибке.

Матрицы могут иметь до 6 измерений. Динамические окна «Matrix» («Матрица») позволяют просматривать любые поперечные сечения матрицы, одновременно можно открыть любое количество таких окон. Для использования во время исполнения процедуры могут быть созданы временные матрицы. Для инициализации матрицы с тремя и более измерениями используются присваивающие PLUS-операторы.

GPSS World поддерживает широкое использование выражений. Они могут использоваться в PLUS-процедурах или в операторах GPSS (если заключены в скобки). Это означает, что в операндах блоков и команд могут производиться эффективные вычисления. Выражения могут производить простые вычисления, вызывать процедуры, выполняющие математические или строковые операции, производить выбор вероятностного распределения или выполнять заданные пользователем алгоритмы, включая файловый ввод-вывод.

7.5. Совместимость с GPSS/PC и отличия от него

GPSS World совместим с GPSS/PC и обычно выдаёт результаты, которые статистически неотличимы от результатов, выдаваемых GPSS/PC.

Кроме того, доступен ещё более высокий уровень совместимости, называемый режимом совместимости с GPSS/PC. В большинстве случаев можно достигнуть точного повторения результатов. Тем не менее GPSS World использует новую исполняемую библиотеку. Применяемый в нём метод округления чисел с плавающей запятой немного отличается от используемого в GPSS/PC. Но даже в этом случае большинство моделей GPSS/PC с небольшими изменениями могут давать идентичные результаты при выполнении под управлением коммерческой версии GPSS World в режиме совместимости с GPSS/PC.

Программирование в GPSS World имеет много отличий от программирования в GPSS/PC. Пакет GPSS World основывается на идее, что текстовый объект «Модель» формируется и/или модифицируется, а затем транслируется с целью создания объекта «Процесс моделирования». Этим он отличается от GPSS/PC, в котором используются понятия файла программы и процесса моделирования.

В GPSS World была полностью заменена операция загрузки модели, используемая в GPSS/PC. Вместо последовательного ввода и просмотра каждой

строки, одной за другой, в GPSS World применяется полноэкранный текстовый редактор. Любые ошибки, обнаруженные во время трансляции по команде меню Create Simulation, сохраняются в очереди сообщений об ошибках, поэтому они могут быть легко найдены и исправлены. Быстродействие транслятора гарантирует, что обнаружение и исправление ошибок происходит очень быстро. Ошибки, обнаруживаемые в течение трансляции, могут быть исправлены с помощью команды Next Error (Следующая ошибка) из меню Edit (Правка) главного окна. Курсор автоматически перемещается к ошибке, а в строке состояния внизу главного окна появляется сообщение об этой ошибке.

Заметным изменением по сравнению с GPSS/PC является отсутствие необходимости в нумерации строк, которая фактически игнорируются в GPSS World. Расположение блоков больше не определяется номером строки оператора блока, а определяется только относительным положением этой строки в файле модели, переданном транслятору. Так как новый оператор INCLUDE позволяет объектам «Модель» содержать в себе другие файлы текстового формата, объекты «Модель» представляют собой считываемую транслятором последовательность операторов, которая определяет расположение блоков в процессе моделирования.

Перечислим ещё некоторые изменения, целесообразность которых при переходе на платформу Windows практически очевидна.

1. Блок HELP больше не используется. Его заменили блоком PLUS, который поддерживает вложение в модель законченных процедур, а также блоками потоков данных, которые поддерживают связь с внешними файлами и программами.

2. Управляющий оператор MICROWINDOW был заменен окном «Expression» («Выражения»), которое может быть открыто с помощью подменю Window (Окно).

3. Управляющий оператор PLOT был заменен окном «Plot» («График»), которое может быть открыто с помощью подменю Window (Окно).

4. Управляющий оператор END был заменен командой EXIT, которая может завершать сеанс работы с GPSS World. Теперь END – ключевое слово языка PLUS.

5. Управляющий оператор WINDOW был заменен специальным подменю Window (Окно) в меню главного окна.

6. Управляющий оператор ANITRACE и блок MOVE больше не используются. Анимация в GPSS World обеспечивается потоками данных и постпроцессорами сторонних разработчиков. По той же причине больше не используются окно «Positions» и файл POSITION.GPS.

7. Символ «@», обозначавший вложение файлов, был заменен оператором INCLUDE, который использует в качестве операнда полный путь доступа к файлу, заключённый в двойные кавычки.

8. Системный числовой атрибут Z1 больше не отображает общий объем физической памяти. Теперь он возвращает значение максимального объема памяти, который может быть выделен, возвращаемое операционной системой.

9. Следующие функции управления исходным текстом, присутствовавшие в GPSS/PC, были заменены графическим интерфейсом пользователя, полноэк-

ранным редактором и соответствующими опциями: DELETE, DISPLAY, DOS, EDIT, RENUMBER и SAVE.

10. Изменились приоритеты операторов. Если возникают какие-либо проблемы, необходимо выделить скобками все операции в выражениях из программных файлов GPSS/PC.

8. Пример моделирования на GPSS World

Рассмотрим некоторые возможности GPSS World на примере одной задачи оптимизации производственного процесса. В [15] эта задача решается на GPSS/PC.

8.1. Задача оптимизации производственного процесса

Пример 16. Задача оптимизации ставится в [13, 15] следующим образом.

На трикотажной фабрике 50 швей работают на 50 машинах по 8 часов в день и по 5 дней в неделю. Любая из этих машин в любой момент во время работы может выйти из строя. В этом случае ее сразу заменяют резервной машиной. Если резервных машин нет, то швея простаивает до появления резервной машины, причем *почасовой убыток* от простоя одной швеи составляет 20 долларов. Тем временем сломанную машину передают в ремонтную мастерскую, где чинят в течение 7 ± 3 ч и возвращают в цех.

Известно, что *время наработки на отказ* для швейной машины составляет 157 ± 25 ч. Оплата одного рабочего в ремонтной мастерской – 3,75 доллара в час.

Для создания запаса резервных машин предлагается кроме собственных 50 машин арендовать еще несколько по цене 30 долларов в день.

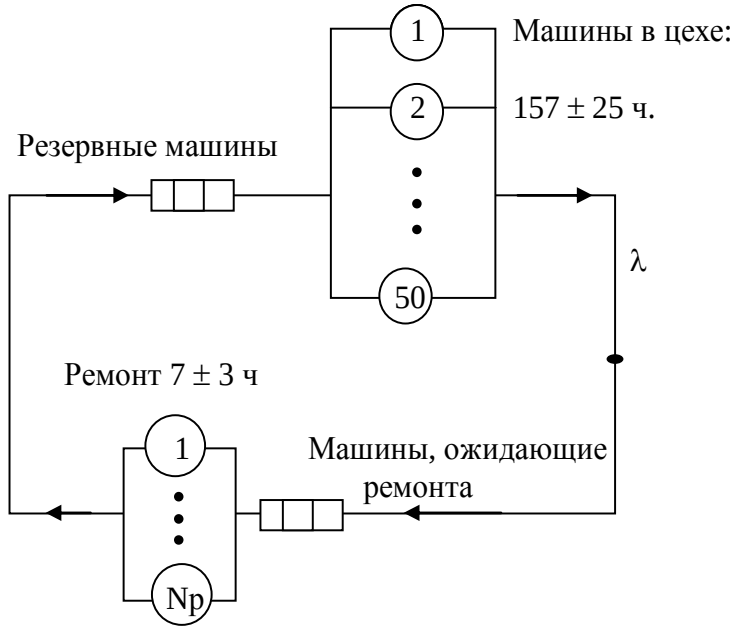


Рис. 1.18. Схема перемещения швейных машин

Управляющий должен решить, сколько рабочих следует нанять для работы в мастерской и сколько машин арендовать, чтобы средние ежедневные издержки производства были минимальны.

Схема описанного процесса, представлена на рис. 1.18. Поскольку разбор этой задачи подробно изложен в пособии [15] по имитационному моделированию на GPSS/PC, то далее будем отмечать лишь те изменения, на которые следует обратить внимание при переходе к использованию GPSS World.

8.2. Моделирующая программа

Запустите программу GPSSW, создайте через меню **File** новый документ (New) типа модель (Model). Имитационная модель, приведеная в [15], может быть перенесена в GPSS World практически без изменений. Её можно ввести заново или вставить (клавишами Ctrl-V) в окно модели путём копирования через буфер из текстового файла. Рекомендуется сразу отказаться от номеров строк, так как полноэкранный текстовый редактор GPSS World делает эти номера излишними. Введённая модель имеет вид, представленный на рис. 1.19.

Эта модель отличается от приведенной в [15] только отсутствием номеров строк и управляющей команды START. Обратите внимание: при вводе и редактировании модели удобно пользоваться клавишей Tab для того, чтобы текст программы располагался привычными колонками. Ещё одно отличие состоит в широкой свободе выбора шрифтов. В частности, все комментарии можно писать на русском языке, чего GPSS/PC делать не позволял.

После ввода модели выберите в меню Command опцию Create Simulation. В результате будет создано окно журнала с первыми строками протокола процесса моделирования в следующей форме:

```
04/15/06 21:54:51  Model Translation Begun.
04/15/06 21:54:51  Ready.
```

Теперь выберите в меню Command опцию Retranslate. Модель будет транслирована, и в журнал запишутся такие же строки. Они означают, что модель не содержит синтаксических ошибок. В случае наличия ошибок будет выдана информация, позволяющая их найти и исправить.

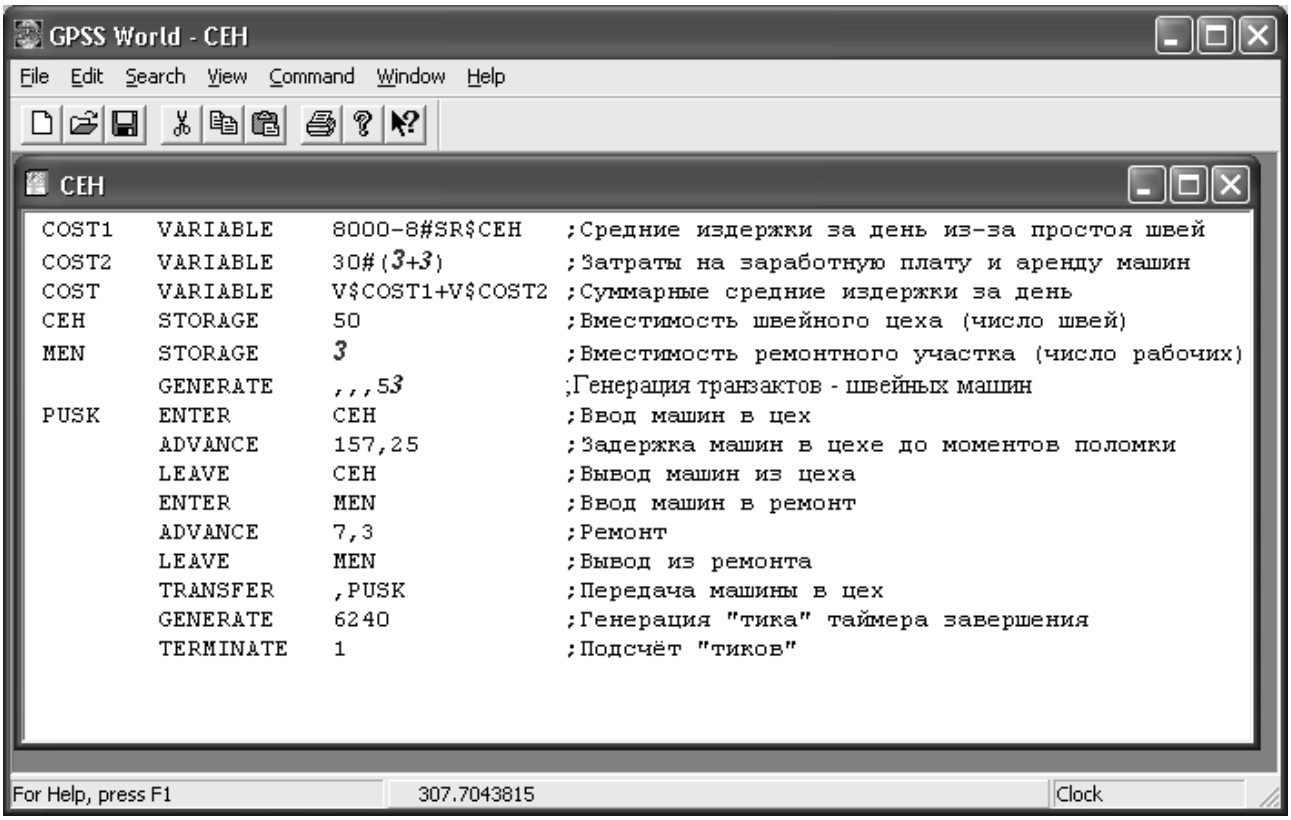


Рис. 1.19. Вид модели в GPSS World

Снова войдите в меню Command и выберите опцию Start 1. Предлагаемое начальное значение 1 в окне этой команды можно менять. После старта и завершения прогона модели автоматически создаётся окно с отчётом, близким по структуре к форматированному отчёту в GPSS/PC. В меню Command имеются и другие доступные опции, имеющие наименование команд GPSS/PC. Выберите, например, опцию SHOW… и запросите в её окне переменную V$COST. На нижней (серой) индикаторной панели появится значение 307.7043815 (см. рис. 1.19), которое имеет запрошенная переменная. Дробное значение этого результата немного отличается от целого числа 308, которое было получено в [15] при таком же счётчике команды START, равном единице. В GPSS/PC как время, так и коэффициент использования памяти R$CEH (см. первую строку модели на рис. 19) могут принимать только целые значения, и этим объясняются полученные расхождения. Выполненная команда SHOW и ответ на неё регистрируются также и в журнале сеанса моделирования. Журнал, модель и отчёты можно сохранять для возобновления работы с ними в последующих сеансах.

Этого опыта моделирования достаточно, чтобы решать на GPSS World задачи и использовать рекомендации, приведенные в [15]. Многооконный интерфейс системы интуитивно понятен и соответствует стандартным соглашениям операционной системы Windows. Кроме этого, имеется встроенная в систему помощь Help. Детальные описания возможностей GPSS World приводятся в [37–40].

8.3. Результаты решения оптимизационной задачи

С целью проверки влияния, которое в GPSS/PC оказывала искусственная дискретизация времени и показателей загрузки оборудования (памяти) на результаты оптимизации, проведём решение поставленной задачи до конца.

Используя обоснованное в пособии [15] начальное значение 20 для счётчика завершений команды START, проверим полученные там же оценки средних издержек при различных значениях числа N_P рабочих и числа N_M арендуемых для резерва машин (таблица на рис. 1.20 слева). Рекомендуется после каждого изменения параметров модели выполнять сброс накопленной статистики (команда Clear в меню Command) и ретрансляцию (команда Retranslate в меню Command). Выполнив соответствующие четыре эксперимента, получаем на GPSS World данные, представленные на рис. 1.20 в правой таблице (с округлением до одной цифры после точки).

Np \ Nм:	3	4	5
3	276 →	**258** ←	264
4		↑ 264	

N_P \ N_M:	3	4	5
3	271.4	**252.3**	260.2
4		262.6	

Рис. 1.20. Результаты оптимизации на GPSS/PC (слева) и на GPSS World

Примечательно, что вариант с тремя рабочими и четырьмя арендуемыми машинами по-прежнему оценивается как оптимальный. В то же время абсо-

лютные количественные оценки средних издержек V$COST, полученные разными версиями GPSS, существенно различаются. Числовая структура показателя V$COST такова, что в GPSS/PC вблизи точки оптимума его значение может изменяться только с шагом, кратным 6. Столь большой шаг дискретизации объясняет обнаруженное расхождение результатов, которое, в свою очередь, подчёркивает обоснованность перехода в GPSS World к вещественному типу времени и к вещественным СЧА.

8.4. Анализ потока ремонтируемых машин

Моделируемая система представляет собой замкнутую сеть массового обслуживания. Прохождение машин через какую-либо фиксированную точку сети (например, точку λ на рис. 1.18) образует поток случайных событий, представляющий собой сумму большого числа других потоков. В качестве отдельного слагаемого суммы потоков здесь могут рассматриваться, например, циклические перемещения через выбранную точку какой-то одной, фиксированной машины. Соответствующая предельная теорема теории вероятностей позволяет предположить, что суммарный поток здесь близок к пуассоновскому, т. е. что интервалы времени между двумя ближайшими прохождениями машин через точку λ имеют распределение, близкое к экспоненциальному.

Чтобы проверить эту гипотезу, добавим в исходную модель (это вариант трёх рабочих, трёх арендуемых машин, как на рис. 1.19) объект языка GPSS типа ТАБЛИЦА (TABLE). Для этого добавьте в начало модели следующие две строки:

```
TIMEINT    VARIABLE  C1-X1
STAT       TABLE     V$TIMEINT,0,0.5,40
```

Первая строка вычисляет интервал между текущим временем (это будет момент прохождения активного транзакта через точку λ) и сохранённым в ячейке X1 временем прохождения предыдущего транзакта. Вторая строка описывает таблицу, собирающую статистику по этим интервалам прохождения транзактов.

В GPSS-модели точке λ соответствует выход первого блока LEAVE. Вставьте после этого блока следующие две строки:

```
TABULATE   STAT
SAVEVALUE  1,C1
```

Здесь первая строка инициирует вычисление и учёт очередного интервала времени в таблице STAT, вторая сохраняет в ячейке X1 текущее значение времени для его использования следующим транзактом, когда он будет проходить точку λ.

Ретранслируйте модель и выполните команду START со счётчиком, имеющим достаточно большое значение, например START 50. После появления отчёта войдите в меню Window/Simulation Window/Table Window, выберите таблицу STAT (другой таблицы мы не создавали), нажмите Ok. В открытом вами окне таблицы (рис. 1.21) появится частотная гистограмма распределения интервалов времени с оценкой Mean среднего интервала времени и оценкой S.D. среднего квадратичного отклонения интервала времени.

Отметим, что найденное путём моделирования значение Mean = 3,175 близко к получаемой из [15, с. 34] приближённой теоретической оценке $1/\lambda$ = 157/50 = 3,14. Близость решений, получаемых разными методами, ещё раз подтверждает надёжность и качество системы моделирования GPSS World.

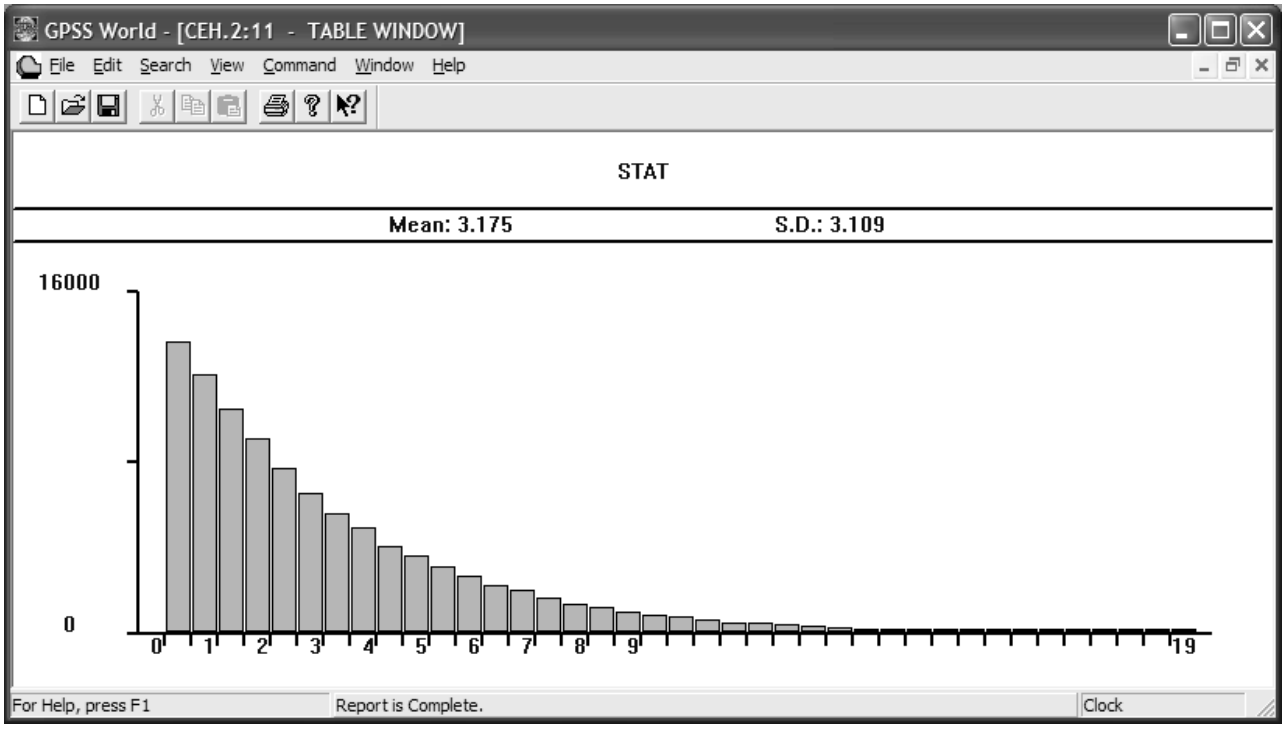


Рис. 1.21. Эмпирическое распределение вероятностей интервалов

Судя по форме гистограммы и по приблизительному равенству величин Mean и S.D., распределение интервалов времени между машинами, поступающими на ремонт, действительно близко к экспоненциальному распределению.

Если имеющиеся в последнем варианте модели строки

```
TABULATE   STAT
SAVEVALUE 1,C1
```

переместить и расположить после строки LEAVE MEN, то таблица будет собирать статистические данные об интервалах времени между выходами машин из ремонта. Проделайте это перемещение блоков. Перед стартом модели не забудьте сбросить старую статистику (CLEAR) и перетранслировать модель (Retranslate). Выполните команду START 50 и просмотрите новые результаты в окне таблицы STAT. Видно, что и после ремонта машин интервалы времени в потоке, хотя и с некоторой натяжкой, можно считать распределенными приблизительно экспоненциально (рис. 1.22).

Это позволяет применять для решения поставленной задачи приближённые аналитические методы моделирования [41]. В заключение заметим, однако, что применение вместо имитационного моделирования приближённых аналитических моделей связано с опасностью неконтролируемого выхода оптимизируемых параметров системы за пределы области адекватности упрощающих допущений.

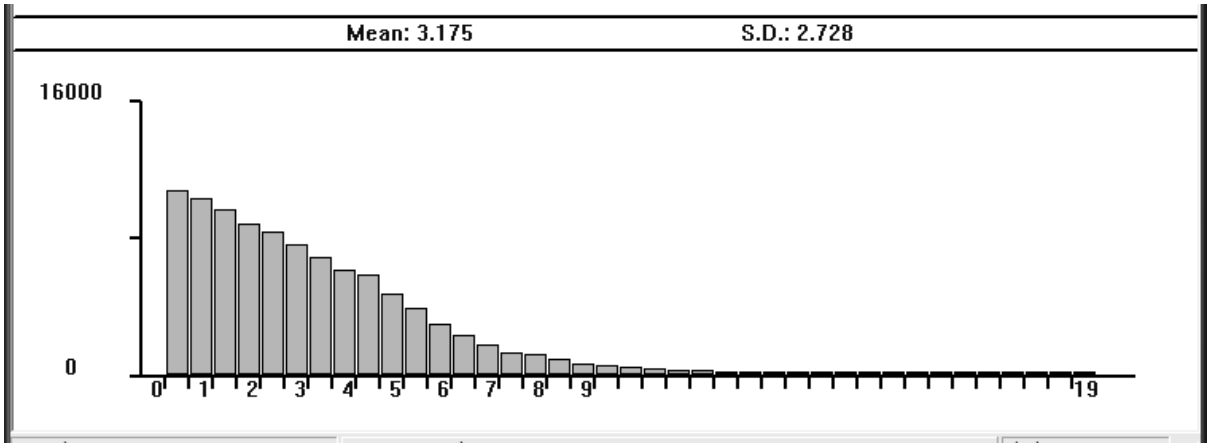


Рис. 1.22. Распределение интервалов поступления отремонтированных машин

В качестве примера, иллюстрирующего это заключительное замечание, выполним ещё один эксперимент.

Пример 17. Измените в строках с метками COST2 и MEN число рабочих с 3 на 2. Сбросьте старую статистику, перетранслируйте модель, выполните её и посмотрите диаграмму таблицы STAT (рис. 1.23).

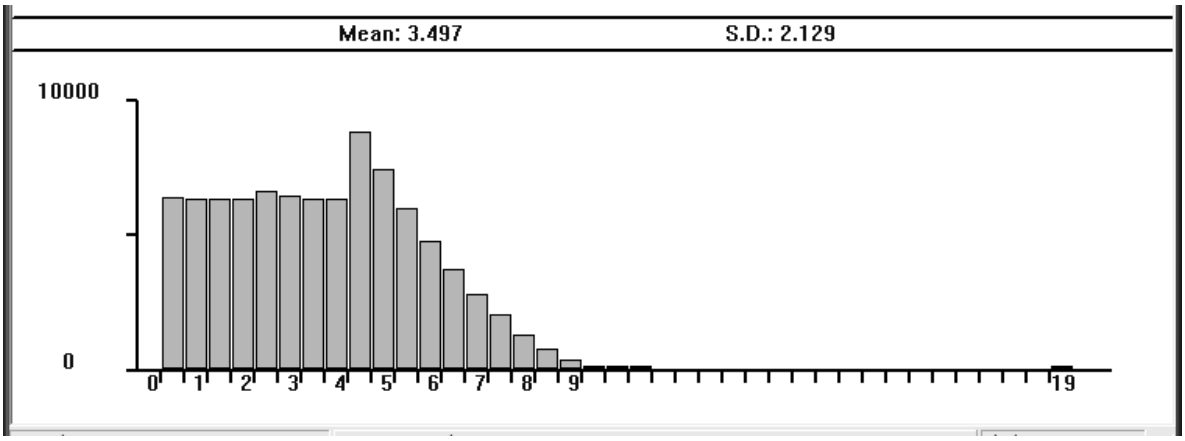


Рис. 1.23. Распределение интервалов после уменьшения числа рабочих

Как видно из диаграммы, минимальное изменение одного параметра привело к тому, что распределение интервалов стало явно не экспоненциальным.

Библиографический список к части 1

1. Бусленко, Н. П. Моделирование сложных систем / Н. П. Бусленко. – М. : Наука, 1988. – 600 с.

2. Ермаков, С. М. Статистическое моделирование / С. М. Ермаков, Г. А. Михайлов. – 2-е изд., доп. – М. : Наука, 1982. – 296 с.

3. Поляк, Ю. Г. Вероятностное моделирование на ЭВМ / Ю. Г. Поляк. – М. : Сов. радио, 1971. – 400 с.

4. Карпов, Ю. Г. Имитационное моделирование систем. Введение в моделирование с AnyLogic 5 / Ю. Г. Карпов. – СПб. : БХВ-Петербург, 2005. – 400 с.

5. Киндлер, Е. Языки моделирования / Е. Киндлер. – М. : Энергия, 1985. – 288 с.

6. Клейнен, Дж. Статистические методы в имитационном моделировании : пер с англ. / Дж. Клейнен ; под ред. Ю. П. Адлера и В. Н. Варыгина. – М. : Статистика, 1978. – Вып.1 – 221 с.; вып. 2 – 335 с.

7. Нейлор, Т. Машинные имитационные эксперименты с моделями экономических систем / Т. Нейлор. – М. : Мир, 1975. – 502 с.

8. Рыжиков, Ю. И. Имитационное моделирование. Теория и технологии / Ю. И. Рыжиков. – СПб. : КОРОНА принт; М. : Альтекс-А, 2004. – 384 с.

9. Соболь, И. М. Численные методы Монте-Карло / И. М. Соболь. – М. : Наука, 1973. – 212 с.

10. Соболь, И. М. Метод Монте-Карло / И. М. Соболь. – М. : Наука, 1978. – 64 с.

11. Советов, Б. Я. Моделирование систем : учеб. для вузов / Б. Я. Советов, С. А. Яковлев. – М. : Высш. шк., 2001. – 343 с.

12. Шеннон, Р. Имитационное моделирование систем – искусство и наука / Р. Шеннон. – М. : Мир, 1978. – 418 с.

13. Шрайбер, Т. Дж. Моделирование на GPSS / Т. Дж. Шрайбер ; пер. с англ. В. И. Гаргера, И. Л. Шмуйловича ; ред. М. А. Файнберг. – М. : Машиностроение, 1980. – 592 с.

14. Кутузов, О. И. Имитационное моделирование сетей массового обслуживания : учеб. пособие / О. И. Кутузов, В. Н. Задорожный, С. И. Олзоева. – Улан-Удэ : Изд-во ВСГТУ, 2001. – 228 с.

15. Задорожный, В. Н. Имитационное моделирование : учеб. пособие / В. Н. Задорожный. – Омск : Изд-во ОмГТУ, 1999. – 151 с.

16. Задорожный, В. Н. Статистическое моделирование : учеб. пособие / В. Н. Задорожный. – Омск : Изд-во ОмГТУ, 1996. – 92 с.

17. Кутузов, О. И. Аналитико-статистический метод для расчета высоконадёжных систем связи / О. И. Кутузов, В. Н. Задорожный // Техника средств связи. Техника проводной связи. – 1990. – Вып. 1. – С. 121–130.

18. Задорожный, В. Н. Программирование имитационных моделей : учеб. пособие / В. Н. Задорожный. – Омск : Изд-во ОмПИ, 1987. – 84 с.

19. Анализ разомкнутых экспоненциальных сетей массового обслуживания : метод. указания к лаб. работам / сост. В. Н. Задорожный. – Омск : Изд-во ОмПИ, 1986. – 32 с.

20. Потапов, В. И. Программные средства моделирования вычислительных систем : учеб. пособие / В. И. Потапов, В. Н. Задорожный, Е. М. Кузнецова. – Омск : Изд-во ОмПИ, 1984. – 80 с.

21. Потапов, В. И. Методология имитационного моделирования вычислительных систем : учеб. пособие / В. И. Потапов, В. Н. Задорожный, Е. М. Кузнецова. – Омск : Изд-во ОмПИ, 1983 – 80 с.

22. Харин, Ю. С. Практикум на ЭВМ по математической статистике : для мат. спец. ун-тов / Ю. С. Харин, М. Д. Степанова. – Минск : Университетское изд-во, 1987. – 304 с.

23. Ширяев, А. Н. Вероятность / А. Н. Ширяев. – М. : Наука, ГРФМЛ, 1980. – 576 с.

24. Боровков, А. А. Математическая статистика : учебник / А. А. Боровков. – М. : Наука, ГРФМЛ, 1984. – 472 с.

25. Мандельброт, Б. Фрактальная геометрия природы / Б. Мандельброт. – М. : Институт компьютерных исследований, 2002. – 656 с.

26. Статистическое моделирование : метод. указания к лаб. работам / сост. В. Н. Задорожный. – Омск : Изд-во ОмГТУ, 1997. – 36 с.

27. Гнеденко, Б. В. Математические методы в теории надёжности / Б. В. Гнеденко, Ю. К. Беляев, А. Д. Соловьёв. – М. : Наука, 1965. – 524 с.

28. Надёжность технических систем : справочник / Ю. К. Беляев, В. А. Богатырёв, В. В. Болотин [и др.] ; под ред. И. А. Ушакова. – М. : Радио и связь, 1985. – 608 с.

29. Рябинин, И. Д. Логико-вероятностные методы исследования надёжности структурно сложных систем / И. Д. Рябинин, Г. Н. Черкесов. – М. : Радио и связь, 1981. – 264 с.

30. Коваленко, И. Н. Методы расчёта высоконадёжных систем / И. Н. Коваленко, Н. Ю. Кузнецов. – М. : Радио и связь, 1988. – 176 с.

31. Левин, В. И. Логическая теория надёжности сложных систем / В. И. Левин. – М. : Энергоатомиздат, 1985. – 128 с.

32. Толуев, Ю. И. Применение имитационного моделирования для исследования логистических процессов / Ю. И. Толуев // Материалы II Всерос. конф. (ИММОД-2005). С.-Петербург. 19–21 окт. 2005. – СПб. : ФГУП ЦНИИ ТС, 2005. – Т.1. – С. 71–76.

33. Форрестер, Дж. Мировая динамика / Дж. Форрестер. – М. : АСТ, 2003. – 379 с.

34. Борщёв, А. В. Практическое агентное моделирование и его место в арсенале аналитика / А. В. Борщёв // Exponenta Pro. – 2004. – № 3–4 (См. также http://www/gpss.ru/index-h.html).

35. Петров, А. А. ЭКОМОД – Интеллектуальный инструмент разработки и исследования динамических моделей экономики / А. А. Петров, И. Г. Поспелов, Л. Я. Поспелова, М. А. Хохлов // Материалы II Всерос. конф. (ИММОД-2005). С.-Петербург. 19–21 окт. 2005. – СПб. : ФГУП ЦНИИ ТС, 2005. – Т. 1. – С. 32–41.

36. Задорожный, В.Н. Управление сложными техническими объектами и парадигмы имитационного моделирования / В. Н. Задорожный, И. И. Семёнова / Омский научный вестник. – 2006. – № 2(35).

37. Томашевский, В. Н. Имитационное моделирование в среде GPSS / В. Н. Томашевский, Е. Г. Жданова. – М. : Бестселлер, 2003. – 416 с.

38. Боев, В. Д. Моделирование систем. Инструментальные средства GPSS World : учеб. пособие / В. Д. Боев. – СПб. : БХВ-Петербург, 2004. – 368 с.

39. Руководство пользователя по GPSS World : пер. с англ. – Казань : Мастер-Лайн, 2002. – 384 с.

40. Учебное пособие по GPSS World : пер. с англ. – Казань : Мастер-Лайн, 2002. – 270 с.

41. Жожикашвили, В. А. Сети массового обслуживания. Теория и применение к сетям ЭВМ / В. А. Жожикашвили, В. М. Вишневский. – М. : Радио и связь, 1988. – 192 с.

ЧАСТЬ 2. ПРАКТИКУМ ПО СТАТИСТИЧЕСКОМУ МОДЕЛИРОВАНИЮ

Общие указания

Рекомендуемое распределение времени на подготовку и выполнение одной двухчасовой работы приводится в табл. 2.1.

Таблица 2.1

Рекомендуемое распределение времени на одну работу

Этап работы	Трудоёмкость, *мин*
1. Теоретическая подготовка к работе	45
2. Выполнение работы на компьютере	60
3. Оформление отчёта и защита работы	30

По всем работам каждый студент выполняет свой уникальный вариант задания.

Отчёты по выполненным работам оформляются и сдаются в установленном порядке. Для работы на компьютере рекомендуется использовать программу Ms Excel. Основу отчёта – файл типа .xls – рекомендуется сохранять в личных архивах до завершения аттестации по дисциплине.

Примечание. Решаемые в лабораторных работах учебные задачи призваны дать максимум полезной информации при умеренной сложности. Программа Ms Excel оказывается здесь наиболее подходящим рабочим инструментом, обеспечивающим без программирования высокую наглядность и гибкость экспериментов [5].

Лабораторная работа 1

РАЗРАБОТКА МУЛЬТИПЛИКАТИВНОГО ДАТЧИКА БСВ

Цель работы. Разработка и тестирование конгруэнтного мультипликативного датчика базовой случайной величины (БСВ).

Содержание работы.

1. Выбор параметров датчика БСВ (модуля, множителя и начального значения).
2. Реализация датчика БСВ на компьютере.
3. Тестирование длины периода датчика БСВ. Длина периода T должна отвечать требованию $T > 10000$.
4. Тестирование датчика на равномерность распределения.
5. Тестирование датчика на независимость БСВ.

Пояснения к выполнению работы

1. Формула мультипликативного конгруэнтного датчика БСВ имеет вид

$$z_i = A_i/m, \qquad A_i = kA_{i-1} \bmod m, \qquad i = 1, 2, \ldots \tag{2.1}$$

где z_i – очередное значение БСВ ($0 \le z_i \le 1$); m – модуль (большое целое число); k – множитель (большое целое число); A_0 – заданное начальное значение (целое); mod – операция вычисления остатка (от деления kA_{i-1} на m).

Рекомендации по выбору параметров m, k, A_0 приведены в учебном пособии [2].

2. Для ввода значений параметров m, k, A_0 отведите три ячейки листа Ms Excel. Последовательность чисел A_i, вычисляемых по формуле (2.1) для $i = 1, 2, ..., 10000$, сформируйте в свободном столбце, а рядом с ним – столбец из десяти тысяч чисел z_i. Формат ячеек с числами z_i рекомендуется задать как **Числовой** с четырьмя десятичными знаками после запятой.

3. Оценку длины периода датчика можно осуществить путем сравнения начального значения A_0 со всеми последующими числами A_i ($i = 1, ..., 10000$). Для этого удобно использовать функцию СЧЁТЕСЛИ. Если число обнаруженных с её помощью совпадений $\boldsymbol{A}_i$ с $\boldsymbol{A}_0$ оказывается больше нуля, то это означает, что $T \le 10000$, и поскольку такая длина периода не отвечает заданным требованиям, то модуль датчика m и/или его множитель k следует скорректировать.

Если же совпадения $A_i = A_0$ не обнаружится, то это еще не значит, что $T > 10000$, так как последовательность A_0, A_1, ... в общем случае имеет формат вида

$$a, b, ..., d, \underline{e, ..., g}, \underline{e, ..., g}, ..., \underline{e, ..., g}, \ldots, \tag{2.2}$$

т. е. может иметь наряду с периодом $\underline{e, ..., g}$ ещё и начальную непериодическую часть $a, b, ..., d$, включающую число $A_0 = a$. С учётом формата (2.2) для правильной оценки длины периода следует также проверить (для всех $i = 1, ..., 9999$) число совпадений вида $A_i = A_{10000}$. Хотя и отсутствие такого совпадения ещё не докажет, что $T > 10000$ (ибо не исключено, что длина начальной непериодической части может оказаться больше десяти тысяч), но это, по крайней мере, гарантирует, что все числа A_0, ..., A_{10000} (и, следовательно, все числа z_1, ..., z_{10000}) разные.

4. Тестирование полученной выборки псевдослучайных чисел z_1, ..., z_{10000} на равномерность их распределения проведите двумя методами: методом моментов и методом построения эмпирической функции распределения вероятностей (ф. р. в.) [3].

<u>*Метод моментов*</u> заключается в вычислении эмпирических моментов распределения случайной величины (с. в) по её выборке и их сравнении с теоретическими моментами. При достаточно большой длине выборки эмпирические моменты с. в., которые являются *приближёнными оценками* моментов, приближаются к точным, истинным значениям моментов её распределения.

Эмпирические моменты (синонимы: эмпирические оценки моментов) всякой с. в. x определяются по её выборке x_1, ..., x_N с помощью следующих формул.

Эмпирическая оценка $\hat{M}$ математического ожидания $M(x)$ определяется как среднее арифметическое выборочных значений x_i:

$$\hat{M} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i \ . \tag{2.3}$$

Оценку $\hat{D}$ дисперсии $D(x)$ будем определять по выборочным значениям соответственно как «среднее квадрата минус квадрат среднего»:

$$\hat{D} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \hat{M}^2 \ . \tag{2.4}$$

Существуют и другие (не эквивалентные приведенной) формулы для оценки дисперсии. Но, поскольку все состоятельные оценки дисперсии равноценны в том отношении, что с ростом N сходятся к точному значению $D(x)$, остановимся на самой простой из них оценке (2.4). В Ms Excel эта оценка вычисляется функцией ДИСПР.

Оценка $\hat{M}(x^k)$ начального момента k-го порядка $M(x^k)$ определяется как среднее арифметическое значение соответствующих степеней элементов выборки:

$$\hat{M}(x^k) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i^k \ . \qquad (2.5)$$

Вычислите оценки начальных моментов (при k = 1, …, 4) и эмпирическую дисперсию по выборке из десяти тысяч сгенерированных значений БСВ и сравните найденные оценки со следующими теоретическими значениями моментов, которые должна иметь с. в. z, равномерно распределённая на отрезке (0, 1):

$$M(z) = \frac{1}{2}\ ; \qquad D(z) = \frac{1}{12}\ ; \qquad M(z^k) = \frac{1}{1+k}\ ; \qquad (k = 1, 2, \ldots). \qquad (2.6)$$

Эмпирические моменты должны быть близки к этим теоретическим моментам.

Эмпирические моменты являются случайными величинами, поскольку представляют собой функции случайных величин. Сгенерируйте новую выборку из 10 тысяч значений БСВ z_i. Заметьте: если нажать ключ F9, ничего не изменится, так как вся выборка однозначно определена параметрами m, k датчика и начальным значением A_0. Новую независимую выборку можно получить, вводя другое значение A_0 (рекомендуется вводить нечётное число). При генерации разных выборок эмпирические моменты должны меняться, но оставаться близкими к соответствующим теоретическим моментам.

Метод построения эмпирической ф. р. в. Скопируйте 10 тысяч значений БСВ z_i и вставьте их в свободный столбец посредством меню **…специальная вставка/значения**. После этого отсортируйте полученный диапазон по возрастанию.

Запишите в соседнем справа столбце числа 0,0001, 0,0002, … , 1,0000. Это легко сделать, вводя два первых числа данной арифметической прогрессии в первые две ячейки столбца, выделяя потом их обе и затем щёлкая двойным щелчком мыши по маркеру заполнения в правом нижнем углу выделенного диапазона из двух клеток.

Теперь последние два построенных столбца содержат таблицу эмпирической ф. р. в. БСВ. Выделите диапазон из этих двух столбцов, выберите на панели инструментов мастер диаграмм, в его диалоговом окне – тип диаграммы «точечная», нажмите мышкой **Готово** и посмотрите на полученный график. Он должен мало отличаться от графика теоретической ф. р. в., описываемой уравнением $F(t) = t$ $(0 \le t \le 1)$.

5. Простейшую проверку независимости псевдослучайных чисел z_1, ... , z_{10000} можно осуществить, оценивая коэффициент корреляции между двумя последовательно выдаваемыми датчиком числами.

Для этого рекомендуется воспользоваться статистической функцией КОРРЕЛ, аргументы которой должны быть заданы в виде двух интервалов ячеек со значениями. В качестве первого интервала укажите диапазон ячеек, содержащий числа $z_1, \ldots, z_{9999}$, в качестве второго – диапазон $z_2, \ldots, z_{10000}$ (на листе второй диапазон – это первый, сдвинутый на одну ячейку вниз). Функция КОРРЕЛ вычисляет коэффициент корреляции, рассматривая каждую пару соответствующих элементов в указанных массивах как одну из реализаций пары коррелирующих с. в. Реализациями пары коррелирующих с.в. будут числа (z_1, z_2), (z_2, z_3), … , (z_{9999}, z_{10000}). Таким образом, вычисляемый здесь коэффициент корреляции представляет собой ту же оценку, которая предлагается в конспекте лекций [3, с. 8].

При отсутствии зависимости между БСВ оценка коэффициента корреляции будет сравнима с 0,01. Если она превышает 0,1, то это свидетельствует о заметной линейной зависимости между двумя последовательными БСВ. Скорее всего причиной такой зависимости является наличие короткого периода либо слишком малое значение множителя k. В любом случае такой датчик непригоден для практического использования и его параметры – модуль и/или множитель – следует изменить.

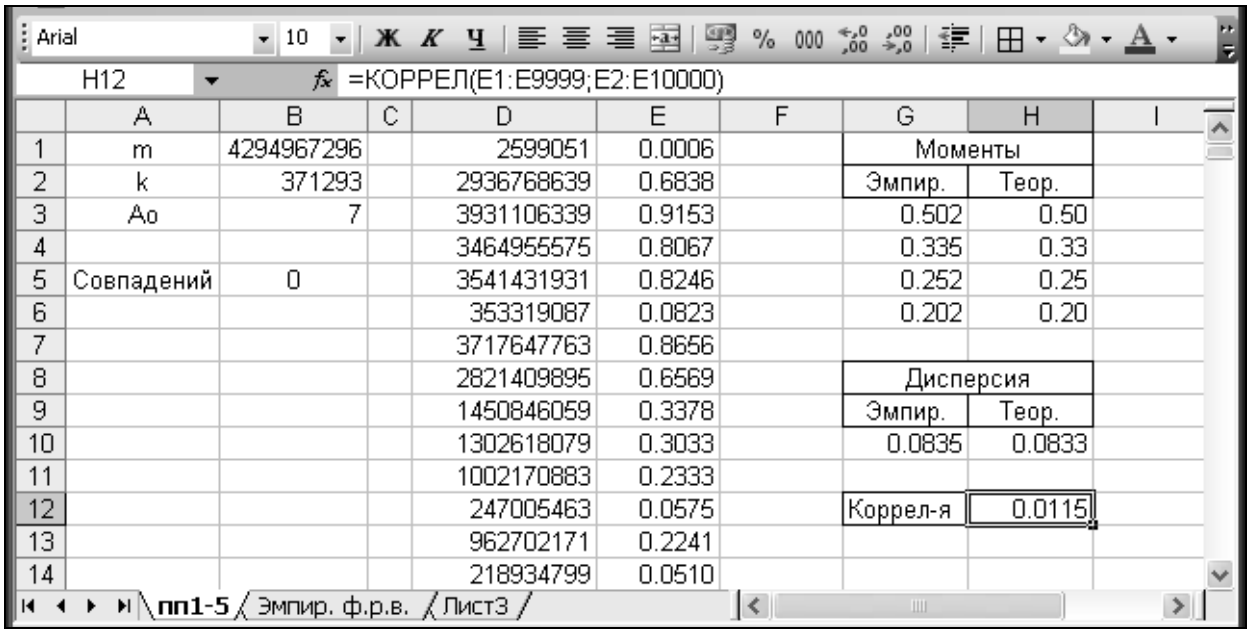
Измените несколько раз A_0 и понаблюдайте, как в разных выборках изменяется оценка коэффициента корреляции. Сохраните файл.

Варианты заданий

У всех студентов значения модуля и множителя должны быть уникальными. При защите работы преподаватель регистрирует их в журнале.

Форма отчёта

Листы в файле Ms Excel следует оформлять с пояснениями и заголовками, минимально необходимыми для понимания смысла представляемой этими листами информации, для обсуждения работы и для проверки её правильности во время защиты. Пример такого оформления (фрагмент листа) представлен на рис. 2.1.



	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	m	4294967296		2599051	0.0006		Моменты		
2	k	371293		2936768639	0.6838		Эмпир.	Теор.	
3	Ao	7		3931106339	0.9153		0.502	0.50	
4				3464955575	0.8067		0.335	0.33	
5	Совпадений	0		3541431931	0.8246		0.252	0.25	
6				353319087	0.0823		0.202	0.20	
7				3717647763	0.8656				
8				2821409895	0.6569		Дисперсия		
9				1450846059	0.3378		Эмпир.	Теор.	
10				1302618079	0.3033		0.0835	0.0833	
11				1002170883	0.2333				
12				247005463	0.0575		Коррел-я	0.0115	
13				962702171	0.2241				
14				218934799	0.0510				

Рис. 2.1. Фрагмент листа таблицы к лабораторной работе 1 (пример)

Контрольные вопросы

1. Что такое функция распределения вероятностей (ф. р. в.) $F(t)$ и плотность распределения вероятностей (п. р. в.) $f(t)$ случайной величины? Поясните вероятностный смысл каждой из этих функций.

2. Запишите формальные соотношения, выражающие п. р. в. $f(t)$ через ф. р. в. $F(t)$ и, наоборот, $F(t)$ через $f(t)$ для любой непрерывной с. в.

3. Какой вид имеют ф. р. в. и п. р. в. идеальной (математической) БСВ?

4. Почему числа z_1, z_2, ... на выходе датчика БСВ называют *псевдослучайными*?

5. Каким основным двум требованиям должна отвечать последовательность $z_1, z_2, ..., z_i, ...$ на выходе датчика, чтобы быть хорошей моделью идеальной БСВ?

6. Какими рекомендациями следует пользоваться при выборе параметров m и k мультипликативного конгруэнтного датчика БСВ?

7. Почему мультипликативный конгруэнтный датчик БСВ неизбежно выдаёт периодическую последовательность $z_1, z_2, ..., z_i, ...$? Какова максимально возможная длина периода T при заданных модуле m и множителе k?

8. Докажите, исходя из представления (2.2), что если $A_i \neq A_N$ для всех $i < N$, то все числа $z_1, ..., z_N$ разные.

9. Как можно вычислить вероятность интервала $p(a, b) = \mathrm{P}\{\mathrm{a} \le x \le \mathrm{b}\}$, если известна п. р. в. $f(t)$ случайной величины x?

10. Выведите формулу для определения вероятности $p(a, b)$ попадания базовой случайной величины в интервал (a, b).

11. Как можно вычислить м. о. случайной величины по её п. р. в.? Вычислите м. о. БСВ по её п. р. в.

12. Как вычислить дисперсию случайной величины по её п. р. в.? Вычислите дисперсию БСВ по её п. р. в.

13. Выведите формулу для вычисления начального момента k-го порядка базовой случайной величины.

14. Дайте определение статистической независимости с. в. Укажите необходимые и достаточные условия такой независимости.

15. Вытекает ли из равенства коэффициента корреляции нулю $\rho(x, y) = 0$ статистическая независимость с. в. x и y?

16. Вытекает ли из статистической независимости величин независимость функциональная? Вытекает ли из функциональной зависимости величин их статистическая зависимость?

17. Как вычислить коэффициент корреляции случайных величин x, y, если дана их совместная п. р. в. $f(t, t_2)$?

18. В каких пределах может находиться значение коэффициента корреляции? Каково его значение в случае независимости величин x, y? Каково его значение, если x, y *линейно* зависимы? Какую информацию о зависимости величин x, y даёт знак коэффициента корреляции?

Лабораторная работа 2

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИСКРЕТНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Цель работы. Разработка датчика дискретной с. в. и его испытания.

Содержание работы.

1. Разработка программного датчика заданной таблично дискретной с. в. x и генерация выборки из 10000 значений с. в. x.

2. Расчёт эмпирических оценок м. о. и дисперсии и их сравнение с требуемыми теоретическими значениями.

3. Построение гистограммы распределения и сравнение эмпирических вероятностей значений с. в. x с требуемыми теоретическими вероятностями.

4. Генерация пуассоновской с. в. с помощью встроенного генератора.

5. Сравнение эмпирических характеристик пуассоновской с. в. с теоретическими.

Пояснения к выполнению работы

1. В данной работе, как и во всех последующих, в качестве датчика БСВ используется встроенная в Ms Excel функция СЛЧИС.

Всякая дискретная с. в. x описывается конечным или счётным множеством возможных значений $x_1, x_2, \ldots, x_j, \ldots$ и их вероятностями $p_1, p_2, \ldots, p_j, \ldots$. Для того чтобы сгенерировать дискретную с. в., принимающую заданные значения с требуемыми вероятностями, интервал (0, 1) значений БСВ предварительно разбивается на отрезки, длины которых равны вероятностям $p_1, p_2, \ldots, p_j, \ldots$. Затем реализуется БСВ (т. е. вычисляется функция СЛЧИС), определяется номер j отрезка, в который попало значение БСВ, и соответствующее этому отрезку значение x_j выбирается в качестве сгенерированного выходного значения с. в. x.

Пусть, например, требуется реализовать дискретную с. в. x, принимающую значения $x_1 = 2$; $x_2 = 5$; $x_3 = 15$; $x_4 = -30$ и $x_5 = 3{,}14$ с вероятностями $p_1 = 0{,}1$; $p_2 = 0{,}15$; $p_3 = 0{,}45$; $p_4 = 0{,}2$ и $p_5 = 0{,}1$ соответственно. Если отрезки с длинами, равными перечисленным вероятностям, откладывать на числовой оси (0, t) вправо от нуля, то их правыми границами будут точки $t = 0{,}1$; $t = 0{,}25$; $t = 0{,}7$; $t = 0{,}9$ и $t = 1$. Запишите на чистом листе Ms Excel в диапазоне **B1:F2** следующую табличку чисел:

0,1	0,25	0,7	0,9	1
2	5	15	–30	3,14

В ячейку **A3** для получения БСВ введите формулу =СЛЧИС(). Теперь для реализации датчика нужной дискретной с. в. остаётся определить, между какими границами, указанными в верхней строке таблички, попадает значение БСВ, и выбрать соответствующее значение с. в. из нижней строки таблички.

Поскольку в Excel подобные условные операции организуются не самым очевидным образом, приведём подробную инструкцию, поясняющую, как это сделать.

В ячейку **B3** введите формулу =ЕСЛИ(($A3<B$1)*($A3>A$1);B$2;0). Эта формула выдаёт первое возможное значение с. в., если число в ячейке **A3** (это БСВ) находится в первом вероятностном отрезке, указанном ячейками **A1** и **B1**, т. е. от 0 до 0,1 (ячейка **A1** должна быть пустой). Скопируйте **B3** вправо на диапазон **B3:F3**. В нём появляется строка из нулей и одного значения, выбранного из таблички в качестве реализации с. в. *x*. Автоматический выбор этого значения организуйте в ячейке **G3**. Для этого запишите в неё формулу =СУММ(B3:F3). Нажимая ключ F9, убедитесь, что в **G3** теперь появляются возможные значения нашей дискретной с. в.

Теперь скопируйте строку **A3:G3** вниз на 10–20 строк, выделите и скройте столбцы **A-F**. Оставшийся видимым столбец **G** содержит только выборку значений заданной дискретной с. в. По ключу F9 эти значения обновляются.

На основе выполненного примера, путём корректировки использованных в нём данных, нетрудно построить датчик дискретной с. в., указанной для вашего конкретного варианта заданий. Постройте требуемый датчик и сгенерируйте выборку из 10000 значений с. в.

2. Чтобы рассчитать по выборке эмпирическое м. о. и эмпирическую дисперсию, используйте функции СРЗНАЧ и ДИСПР. Сравните найденные две эмпирические характеристики с точными теоретическими значениями м. о. и дисперсии, определяемыми по формулам:

$$M(x) = \sum_{j=1}^{K} p_j x_j \; ; \tag{2.7}$$

$$D(x) = \sum_{j=1}^{K} p_j x_j^2 - M^2(x) \, , \tag{2.8}$$

где в нашем случае $K = 7$. Для вычисления сумм в формулах (2.7) и (2.8) используйте функцию СУММПРОИЗВ.

Нажимая клавишу F9, понаблюдайте, как значения эмпирических оценок СРЗНАЧ и ДИСПР изменяются в результате изменения всей выборки, но остаются близкими к точным теоретическим значениям оцениваемых характеристик.

3. Для получения гистограммы эмпирического распределения воспользуйтесь командой меню **Сервис/Анализ данных…** (если опция **Анализ данных** в меню отсутствует, то нужно вначале в меню **Сервис/Надстройки…** выбрать пункт **Пакет анализа** и нажать **ОК**). Сформируйте на свободном месте столбец возможных значений вашей с. в., упорядоченных по возрастанию, – так называемые «карманы» (частотные интервалы), и войдите в меню **Сервис/Анализ данных…/Гистограмма**. В открывшемся диалоговом окне укажите в боксе **Входной интервал** диапазон ячеек, содержащих вашу выборку, в боксе **Интервал карманов** укажите диапазон карманов, затем в области **Параметры вывода** этого диалогового окна выберите опцию **Выходной интервал** и укажите в её боксе нужное вам положение таблицы для гистограммы (можно указать только её верхнюю левую ячейку). Нажмите ОК.

В указанном вами месте появится таблица из двух столбцов *Карман* и *Частота*. В этой таблице, непосредственно против указанных возможных значений вашей с. в. находятся эмпирические вероятности (относительные частоты встречаемости) этих значений в сгенерированной выборке. Сравните эти эмпирические вероятности с требуемыми точными вероятностями, заданными для вашего варианта работы.

Гистограмму распределения можно построить по выделенной таблице карманов и частот с помощью мастера диаграмм. Можно, например, в мастере диаграмм на вкладке **Нестандартные** выбрать тип **График | гистограмма**.

4. В Ms Excel в меню **Сервис/Анализ данных/Генерация случайных чисел** предоставляется возможность генерации выборок из следующего списка распределений: Равномерное, Нормальное, Бернулли, Биномиальное, Пуассона, Модельное и Дискретное. Рекомендуется поэкспериментировать с этими генераторами, так как они достаточно удобны в использовании. Их недостаток состоит лишь в том, что для обновления используемых выборок требуется повторно проходить меню.

Пуассоновская с. в. x является дискретной с. в. и может принимать значения 0, 1, ... , k, ... с вероятностями

$$p_k = \frac{a^k e^{-a}}{k!}, \tag{2.9}$$

где $a > 0$ – параметр распределения, равный м. о. (и одновременно дисперсии) пуассоновской с. в. x:

$$M(x) = a; \quad D(x) = a. \tag{2.10}$$

Алгоритм реализации пуассоновской с.в. на основе датчика БСВ приведен в [2].

Но здесь, для того чтобы сгенерировать 10000 значений пуассоновской с. в., используйте встроенный в Ms Excel генератор. Войдите в меню **Сервис/Анализ данных/Генерация случайных чисел**. В открывшемся диалоговом окне введите число переменных 1, число случайных чисел 10000 и выберите в разворачивающемся списке распределение Пуассона. Введите значение **Лямбда** (так здесь именуется параметр a), *равное номеру вашего варианта*, задайте так называемое «случайное рассеивание» (на самом деле это начальное значение локального датчика БСВ) и выходной интервал (достаточно указать верхнюю клетку столбца). Нажмите **ОК**.

5. После того, как Excel сгенерирует выборку значений пуассоновской с. в., найдите эмпирическое м. о., эмпирическую дисперсию и постройте гистограмму распределения. Сравните полученные результаты (включая вероятности значений с. в.) с точными теоретическими показателями, определяемыми по формулам (2.9) и (2.10).

Варианты заданий

Варианты *табличной* дискретной с. в. заданы в табл. 2.2. Варианты пуассоновской с. в. определяются параметром a: он должен быть равен номеру варианта.

Таблица 2.2

Варианты заданий к лабораторной работе 2

№		*j*						
		1	2	3	4	5	6	7
1	x_j	–73,4	–70,7	–51,5	–43,9	13,3	73,0	73,8
	p_j	0,241	0,023	0,166	0,078	0,272	0,192	0,028
2	x_j	–50,7	–21,8	–14,4	23,5	34,7	55,0	85,3
	p_j	0,159	0,157	0,166	0,089	0,136	0,137	0,156
3	x_j	–93,3	–73,2	–70,2	–55,6	–20,3	38,8	49,8
	p_j	0,099	0,061	0,160	0,159	0,171	0,176	0,174
4	x_j	–80,1	–77,2	–11,6	–11,3	36,2	42,4	79,1
	p_j	0,079	0,122	0,116	0,205	0,164	0,158	0,156
5	x_j	–72,4	–68,5	–68,4	–43,5	–6,5	1,2	31,0
	p_j	0,005	0,240	0,251	0,003	0,271	0,049	0,181
6	x_j	–21,4	4,6	17,1	20,1	37,1	39,1	93,4
	p_j	0,137	0,098	0,065	0,240	0,258	0,108	0,094
7	x_j	–40,1	–12,9	–8,8	3,6	7,4	37,2	59,1
	p_j	0,128	0,157	0,185	0,014	0,217	0,056	0,243
8	x_j	–96,9	–87,4	–55,7	–54,5	59,7	83,5	99,3
	p_j	0,114	0,090	0,270	0,192	0,086	0,242	0,006
9	x_j	–97,8	–80,7	–16,4	4,2	26,6	71,2	77,5
	p_j	0,050	0,248	0,206	0,124	0,127	0,186	0,059
10	x_j	–58,2	–57,7	–47,3	–30,2	–13,1	20,0	76,1
	p_j	0,105	0,091	0,220	0,052	0,271	0,124	0,137
11	x_j	–82,3	4,3	13,1	28,2	35,1	55,3	92,1
	p_j	0,285	0,152	0,070	0,056	0,288	0,126	0,023
12	x_j	-88,0	–66,5	–26,2	–4,5	–0,3	65,0	65,8
	p_j	0,186	0,246	0,139	0,157	0,207	0,015	0,050
13	x_j	–87,8	–86,6	–15,7	4,1	22,1	71,4	98,8
	p_j	0,044	0,017	0,140	0,162	0,153	0,246	0,238
14	x_j	–48,6	–34,1	–31,9	–16,5	–15,8	21,2	38,6
	p_j	0,195	0,089	0,020	0,139	0,198	0,244	0,115
15	x_j	–73,3	13,9	47,8	55,0	65,7	95,5	96,1
	p_j	0,162	0,201	0,136	0,221	0,110	0,070	0,100
16	x_j	–81,0	–43,0	–41,2	–1,5	24,5	38,7	85,3
	p_j	0,093	0,161	0,274	0,010	0,234	0,021	0,207
17	x_j	–69,3	–49,5	25,0	37,6	72,3	73,2	99,2
	p_j	0,193	0,085	0,003	0,057	0,037	0,265	0,360
18	x_j	–57,2	–36,1	–16,4	–2,4	30,0	34,2	55,1
	p_j	0,255	0,183	0,028	0,116	0,294	0,046	0,078
19	x_j	–49,3	–2,6	12,7	26,6	36,8	44,6	96,2
	p_j	0,159	0,078	0,218	0,186	0,093	0,108	0,158
20	x_j	–88,5	–47,4	–45,9	–27,3	0,0	58,1	93,1
	p_j	0,248	0,155	0,110	0,009	0,125	0,148	0,205

Форма отчёта

Листы в файле Ms Excel следует оформлять с пояснениями и заголовками, минимально необходимыми для понимания смысла представляемой этими листами информации, для обсуждения работы и для проверки её правильности (см. рис. 2.1).

Контрольные вопросы

1. Какое множество значений может принимать дискретная с. в.? Как задается распределение вероятностей дискретной с. в.?

2. Какое множество значений может принимать пуассоновская с. в.?

3. Как вычисляется м. о. и дисперсия дискретной с. в. по её распределению вероятностей?

4. Какие м. о. и дисперсию имеет пуассоновская с. в.? Выведите формулы (2.10) из распределения (2.9).

5. Какой вид имеет график распределения вероятностей пуассоновской с. в.?

6. При каком значении k вероятность p_k в формуле (2.9) достигает максимума?

7. Какой вид имеет ф. р. в. дискретной с. в.?

8. Поясните общий метод построения датчиков дискретных с. в. на основе БСВ.

9. Как по распределению дискретной с. в. вычислить вероятность ее попадания в заданный интервал (a, b)?

10. Докажите, что в распределении Пуассона (2.9) сумма вероятностей p_k всех возможных значений $k = 0, 1, 2, \ldots$ равна единице.

Лабораторная работа 3

МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕПРЕРЫВНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Цель работы. Разработка датчика непрерывной с. в. и его испытания.

Содержание работы.

1. Разработка программного датчика заданной таблично непрерывной с. в. x и генерация выборки из 10000 значений с. в. x.

2. Расчёт эмпирических оценок м. о. и дисперсии и их сравнение с точными теоретическими значениями.

3. Построение эмпирической ф. р. в. с. в. x и её сравнение с теоретической ф. р. в.

4. Реализация стандартной нормальной с. в. методом Бокса – Мюллера.

5. Сравнение эмпирических характеристик нормальной с. в. с теоретическими.

Пояснения к выполнению работы

1. Ф. р. в. $F(t)$ таблично заданной непрерывной с. в. x представляет собой кусочно-линейную функцию. В табл. 2.3 для каждого варианта заданий указаны координаты узловых точек A_j графика этой ф. р. в. в виде пар чисел t_j; y_j, где t_j – абсцисса точки A_j, y_j – ордината. На графике точки A_j соединяются отрезками прямых линий.

Для реализации с. в. x воспользуйтесь тем, что её можно рассматривать как смесь случайных величин, распределённых равномерно на интервалах (t_1, t_2), (t_2, t_3), и т. д. При этом вероятность попадания x в интервал (t_j, t_{j+1}) равна $F(t_{j+1}) - F(t_j) = y_{j+1} - y_j$, т. е. определяется из табл. 2.3 как разность ординат точек A_{j+1} и A_j. Это позволяет использовать для реализации x простой алгоритм, получаемый путём небольшой модификации алгоритма реализации дискретной с. в., применяемого в предыдущей работе. Модификация сводится к тому, чтобы, выбрасывая БСВ на ось ординат и определяя вероятностный интервал (y_j, y_{j+1}), в который попадает БСВ, разыгрывать (в качестве значения x) на соответствующем интервале (t_j, t_{j+1}) равномерную с. в.

Пусть, например, требуется реализовать непрерывную с. в. x, которая имеет кусочно-линейную ф. р. в. $F(t)$, заданную следующими узловыми точками: $A_1 = (-1;\ 0)$, $A_2 = (1;\ 0{,}2)$, $A_3 = (3;\ 0{,}6)$, $A_4 = (10;\ 1)$. Если ординаты перечисленных точек откладывать на числовой оси $(0, y)$ вверх от нуля, то получим точки $y_1 = 0$; $y_2 = 0{,}2$; $y_3 = 0{,}6$ и $y_4 = 1$. Абсциссами точек A_j являются точки $t_1 = -1$; $t_2 = 1$; $t_3 = 3$ и $t_4 = 10$. После выбрасывания БСВ и определения отрезка (y_j, y_{j+1}), в который она попала, можно просто разыграть x как с. в., равномерно распределённую на интервале (t_j, t_{j+1}), т. е. вычислить её по формуле

$$x = t_j + (t_{j+1} - t_j)\cdot z, \tag{2.11}$$

где z – новая независимая реализация БСВ.

Итак, запишите на чистом листе Ms Excel в ячейку **A1** формулу =СЛЧИС(). В ячейки **B1**, **C1**, **D1** введите следующие три формулы:

=(A1<0,2)*(2*СЛЧИС()-1)	=(A1>0,2)*(A1<0,6)*(1+2*СЛЧИС())	=(A1>0,6)*(A1<1)*(3+7*СЛЧИС())

В этих формулах неравенства в скобках принимают арифметические значения 1 или 0 в зависимости от того, выполняются они или нет. Таким образом, в одной из трёх ячеек **B1**, **C1**, **D1** реализуется значение с. в. x, в двух других будет 0.

В ячейку **E1** для фиксации разыгранной с. в. x введите формулу =СУММ(B1:D1). Теперь для генерации выборки скопируйте диапазон **A1:E1** на 1000 строк вниз. Скройте столбцы **A-D**. Оставшийся видимым столбец **E** содержит только выборку значений с. в. x. По ключу F9 эти значения обновляются.

На основе рассмотренного примера, путём корректировки использованных в нём данных, нетрудно построить датчик с. в., указанной для вашего конкретного варианта заданий в табл. 2.3. Постройте требуемый датчик и сгенерируйте выборку из 10000 значений с. в.

2. Эмпирическое м. о. и дисперсия определяются по выборке. Точные значения м. о. и дисперсии непрерывной с. в. определяются следующими формулами:

$$M(x) = \int_{-\infty}^{\infty} t \cdot f(t)\,dt; \tag{2.12}$$

$$D(x) = \int_{-\infty}^{\infty} t^2 \cdot f(t)\,dt - M^2(x). \tag{2.13}$$

Применение формул (2.12) и (2.13) к случаю кусочно-линейной ф. р. в. с узловыми точками A_j приводит к следующим расчётным выражениям:

$$M(x) = \sum_{j=1}^{K-1} (y_{j+1} - y_j) \cdot \frac{(t_{j+1} + t_j)}{2}; \qquad (2.14)$$

$$D(x^2) = \frac{1}{3} \sum_{j=1}^{K-1} (y_{j+1} - y_j) \cdot \left(\frac{t_{j+1}^3 - t_j^3}{t_{j+1} - t_j} \right) - M^2(x), \qquad (2.15)$$

где K – число узловых точек. Применение этих расчётных формул в Excel не представляет труда, если ординаты y_j и абсциссы t_j ввести в два соседних столбца ячеек.

3. График эмпирической ф. р. в. строится по выборке так же, как в лабораторной работе 1. На рис. 2.2 показан график эмпирической ф. р. в., построенный для рассмотренного в пункте 1 примера по выборке из N = 1000 значений с. в. x. На график эмпирической ф. р. в. наложен график заданного точного распределения вероятностей. При N = 1000 два графика ещё заметно различаются. При N = 10000 они у вас практически совпадут.

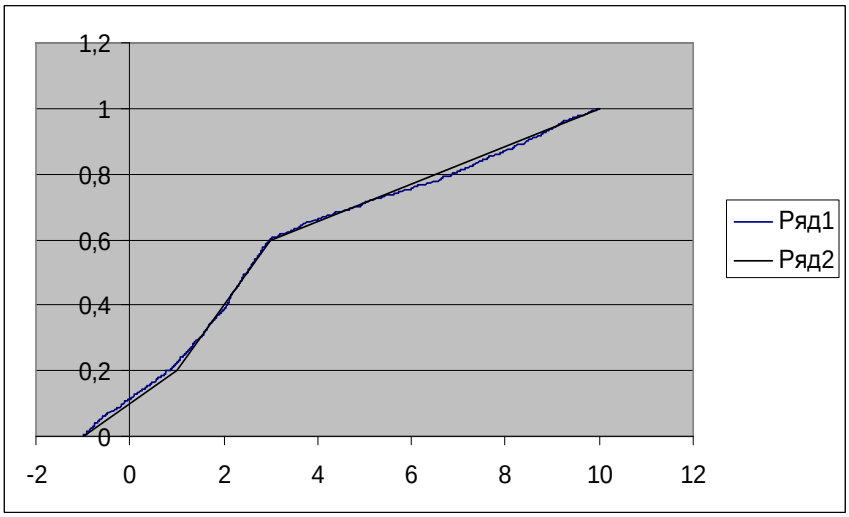


Рис. 2.2. Графики эмпирической и теоретической ф. р. в

4. Реализация стандартной нормальной с. в., имеющей нулевое м. о. $\mu = 0$ и единичное среднеквадратичное отклонение $\sigma = 1$, основана при использовании метода Бокса – Мюллера на следующем преобразовании:

$$\begin{cases} x_1 = \cos(2\pi z_1) \cdot \sqrt{-2\ln z_2} \\ x_2 = \sin(2\pi z_1) \cdot \sqrt{-2\ln z_2} \end{cases}. \qquad (2.16)$$

Преобразование (2.16) реализует два независимых значения x_1 и x_2 стандартной нормальной с. в. через два независимых значения z_1 и z_2 БСВ.

Введите на чистом листе Ms Excel формулу =СЛЧИС() в ячейки **A1** и **B1** для реализации в них двух независимых значений z_1 и z_2 и скопируйте на диапазон **A1:B5000**. В ячейках **C1** и **D1** запишите формулы для вычисления величин x_1 и x_2 по формулам (2.16) и скопируйте их вниз методом двойного щелчка.

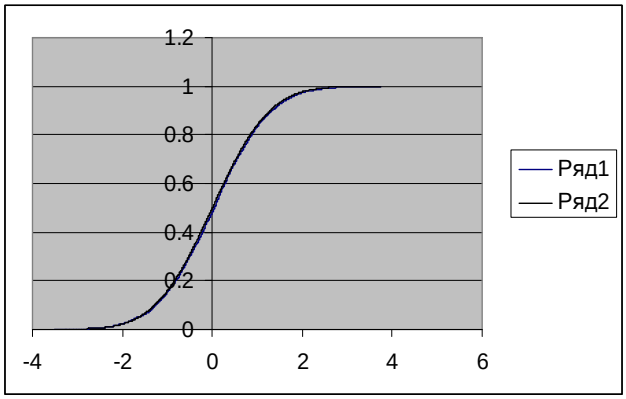


Рис. 2.3. Графики ф. р. в. стандартной нормальной с. в.

Так в двух столбцах **C** и **D** реализуется выборка из 10000 значений стандартной нормальной с. в.

5. Эмпирическое м. о. и эмпирическая дисперсия, определяемые по диапазону **C1:D5000**, должны быть близкими к теоретическим значениям $\mu = 0$ и $\sigma^2 = 1$.

По столбцу **C** или **D** (используя его копирование, специальную вставку и сортировку по возрастанию) постройте график эмпирической ф. р. в., которая в каждой точке x_i возрастает здесь на 1/5000 = 0,0002. Наложите на него график теоретической ф. р. в., вычисляемой в этих же точках x_i с помощью функции НОРМСТРАСП. Визуально оба графика совпадут практически полностью (рис. 2.3).

Варианты заданий

Таблица 2.3

Варианты заданий к лабораторной работе 3

№	A_1	A_2	A_3	A_4
1	0,7; 0	2; 0,1	5; 0,6	5,2; 1
2	2,2; 0	3,2; 0,3	3,7; 0,7	8,3; 1
3	2,1; 0	3,1; 0,7	7,3; 1	–
4	4,3; 0	6,2; 0,7	9,8; 1	–
5	1,3; 0	3,4; 0,7	5,4; 1	–
6	3,6; 0	5,8; 0,4	9,3; 1	–
7	–0,7; 0	3,2; 0,3	6,4; 1	–
8	3,4; 0	5,8; 0,3	6,9; 1	–
9	0,8; 0	6,4; 0,4	7,4; 0,6	8,4; 1
10	5,5; 0	7,9; 0,6	8,1; 0,8	8,4; 1

№	A_1	A_2	A_3	A_4
11	2,5; 0	2,6; 0,7	3,6; 0,8	4; 1
12	–1,5; 0	1,9; 0,4	2,2; 1	–
13	7,6; 0	7,9; 0,4	9,9; 1	–
14	4,6; 0	4,8; 0,3	4,9; 0,8	5,5; 1
15	–0,6; 0	2,6; 0,8	9,6; 1	–
16	6,7; 0	7,2; 0,8	7,7; 1	–
17	–0,3; 0	0,3; 0,3	0,8; 0,7	0,9; 1
18	8,5; 0	8,9; 0,1	9,1; 0,4	9,5; 1
19	4,1; 0	4,8; 0,3	5,5; 0,5	5,8; 1
20	1,8; 0	1,9; 0,7	2,6; 0,8	3; 1

Форма отчёта

Листы в файле Ms Excel следует оформлять с пояснениями и заголовками, минимально необходимыми для понимания смысла представляемой этими листами информации, для обсуждения работы и для проверки её правильности (см. рис. 2.1).

Контрольные вопросы

1. Запишите выражение для п. р. в. $f(t)$, которая соответствует вашему варианту ф. р. в. $F(t)$.

2. Выведите формулы (2.14) и (2.15).

3. Поясните смысл эмпирической ф. р. в. и метод её построения по выборке.

4. Сравните метод реализации с. в. с кусочно-линейной ф. р. в., использованный в данной работе, с методом обращения [2]. Чем отличалась бы реализа-

ция метода обращения вместо метода, используемого в работе? Запишите формулу для вычисления x по методу обращения после того, как установлен вероятностный интервал (y_j, y_{j+1}), на который попало значение БСВ.

5. Как на основе датчика *стандартной* нормальной с. в. x реализовать другую нормальную с. в. y, имеющую заданное ненулевое м. о. $\mu \neq 0$ и дисперсию $\sigma^2 \neq 1$?

Лабораторная работа 4

МОДЕЛИРОВАНИЕ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН МЕТОДОМ РЕЖЕКЦИИ

Цель работы. Разработка датчика с. в. методом режекции.

Содержание работы:

1. Разработка программного датчика с. в. x, имеющей заданную п. р. в. $f(t)$.

2. Реализация выборки, расчёт эмпирических вероятностных характеристик с. в. и их сравнение с точными теоретическими характеристиками.

Пояснения к выполнению работы

1. Метод режекции (метод исключения) изложен в общем виде в учебном пособии [2]. При его использовании в данной работе рекомендуется опираться на мажорирующую функцию $g(t) = G = \text{const}$ (рис. 2.4). Константа G должна отвечать условию $G \geq f(t)$ для всех $t \in (a,b)$, где (a,b) – область определения п. р. в. $f(t)$.

При таком выборе функции $g(t)$ алгоритм датчика с. в. x состоит из двух шагов.

Шаг 1. В прямоугольник с вершинами (a, G), (b, G), $(a, 0)$, $(b, 0)$ бросается случайная точка, координаты которой равномерно распределены в его пределах.

Шаг 2. Если эта случайная точка попадает ниже графика функции $f(t)$, то её абсцисса выдаётся в качестве реализации с. в. x. Иначе нужно вернуться к шагу 1.

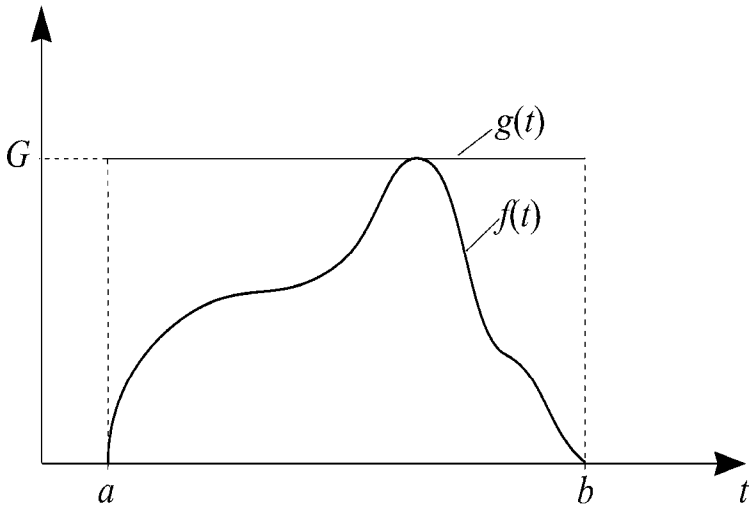


Рис. 2.4. К методу режекции

Реализацию с. в. методом режекции в Excel рассмотрим на следующем примере. Пусть требуется сгенерировать с. в. x, п. р. в. которой задана в следующем виде:

$$f(t) = \frac{5}{3} - \sqrt{t}; \qquad 0 \leq t \leq 1. \tag{2.17}$$

Очевидно, что здесь в качестве мажорирующей константы G можно взять величину $G = 5/3$. Следовательно, выбрасываемая нами случайная точка (x, y) должна иметь координаты, имеющие равномерное распределение в пределах

$0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 5/3$, и их можно разыграть в ячейках **A1** и **B1** по формулам =СЛЧИС() и =СЛЧИС()*5/3 соответственно. После этого нам остаётся в ячейке **C1** проверить, попало ли значение y ниже точки $f(x)$ кривой графика п. р. в., и принять или отвергнуть разыгранное значение x. Для этого запишите в **C1** формулу =ЕСЛИ(B1<5/3-КОРЕНЬ(A1);A1;"""). Эта формула выдаст в ячейке **C1** либо значение x, либо ничего, «пустой символ». Если выдаётся пустая ячейка, нужно нажать ключ F9. Датчик разработан. По аналогии с рассмотренным примером можно построить и датчик с. в. для той п. р. в., которая задана в вашем варианте.

2. Скопируйте ячейки **A1**, **B1** и **C1** вниз на 10000 строк, и в столбце **C** появится выборка значений с. в. x с заданным распределением вероятностей. Число N реализованных значений будет меньше десяти тысяч из-за исключения части реализаций.

Скопируйте диапазон **C1:C10000** и вставьте в столбец **E1** с помощью меню **Специальная вставка... /значения**. Отсортируйте вставленный столбец чисел по возрастанию. Все его пустые ячейки сместятся в конец. Рекомендуется выделить их и удалить (или очистить с помощью меню **Правка/Очистить/Всё**), чтобы было удобнее перемещаться по столбцу курсорными клавишами (Ctrl + «стрелка вниз/вверх»).

Проверку правильности разработанного датчика можно выполнить, рассчитывая по выборке эмпирические м. о. и дисперсию и сравнивая их с точными теоретическими значениями, определяемыми по формулам (2.12) и (2.13). Постройте также график эмпирической ф. р. в. и добавьте к нему (посредством контекстного меню диаграммы **Исходные данные.../Ряд/Добавить)** график вашей теоретической ф. р. в.

Варианты заданий

Варианты заданий приводятся в табл. 2.4. Функция $f(t)$ вне интервала (a, b) равна нулю. Значение нормирующей константы c следует определить самостоятельно, исходя из нормирующего условия:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = 1 \quad \Rightarrow \quad \int_{a}^{b} f(t)dt = 1 \quad \Rightarrow \quad F(b) = 1. \tag{2.18}$$

Таблица 2.4

Варианты заданий к лабораторной работе 4

№	$f(t)$	$(a,\ b)$	№	$f(t)$	$(a,\ b)$
1	$c\cdot(1\text{-}e^{-t})$	$(0,\ 1)$	11	c/t	$(1,\ e)$
2	$c\cdot(1+e^{t})$	$(0,\ 1)$	12	c/t^2	$(1,\ 2)$
3	$c\cdot(e^{t}+e^{-t})$	$(-1,\ 1)$	13	$c\cdot\sqrt{t}$	$(0,\ 3)$
4	$c\cdot\cos t$	$(0,\ 1)$	14	$c\cdot\sqrt{\lvert t\rvert}$	$(-1,\ 1)$
5	$c\cdot\cos t$	$(-\pi/2,\ 0)$	15	$c\cdot\lvert t\rvert$	$(-1,\ 1)$
6	$c\cdot\cos t$	$(-\pi/2,\ \pi/2)$	16	$c\cdot(1\text{-}t)$	$(0,\ 1)$
7	$c\cdot(\cos t+1)$	$(-\pi,\ \pi)$	17	$c\cdot t^2$	$(-1,\ 1)$
8	$c\cdot\sin t$	$(0,\ \pi/2)$	18	$c\cdot(1\text{-}t^2)$	$(-1,\ 1)$
9	$c\cdot(\sin t+1)$	$(0,\ 2\pi)$	19	$c\cdot(1\text{-}\lvert t\rvert)$	$(-1,\ 1)$
10	$c/\sqrt{t}$	$(1,\ 10)$	20	$c\cdot\lvert t^3\rvert$	$(-1,\ 1)$

Форма отчёта

В листы Ms Excel перед сдачей работы следует добавлять необходимые пояснения и заголовки, как показано на рис. 2.5.

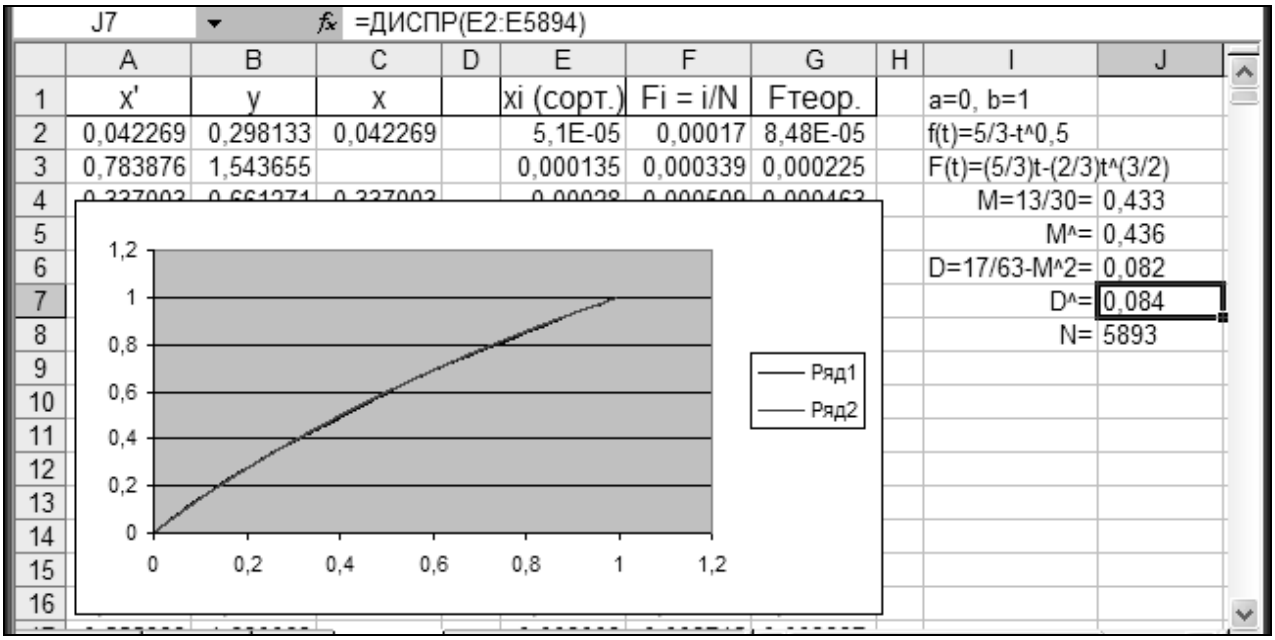


Рис. 2.5. Результаты выполнения лабораторной работы 4 (пример)

Контрольные вопросы

1. Нарисуйте приблизительный график вашей функции $f(t)$. Известно, что если $f(t)$ рассматривать как распределение единичной массы вдоль стержня (a, b), то центр тяжести стержня совпадёт с м. о. п. р. в. $f(t)$. Опираясь на этот факт, оцените качественно положение центра масс на вашем отрезке (a, b) и сопоставьте вашу качественную оценку с вычисленным значением м. о.

2. Дисперсия равномерного распределения на (a, b) составляет $(b–a)^2/12$. По графику вашей п. р. в. $f(t)$ оцените качественно, не будет ли её дисперсия явно больше или явно меньше, чем у равномерного распределения с. в. Проверьте, согласуется ли оценка с численным соотношением дисперсий вашей п. р. в. $f(t)$ и равномерной.

3. Обобщите метод режекции так, чтобы его можно было применять для построения датчика двухмерной с. в. (x_1, x_2) по её п. р. в. $f(t_1,t_2)$, заданной на ограниченной плоской области.

Лабораторная работа 5

РАСЧЁТ КРАТНОГО ИНТЕГРАЛА МЕТОДОМ МОНТЕ-КАРЛО

Цель работы. Вычисление двойного интеграла методом Монте-Карло.

Содержание работы.

1. Расчёт интеграла методом Монте-Карло.

2. Оценка погрешности расчёта путём определения доверительного интервала.

3. Расчёт интеграла по регулярной сетке.

Пояснения к выполнению работы

1. Пусть требуется вычислить значение двойного интеграла

$$I = \int_A h(t_1, t_2)\, dt_1 dt_2 , \qquad (2.19)$$

где A – заданная на плоскости область интегрирования (рис. 2.6).

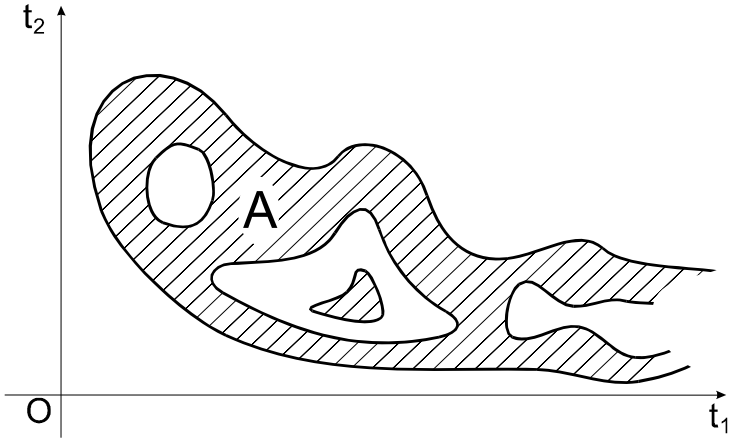


Рис. 2.6. Пример области интегрирования

Используя изложенный в [2, 3] способ сведения интегралов к форме м. о., преобразуем интеграл (2.19) следующим образом:

$$I = \int_A \frac{h(t_1,t_2)}{f(t_1,t_2)} f(t_1,t_2) dt_1 dt_2 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{H(t_1,t_2)}{f(t_1,t_2)} \right] f(t_1,t_2) dt_1 dt_2 , \qquad (2.20)$$

где $f(t_1,t_2)$ – любая п. р. в. двухмерной с. в., не равная нулю в области интегрирования A, а функция $H(t_1,t_2)$ определяется следующим образом:

$$H(t_1,t_2) = \begin{cases} h(t_1,t_2) \text{ при } (t_1,t_2) \in A, \\ 0 \text{ при } (t_1,t_2) \notin A. \end{cases}$$

Из выражения (2.20) видно, что искомый интеграл представляет собой м. о. функции двух с. в. x_1 и x_2, распределённых в соответствии с совместной п. р. в. $f(t_1,t_2)$, а именно:

$$I = M\left[\frac{H(x_1,x_2)}{f(x_1,x_2)} \right]; \qquad (x_1,x_2) \sim f(t_1,t_2). \qquad (2.21)$$

Если в формуле (2.21) использовать независимые с. в. x_1 и x_2 с плотностями $f_1(t)$ и $f_2(t)$ соответственно, то их совместная п. р. в. $f(t_1,t_2) = f_1(t_1)f_2(t_2)$, и тогда

$$I = M\left[\frac{H(x_1,x_2)}{f_1(x_1) f_2(x_2)} \right]; \quad x_1 \sim f_1(t);\ x_2 \sim f_2(t). \qquad (2.22)$$

В форме (2.22) интеграл рассчитывается статистическим методом проще, чем в форме (2.21), так как датчики для одномерных независимых с. в. x_1 и x_2 реализуются легче, чем для двухмерных зависимых с. в.

В данной лабораторной работе требуется вычислить двойной интеграл в конечной области A, поэтому в целях упрощения расчётов можно использо-

вать равномерно распределённые с. в. $x_1 \sim R[a, b]$, $x_2 \sim R[c, d]$, где интервалы (a, b) и (c, d) заданы так, чтобы охватить всю область A (рис. 2.7).

В этом случае выражение для м. о. (2.22) упрощается. Поскольку при таких равномерно распределённых x_1 и x_2 имеет место

$$f_1(t) = 1/(b - a), \qquad t \in (a, b); \tag{2.23}$$

$$f_2(t) = 1/(d - c), \qquad t \in (c, d), \tag{2.24}$$

то, подставляя п. р. в. (2.23) и (2.24) в формулу (2.22), находим:

$$I = (b - a)(d - c)\cdot M[H(x_1,x_2)]. \tag{2.25}$$

Расчёт интеграла, основанный на формуле (2.25), сводится к тому, чтобы оценить м. о. $M[H(x_1,x_2)]$ функции $H(x_1,x_2)$ по достаточно большому числу случайных точек (x_1,x_2), равномерно распределенных на двухмерном интервале $(a, b)\times(c, d)$. Напомним, что усредняемая функция $H(x_1,x_2)$ равна $h(x_1,x_2)$ при попадании точки (x_1,x_2) в область A и нулю – в противном случае.

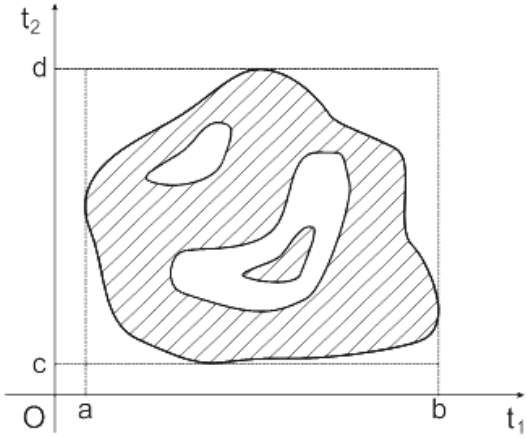


Рис. 2.7. К выбору интервалов (a, b) и (c, d)

Координаты точек (x_1,x_2) легко можно разыграть в двух столбцах на листе Ms Excel, используя функцию СЛЧИС.В соседнем столбце также нетрудно вычислить значения функции $H(x_1,x_2)$, которые она имеет в этих точках. Далее, используя эмпирическое м. о. этой функции вместо точного, остаётся вычислить, в соответствии с формулой (2.25), приближённое значение искомого интеграла:

$$\hat{I} = (b - a)(d - c)\hat{M}\left[H(x_1 x_2)\right]. \tag{2.26}$$

2. Оценка погрешности расчёта интеграла сводится к определению выборочной дисперсии $\hat{D}$ по столбцу значений функции H; доверительный интервал для точного значения интеграла I при длине выборки N таков: с вероятностью 1– 0,0027

$$|\hat{I} - I| < 3\cdot\sqrt{\hat{D}/N}\cdot(b - a)(d - c). \tag{2.27}$$

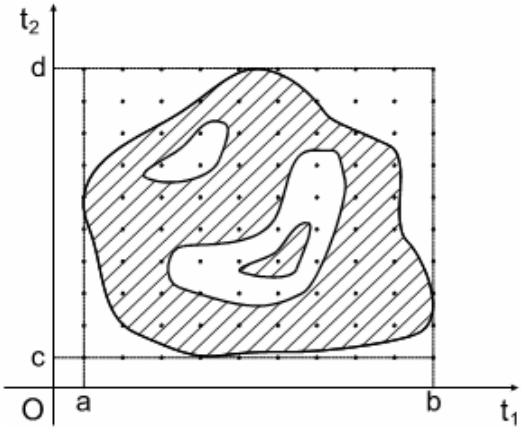


Рис. 2.8. К расчету интеграла по регулярной сетке

Граница для погрешностей $3\cdot\sqrt{\hat{D}/N}\cdot(b - a)(d - c)$ убывает пропорционально корню квадратному из длины выборки N.

3. Регулярную сетку для расчета интеграла определим как множество точек T_{ij} с координатами $(x_i, y_j) = (a+i\Delta_1,\ b+j\Delta_2)$, где $\Delta_1 = (b–a)/100$, $\Delta_2 = (d–c)/100$; $i = 1, ..., 100$, $j = 1, ..., 100$ (рис. 2.8). Таким образом, сетка содержит всего $N = 100\times100 = 10000$ точек.

Если значение функции H в точке T_{ij} обозначить через H_{ij}, то сеточную оценку I_C определённого интеграла I можно вычислить по формуле

$$I_C = (b-a)(d-c)\cdot\frac{1}{N}\sum_{i,j} H_{i,j}. \qquad (2.28)$$

Координаты точек T_{ij} можно быстро получить с помощью приёма, описанного в конспекте лекций [3]. В столбец **A** введите арифметическую прогрессию 0, 1, …, 9999 посредством меню **Правка/Заполнить/Прогрессия…** . В ячейку **B1** запишите формулу =ЦЕЛОЕ(A1/100)/100, а в ячейку **C1** – формулу =ОСТАТ(A1;100)/100. Скопируйте ячейки **B1** и **C1** вниз на 10000 строк. Теперь в диапазоне **B1:C10000** построчно записаны координаты 10000 точек, регулярной сеткой покрывающих единичный квадрат. С помощью линейного преобразования полученных величин сформируйте в соседних столбцах **D** и **E** координаты точек T_{ij}, покрывающих регулярной сеткой требуемый интервал $(a, b)\times(c, d)$. Через эти координаты уже непосредственно определяются значения H_{ij} и сеточная оценка интеграла (2.28), соответствующая вашему варианту задания.

Варианты заданий

В данной лабораторной работе требуется вычислить кратный интеграл

$$I = \int_A h(x, y)dxdy\ ,$$

в котором

$$h(x,y) = \frac{\sin\sqrt{(x+r)^2+y^2} + \sin\sqrt{(x-r)^2+y^2}}{4\pi r^2}, \qquad (2.29)$$

а область интегрирования A определена как часть плоскости, лежащая внутри круга $x^2+y^2 \le (2r)^2$, причём только в тех его подобластях, где $h(x,y) \ge 0$.

Параметр r определяется в зависимости от номера варианта № по формуле

$$r = № + 10, \quad (№ = 1, ..., 20). \qquad (2.30)$$

На рис. 2.9 изображена типичная конфигурация подобластей интегрирования, определяемых условием $h(x,y) \ge 0$ (на рисунке они заштрихованы). Анализ условия $h(x,y) \ge 0$ показывает, что точка F_1 с координатами $(-r, 0)$ и точка F_2 с координатами $(r, 0)$ являются фокусами гипербол и эллипсов, образующих границы заштрихованных подобластей. Часть этой заштрихованной площади, заключенная в круге с заданным радиусом $2r$ и с центром в точке O, является областью интегрирования A.

График подынтегральной функции (2.29) имеет вид, представленный на рис. 2.10. Эта функция является «мгновенным снимком» интерферирующих волн, поднятых двумя камнями, одновременно упавшими на поверхность воды в точках F_1 и F_2. «Физический смысл» рассчитываемого интеграла – это средняя высота, на которую поднялись волны в фиксированный момент времени в пределах круга радиуса $2r$.

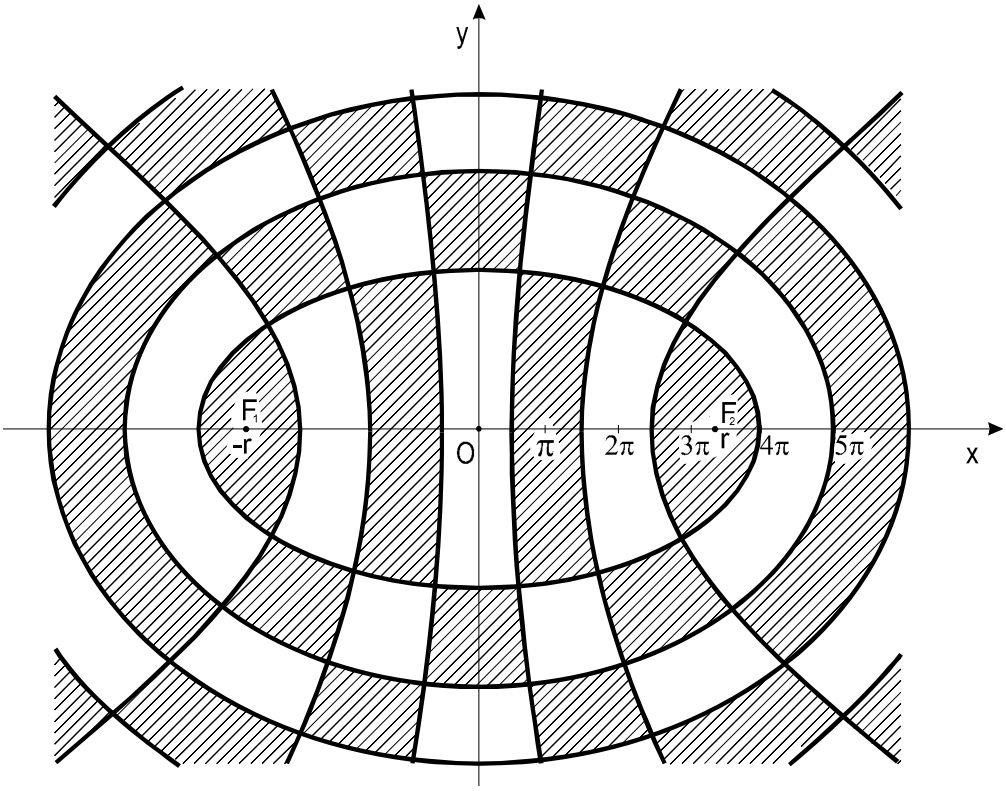


Рис. 2.9. Конфигурация области, заданной условием $h(x,y) \geq 0$

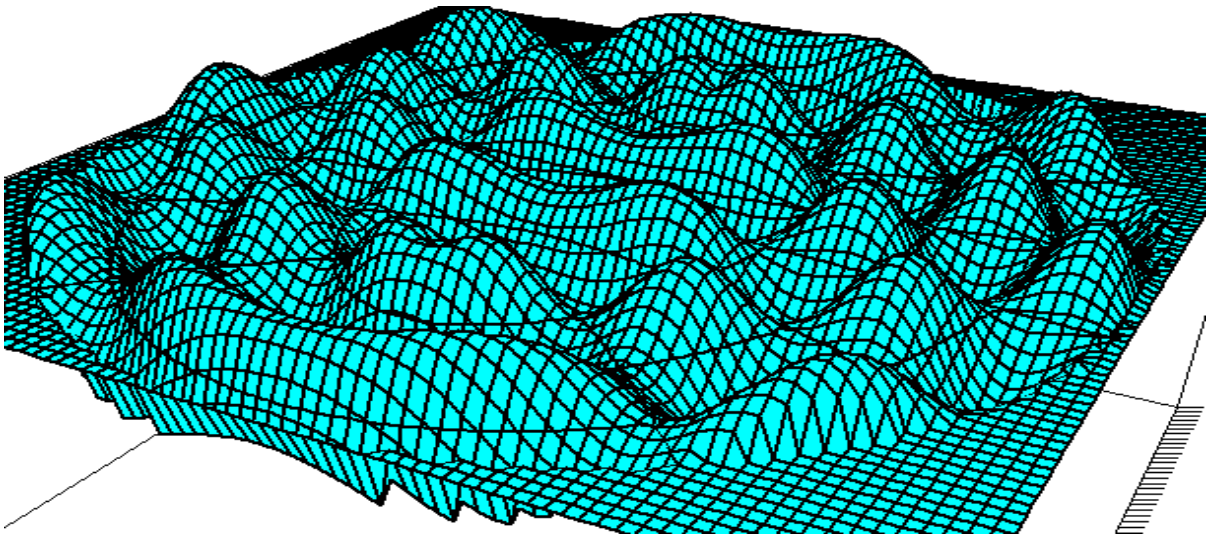
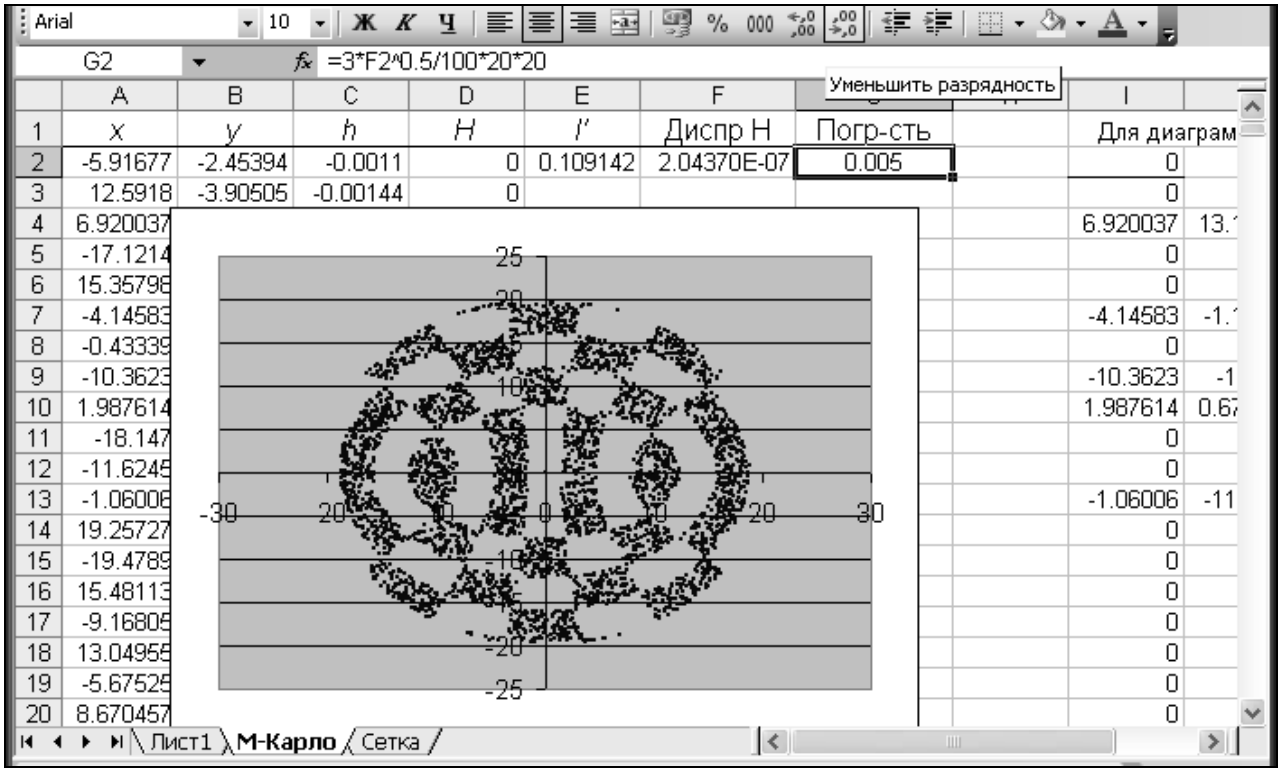


Рис. 2.10. Трёхмерный график подынтегральной функции $h(x,y)$

Форма отчёта

В листы Ms Excel перед сдачей работы следует добавлять необходимые пояснения и заголовки (как показано на рис. 2.11). В целях контроля правильности выполнения работы рекомендуется использовать имеющиеся в Ms Excel удобные средства построения диаграмм.

На листе Ms Excel, представленном на рис. 2.11, построена точечная диаграмма, отображающая те случайные точки, которые попадают в область интегрирования *A*.



	A	B	C	D	E	F		I
1	x	y	h	H	I'	Диспр H	Погр-сть	Для диаграм
2	-5.91677	-2.45394	-0.0011	0	0.109142	2.04370E-07	0.005	0
3	12.5918	-3.90505	-0.00144	0				0
4	6.920037							6.920037
5	-17.1214							0
6	15.35798							0
7	-4.14583							-4.14583
8	-0.43339							0
9	-10.3623							-10.3623
10	1.987614							1.987614
11	-18.147							0
12	-11.6245							0
13	-1.06006							-1.06006
14	19.25727							0
15	-19.4789							0
16	15.48113							0
17	-9.16805							0
18	13.04955							0
19	-5.67525							0
20	8.670457							0

Рис. 2.11. Пример оформления листа для отчёта по лабораторной работе 5

Контрольные вопросы

1. Обобщите формулы (2.19) – (2.27) на случай n-мерного интеграла.

2. Какие п. р. в. $f_1(t)$ и $f_2(t)$ вы могли бы предложить для формулы (2.22), если бы область интегрирования A была бесконечной? (Заметим, что равномерного распределения на бесконечных интервалах не существует.)

3. Обобщите рекомендации по ускорению сходимости метода Монте-Карло, изложенные в [2], на случай вычисления двойного интеграла.

4. Как зависит точность оценки $\hat{I}$ от длины выборки N?

5. Опишите в общих чертах применение метода регулярной сетки для интегрирования функции n переменных.

6. Можно ли использовать метод регулярной сетки в случае, когда область интегрирования A бесконечна?

7. В чем состоит принципиальное отличие метода Монте-Карло от пошаговых методов расчёта интегралов?

8. Как при равных требованиях к точности зависят затраты машинного времени (т. е. число циклов расчёта) от размерности интеграла: а) при использовании метода Монте-Карло; б) при использовании метода регулярной сетки?

9. Рассмотрите рис. 2.9–2.11 и найдите на них положение эпицентров F_1 и F_2.

Лабораторная работа 6

РАСЧЁТ НАДЁЖНОСТИ МЕТОДОМ МОНТЕ-КАРЛО

Цель работы. Расчет надёжности методом статистического моделирования.

Содержание работы.

Расчёт надёжности системы аналитическим методом и методом статистического моделирования.

Пояснения к выполнению работы

Надёжность системы, представленной в виде надёжностного графа (рис. 2.12), следует рассчитать аналитическим методом и методом статистического моделирования. Необходимые для этого рекомендации изложены в пособиях [2] и [3].

Непосредственная статистическая оценка $\hat{Q}$ вероятности Q отказа системы определяется при общем числе опытов N по числу $N_{\text{отк}}$ тех опытов, в которых произошел отказ системы, следующим образом:

$$\hat{Q} = N_{\text{отк}} / N. \tag{2.31}$$

В качестве показателя точности оценки $\hat{Q}$ будем использовать «размах» её относительной погрешности δ, введённый в конспекте лекций [3, с. 32]:

$$|\delta| \le \frac{3}{\sqrt{N_{\text{отк}}}}. \tag{2.32}$$

Неравенство (2.32) представляет собой доверительный интервал и выполняется с вероятностью 0,997, весьма близкой к единице.

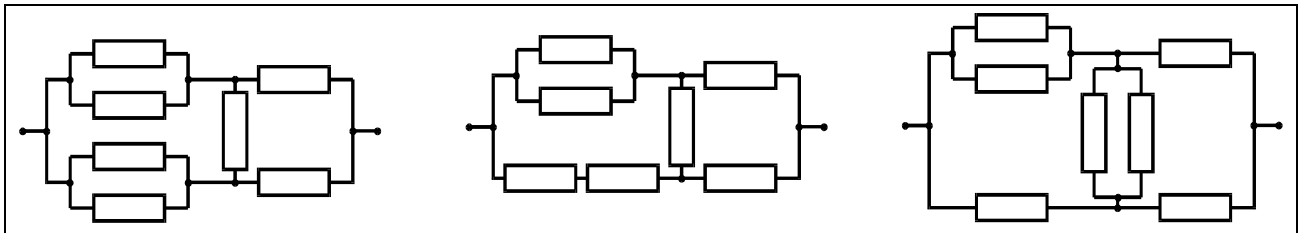
Каждый из N опытов можно реализовать в одной строке таблицы Ms Excel. Состояния элементов разыгрываются как дискретные с. в., которые принимают одно из двух значений: 0 (элемент работоспособен) и 1 (элемент отказал). Состояние системы в целом (0 – система работает, 1 – система отказала) можно вычислять как значение логического выражения, должным образом сочетающего минимальные сечения надёжностного графа системы [3].

Варианты заданий

В табл. 2.5 приведены 20 вариантов рассчитываемых надёжностных схем системы. Вероятности p_i отказа элементов для каждого варианта системы приведены в табл. 2.6. Предполагается, что на каждой схеме в табл. 2.5 нумерация элементов $i = 1, \ldots, 7$ ведётся «построчно» (через центры элементов), слева направо и сверху вниз.

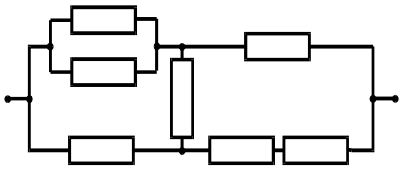
Таблица 2.5

Варианты надёжностных схем

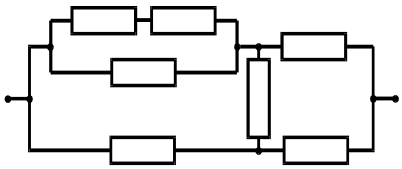


Вариант 1 Вариант 2 Вариант 3

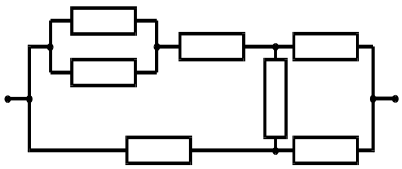
Окончание табл. 2.5



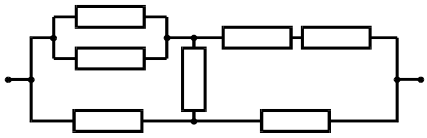
Вариант 4



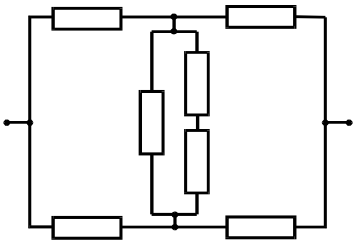
Вариант 5



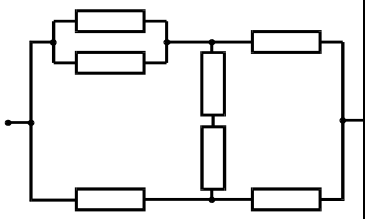
Вариант 6



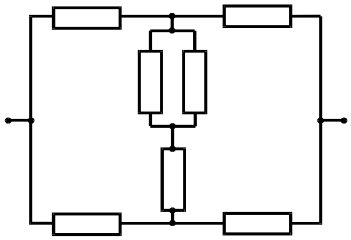
Вариант 7



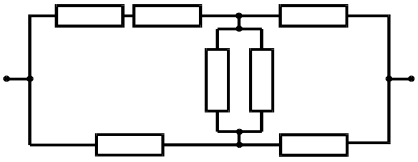
Вариант 8



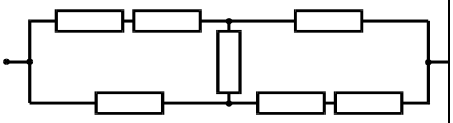
Вариант 9



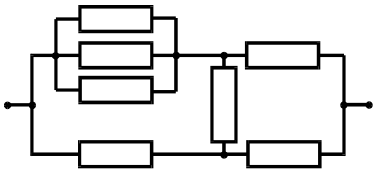
Вариант 10



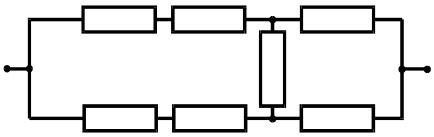
Вариант 11



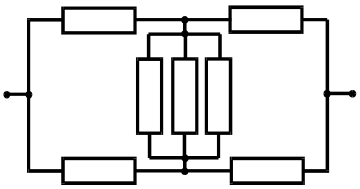
Вариант 12



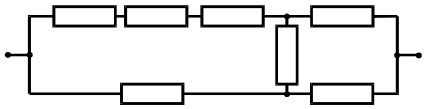
Вариант 13



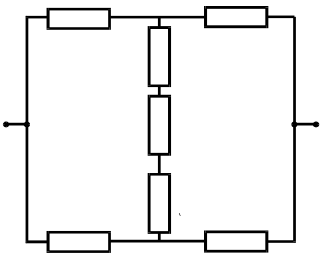
Вариант 14



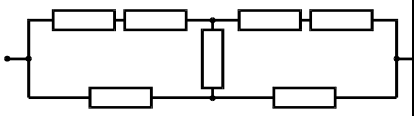
Вариант 15



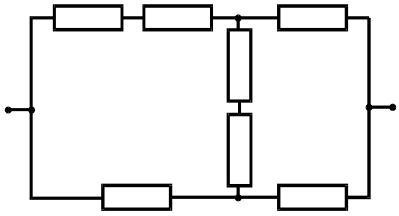
Вариант 16



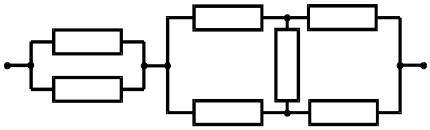
Вариант 17



Вариант 18



Вариант 19



Вариант 20

Таблица 2.6

Вероятности отказа элементов

№	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	p_7
1	0,05	0,01	0,04	0,06	0,09	0,03	0,04
2	0,04	0,08	0,01	0,08	0,08	0,06	0,02
3	0,01	0,03	0,03	0,09	0,02	0,03	0,03
4	0,09	0,04	0,04	0,05	0,03	0,07	0,02
5	0,09	0,02	0,02	0,09	0,02	0,09	0,09
6	0,06	0,05	0,06	0,08	0,05	0,09	0,01
7	0,07	0,05	0,02	0,04	0,07	0,09	0,06
8	0,04	0,02	0,07	0,02	0,02	0,06	0,02
9	0,07	0,09	0,08	0,05	0,05	0,07	0,08
10	0,06	0,01	0,03	0,08	0,09	0,02	0,04
11	0,05	0,07	0,07	0,05	0,06	0,09	0,02
12	0,07	0,07	0,07	0,07	0,06	0,03	0,01
13	0,09	0,05	0,05	0,06	0,04	0,04	0,06
14	0,05	0,09	0,01	0,02	0,09	0,07	0,08
15	0,01	0,09	0,06	0,06	0,06	0,01	0,03
16	0,09	0,02	0,03	0,02	0,08	0,03	0,01
17	0,07	0,03	0,01	0,05	0,02	0,06	0,08
18	0,09	0,05	0,07	0,02	0,04	0,09	0,09
19	0,06	0,04	0,01	0,06	0,07	0,04	0,04
20	0,06	0,04	0,06	0,09	0,08	0,04	0,09

Форма отчёта

На рис. 2.12 приводится пример оформления листа Ms Excel с расчётом простой мостиковой схемы, состоящей из пяти элементов. Наряду со статистической оценкой $\hat{Q}$ вероятности Q отказа системы здесь приводится точное значение Q, рассчитанное по следующей формуле из конспекта лекций [3, с. 32]:

$$Q = p_1 p_4 + p_2 p_5 (1 - p_1 p_4) + p_3 (q_1 p_2 p_4 q_5 + p_1 q_2 q_4 p_5). \qquad (2.33)$$

В вашем задании эту формулу можно использовать, редуцируя заданную схему к мостиковой схеме путём замены соответствующих параллельных и последовательных подграфов эквивалентными им по надёжности простыми элементами. Так, в варианте 1 (см. табл. 2.5) параллельно соединённые 1-й и 3-й элементы можно заменить одним элементом с вероятностью отказа $p' = p_1\, p_3$ и точно так же параллельно соединённые 5-й и 7-й элементы заменить элементом с вероятностью отказа $p'' = p_5\, p_7$. Поскольку при этом исходная схема превращается в пятиэлементную мостиковую схему, то для дальнейшего расчёта используйте формулу (2.33), учитывая, что нумерация аргументов в ней соответствует рис. 2.12.

Некоторые особенности возникают при расчёте варианта задания 20. Его рассчитать проще, поскольку мостиковая схема входит в него в готовом, явном виде.

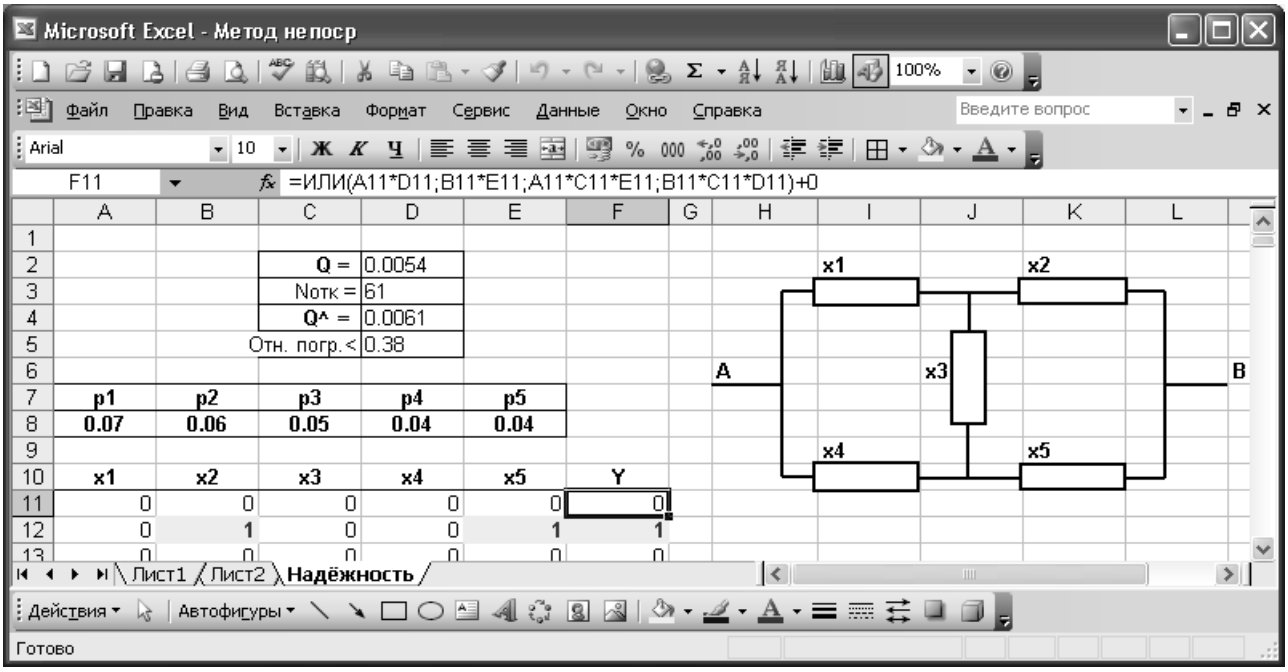


Рис. 2.12. Пример оформления листа для отчёта по лабораторной работе 5

Расчёт надёжности методом Монте-Карло следует выполнять для полной исходной схемы (не редуцированной), т. е. на листе Ms Excel должны разыгрываться состояния семи элементов схемы.

Контрольные вопросы

1. Чем отличается аналитический расчёт неприводимой надёжностной схемы от расчёта приводимой схемы? Как зависит трудоёмкость расчёта от числа элементов системы в каждом из этих двух случаев?

2. При каком числе элементов (в системе с неприводимой надёжностной схемой) аналитические методы расчёта становятся технически нереализуемыми, т. е. приближаются к пределу Бремермана – Эшби?

3. Сопоставьте аналитический и статистический методы расчёта надёжности с точки зрения их основных достоинств и недостатков.

4. Как зависит трудоёмкость расчёта надёжности от числа элементов в системе при использовании метода Монте-Карло?

5. Почему при расчёте высоконадёжной системы трудоёмкость метода Монте-Карло возрастает?

Лабораторная работа 7

РАСЧЁТ НАДЁЖНОСТИ МЕТОДОМ РАССЛОЕНИЯ

Цель работы. Расчёт вероятности отказа высоконадёжной системы методом расслоения (методом стратифицированной выборки).

Содержание работы.

1. Вывод расчётной формулы для расслоенного статистического эксперимента.

2. Расчёт надёжности методом расслоения.

3. Анализ точности расчёта.

Пояснения к выполнению работы

1. В данной работе необходимо рассчитать надёжность той же системы, что и в предыдущей работе, но при малых (и одинаковых) вероятностях отказа элементов: $p_k = p = 2\cdot10^{-4}$ ($k = 1, \ldots, 7$). Поскольку система отказывает только при одновременном отказе минимум двух элементов, то вероятность Q отказа системы имеет порядок величины p^2, и поэтому для вычисления оценки $\hat{Q}$ придётся проводить опыты, число которых составляет сотни миллионов.

Чтобы сократить необходимое число опытов, усовершенствуем схему статистического эксперимента. В соответствии с методом расслоения [2, 4] рассмотрим множество Ω всех возможных значений входной с. в. X.

В исходном (непосредственном) статистическом эксперименте входная с. в. X определяется в виде

$$X = (x_1, \ldots, x_7), \tag{2.34}$$

где компоненты $x_1, \ldots, x_7 \in \{0, 1\}$ обозначают состояния элементов системы (0 – элемент работает, 1 – элемент отказал). Вероятности отказа элементов известны: $\mathrm{P}\{x_k = 1\} = 2\cdot10^{-4}$. Выходная с. в. (состояние системы) $y \in \{0, 1\}$ является определённой функцией от с. в. X: $y = y(X)$. Искомая вероятность отказа системы $Q = \mathrm{P}\{y = 1\} = M(y)$. Для входной с. в. X пространство возможных исходов Ω состоит из $2^7 = 128$ значений двоичного вектора X:

$$\Omega = \{(0000000), (0000001), \ldots, (1111110), (1111111)\}. \tag{2.35}$$

Чтобы выполнить эффективное расслоение эксперимента, слой $\Omega_j \subset \Omega$ определим как подмножество таких значений с. в. X, которые содержат ровно j единиц. Определяемый таким образом слой Ω_j содержит те исходы, в которых отказывают ровно j элементов системы ($j = 0, 1, \ldots, 7$). Искомое м. о. $M(y)$ выходной с. в. y можно выразить через *условные* м. о. следующим образом:

$$M(y) = w_0M_0 + w_1M_1 + \ldots + w_7M_7, \tag{2.36}$$

где $M_j = M(y|X \in \Omega_j)$ – условное м. о. величины y (т. е. условная вероятность отказа системы) в слое Ω_j; w_j – вероятность слоя Ω_j (т. е. вероятность того, что в системе откажут ровно j элементов).

Формула (2.36) определяет общую схему разделения исходного статистического эксперимента на эксперименты в отдельных слоях Ω_j. Рассматривая слагаемые в правой части формулы (2.36) по отдельности, её можно существенно упростить.

Из надёжностных графов системы (табл. 2.5) видно, что система может отказать только тогда, когда откажут два или более элемента. Поэтому в формуле (2.36) заведомо $M_0 = 0$ (вероятность отказа системы при условии, что отказало 0 элементов, равна нулю) и $M_1 = 0$ (вероятность отказа системы при условии, что отказал ровно 1 элемент, тоже равна нулю). С учётом этого соотношение (2.36) принимает вид

$$M(y) = w_2M_2 + \ldots + w_7M_7. \tag{2.37}$$

Вычислим для выражения (2.37) вероятности с w_2 по w_4:

$$w_2 = P\{\Omega_2\} = C_7^2 p^2(1-p)^5 = 21\cdot 0{,}0002^2\cdot 0{,}9998^5 = 8{,}3916\cdot 10^{-7};$$

$$w_3 = P\{\Omega_3\} = C_7^3 p^3(1-p)^4 = 35\cdot 0{,}0002^3\cdot 0{,}9998^4 = 2{,}7977\cdot 10^{-10}; \quad (2.38)$$

$$w_4 = P\{\Omega_4\} = C_7^4 p^4(1-p)^3 = 35\cdot 0{,}0002^4\cdot 0{,}9998^3 = 5{,}5966\cdot 10^{-14}.$$

Вероятности w_j быстро убывают с номером слоя j, поэтому в правой части соотношения (2.37) можно, видимо, всеми слагаемыми, кроме двух-трёх первых, пренебречь. Чтобы уточнить это предположение, найдём ещё (для первого слагаемого) грубую оценку условной вероятности M_2.

Учитывая, что в системе имеются два критических элемента, при одновременном отказе которых система обязательно откажет, заключаем: вероятность M_2 (условная) отказа системы не может быть меньше вероятности $1/C_7^2 \approx 0{,}05$ (условной) того, что откажет именно эта пара критических элементов. Таким образом:

$$M_2 \geq 0{,}05; \qquad w_2M_2 \geq 0{,}05w_2 \approx 4{,}2\cdot 10^{-8}. \quad (2.39)$$

Отсюда видно, что слагаемое w_2M_2 в выражении (2.37) превосходит величину слагаемого w_4M_4 (даже если $M_4 = 1$) примерно в миллион раз. Очевидно также, что слагаемые w_5M_5, ..., w_7M_7 еще менее значимы и, следовательно, выражение (2.37) можно переписать в виде практически точного равенства:

$$M(y) = w_2M_2 + w_3M_3, \quad (2.40)$$

в котором, кстати, второе слагаемое тоже, как минимум, в сто раз меньше первого.

Заменяя в равенстве (2.40) математические ожидания их статистическими оценками $\hat{M}_2$ и $\hat{M}_3$, получаем следующую формулу для расчёта вероятности отказа системы через её условные вероятности отказа в слоях Ω_2 и Ω_3:

$$\hat{Q} = w_2\hat{M}_2 + w_3\hat{M}_3. \quad (2.41)$$

Это основная *формула расслоенного эксперимента* для нашей системы.

Из проведённого расчёта можно сделать общий вывод, что чем надёжнее элементы системы, тем быстрее убывают вероятности слоёв в формулах (2.38), тем меньше остаётся слоёв в выражении (2.37) и, следовательно, тем меньше их остаётся в формуле расслоенного эксперимента (2.41). Тем самым высокая надёжность системы – причина, усложняющая применение непосредственного статистического моделирования, – становится фактором, повышающим эффективность метода расслоения.

В формуле (2.41) условная вероятность $\hat{M}_2$ для слоя Ω_2 определяется в отдельном статистическом эксперименте, в котором разыгрываются только такие исходы X, которые соответствуют отказам ровно двух каких-нибудь элементов. Поскольку вероятности отказа у всех элементов одинаковы, то в каждом из опытов просто случайно выбирается любая из 35 равновероятных пар элементов. Общее число опытов в слое Ω_2 обозначим через N_2.

Аналогично условная вероятность $\hat{M}_3$ для слоя Ω_3 определяется в эксперименте, который включает N_2 опытов и в котором разыгрываются исходы X, соответствующие отказам ровно трёх каких-нибудь элементов.

2. Таким образом, в программе (в таблице Excel) для расчета $\hat{Q}$ на основе расслоения (2.41) следует предусмотреть выполнение статистических экспериментов в двух слоях: в слое Ω_2 будем рассчитывать оценку условного м. о. $\hat{M}_2$, в слое Ω_3 – оценку $\hat{M}_3$. По определению:

$$\hat{M}_2 = \frac{N_{\text{отк}2}}{N_2}; \qquad \hat{M}_3 = \frac{N_{\text{отк}3}}{N_3}, \tag{2.42}$$

где N_2 – общее число опытов в слое Ω_2; N_3 – число опытов в слое Ω_3; $N_{\text{отк}2}$ – число отказов в слое Ω_2; $N_{\text{отк}3}$ – число отказов в слое Ω_3.

Числа N_2 и N_3 рекомендуется определять по принципу рационального распределения общего числа опытов N по слоям:

$$N_2 = \frac{Nw_2}{w_2 + w_3}; \tag{2.43}$$

$$N_3 = \frac{Nw_3}{w_2 + w_3} = N - N_2. \tag{2.44}$$

Примем общее число опытов во всех слоях N равным 10000. Тогда по формулам (2.43) и (2.44) с учётом (2.38) определяем, что $N_2 = 9997$, $N_3 = 3$. Известно [1], что распределение числа опытов по слоям по принципу (2.43) и (2.44) гарантирует отсутствие потери точности: средняя квадратичная погрешность оценки безусловного математического ожидания (при любом способе расслоения) не может получиться большей, чем при непосредственном статистическом эксперименте с тем же общим числом опытов N. Для удобства немного скорректируем найденное распределение числа опытов и примем $N_2 = 10000$, $N_3 = 10$. Точность результатов от этого не уменьшится, а трудоёмкость практически не возрастёт.

На первом листе Ms Excel, предназначенном для опытов в слое Ω_2, проведём $N_2 = 10000$ опытов и рассчитаем $\hat{M}_2$ по формуле (2.42). На этом листе в каждом опыте будем случайно выбирать два номера отказавших элементов k_1 и k_2, а состояние системы y определять так же, как в предыдущей работе. Таким образом, этот лист будет отличаться от предыдущего практически только способом, которым разыгрываются состояния элементов.

Поскольку элементы системы равнонадёжны, то номера k_1 и k_2 отказавших элементов можно генерировать просто как целые равномерно распределенные случайные числа в диапазоне от 1 до 7. Такого рода целое случайное число k легко генерируется преобразованием БСВ z вида

$$k = \lfloor 7 \cdot z \rfloor + 1, \tag{2.45}$$

где прямые скобки обозначают взятие целой части. Однако при генерации двух случайных номеров k_1 и k_2 по формулам $k_1 = \lfloor 7 \cdot z_1 \rfloor + 1$ и $k_2 = \lfloor 7 \cdot z_2 \rfloor + 1$ могут получиться одинаковые значения k_1 и k_2, и этот случай нужно исключить.

Исключение равенства $k_1 = k_2$ легко реализуется в программах с помощью цикла, включающего проверку этого равенства и при необходимости возврат к генерации k_2. Но в Ms Excel реализация циклов с неопределённым числом повторений затруднена, поэтому следует изобрести какой-то другой способ. Один из путей – это простое исключение из расчётов тех строк с опытами, в которых получаются одинаковые номера k_1 и k_2, по аналогии с тем, как исключается часть опытов в лабораторной работе 4 в методе режекции.

Но мы воспользуемся другим, менее очевидным и дающим сразу два разных номера, «круговым» способом. Он состоит в том, чтобы разыграть k_1 обычным образом, а k_2 выбрать из оставшихся «следующих по кругу» номеров. Такой выбор номера k_2 реализуется путём прибавления к номеру k_1 целого случайного числа из интервала от 0 до (7 – 2) = 5; далее результат операции сложения должен быть представлен в виде остатка от его деления на 7 и увеличен на 1. Этот способ генерации двух номеров выражается следующими формулами:

$$k_1 = \lfloor 7 \cdot z_1 \rfloor + 1; \tag{2.46}$$

$$k_2 = \left(k_1 + \lfloor 6 \cdot z_2 \rfloor\right) \bmod 7 + 1. \tag{2.47}$$

На листе, изображённом на рис. 36, в окне ввода для выделенной ячейки **B16** показана формула, вычисляющая методом (2.47) значение k_2 (только не для 7, а для 5 элементов в системе). Далее на листе вычисляются состояния элементов x_i через два выпавших номера (это делается с помощью логической функции ИЛИ). Через состояния элементов (как и в лабораторной работе 6) определяется состояние y всей системы.

На втором листе таблицы для слоя Ω_3 аналогично проведите $N_3 = 10$ опытов и вычислите $\hat{M}_3$. В этой части программы в каждом из 10 опытов генерируются три разных номера отказавших элементов. Чтобы сделать это, можно воспользоваться методом (2.47) дважды, например, для определения k_2 и k_3 с учётом разыгранного значения k_1. Строки с опытами, в которых совпадают k_2 и k_3, можно удалить вручную.

Итоговая оценка надёжности $\hat{Q}$ вычисляется по формуле (2.41). Как видно из рис. 2.13, опыты, проведенные в слое Ω_3, практически не отразились на итоговой оценке. При пересчётах листа по ключу F9 наглядно видно, что слагаемое $w_3\hat{M}_3$ заметно уступает величине статистических ошибок расчёта, поэтому опыты в слое Ω_3 можно было для рассмотренной пятиэлементной системы не проводить.

3. Точное значение Q рассчитайте по формуле, выведенной для вашей схемы в предыдущей работе, задавая все p_k равными $p = 2 \cdot 10^{-4}$. Определите абсолютную погрешность ε оценки $\hat{Q}$:

$$\varepsilon = |\hat{Q} - Q|.$$

В примере на рис. 2.13 имеем $Q = 8{,}0016 \cdot 10^{-08}$, $\hat{Q} = 8{,}09 \cdot 10^{-08}$, откуда $\varepsilon \approx 8{,}8 \cdot 10^{-10}$.

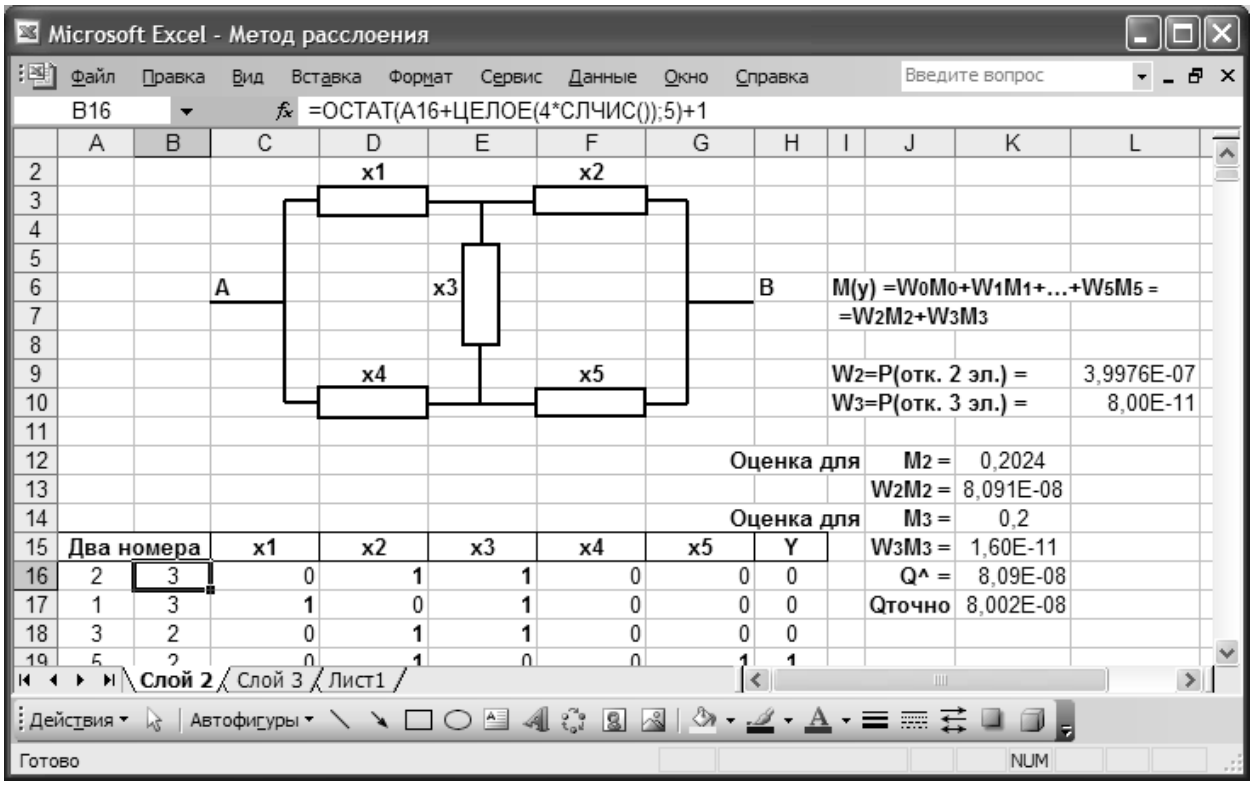


Рис. 2.13. Пример к лабораторной работе 7

Разумеется, на практике метод расслоения применяется при неизвестном точном значении Q. При этом упрощённую формулу (2.32) для определения «размаха» относительной погрешности здесь также применять некорректно, поскольку она выведена в предположении малой вероятности отказа системы, которое в слоях Ω_2 и Ω_3 не выполняется. Поэтому контроль точности оценки $\hat{Q}$ рекомендуется осуществлять, используя обычные доверительные интервалы, основанные на статистической оценке $\hat{D}_Q$ дисперсии $D(\hat{Q})$.

Расчётную формулу для вычисления $\hat{D}_Q$ можно получить следующим образом. Определяя дисперсию левой и правой частей равенства (2.41), находим:

$$D(\hat{Q}) = w_2^2 D(\hat{M}_2) + w_3^2 D(\hat{M}_3). \qquad (2.48)$$

Поскольку $\hat{M}_2$ и $\hat{M}_3$ есть оценки м. о. *двоичной* с. в., то

$$D(\hat{M}_2) \approx \frac{\hat{M}_2(1-\hat{M}_2)}{N_2}; \qquad D(\hat{M}_3) \approx \frac{\hat{M}_3(1-\hat{M}_3)}{N_3}. \qquad (2.49)$$

Заменяя дисперсии в равенстве (2.44) этими их оценками, получаем:

$$\hat{D}_Q = \frac{w_2^2}{N_2}\hat{M}_2(1-\hat{M}_2) + \frac{w_3^2}{N_3}\hat{M}_3(1-\hat{M}_3), \qquad (2.50)$$

где $\hat{M}_2$ и $\hat{M}_3$ известны из формул (2.42). Согласно «правилу трёх сигм» абсолютная погрешность оценки $\hat{Q}$ с вероятностью 0,997 не превосходит трёх квадратных корней из дисперсии (2.50). Для рассматриваемого случая (рис. 2.13) второе слагаемое в формуле (2.50) можно отбросить ввиду его относительной малости, и «трёхсигмовая» граница для абсолютной погрешности получается

равной первому слагаемому, составляющему $3w_2 \cdot 0{,}4 \cdot 10^{-2}$, а для относительной погрешности соответственно равной $3w_2 \cdot 0{,}4 \cdot 10^{-2} / w_2 \cdot M_2 = 6 \cdot 10^{-2}$.

Заметим, что такая относительно высокая точность расчёта надёжности достигается нами в методе расслоения, по существу, за счёт того, что мы не проводим опыты в малоинформативных слоях исходов. В слоях Ω_0 и Ω_1 опыты не проводятся потому, что их результаты известны заведомо: вероятность отказа системы в этих слоях равна нулю. Между тем, если проводить непосредственный статистический эксперимент (без расслоения), то подавляющее число опытов выпадает на эти два заведомо неинформативных множества исходов. В среднем из десяти миллионов опытов лишь четыре содержали бы полезную информацию.

Варианты заданий

Необходимо рассчитать надёжность того же варианта системы, что и в предыдущей работе, но при вероятностях отказа элементов $p_k = p = 2 \cdot 10^{-4}$ ($k = 1, \ldots, 7$).

Форма отчёта

Отчёт должен соответствовать общим (установленным ранее) требованиям. Пример отчёта приводится выше на рис. 2.13.

Контрольные вопросы

1. Как определяются слои исходов в данной работе?
2. Почему в соотношении (2.36) величины M_0 и M_1 равны нулю?
3. На каком основании в соотношении (2.36) могут быть отброшены слагаемые с w_4M_4 по w_7M_7?
4. Выведите общую формулу для вычисления вероятностей слоев w_j в случае, когда система содержит n равнонадёжных элементов.
5. Почему метод расслоения позволяет существенно повысить точность расчёта надёжности по сравнению с непосредственным статистическим моделированием?
6. Обоснуйте формулы (2.48) и (2.49).
7. Сколько опытов потребовалось бы для расчёта вашего варианта системы с помощью непосредственного статистического моделирования, чтобы достичь той же точности, которая получилась в методе расслоения?

Библиографический список к части 2

1. Боровков, А. А. Математическая статистика : учебник / А. А. Боровков. – М. : Наука, ГРФМЛ, 1984. – 472 с.

2. Задорожный, В. Н. Статистическое моделирование : учеб. пособие / В. Н. Задорожный. – Омск : Изд-во ОмГТУ, 1996. – 92 с.

3. Задорожный, В. Н. Моделирование систем : конспект лекций / В. Н. Задорожный. – Омск : Изд-во ОмГТУ, 2006. – 56 с.

4. Кутузов, О. И. Аналитико-статистический метод для расчёта высоконадёжных систем связи / О. И. Кутузов, В. Н. Задорожный // Техника средств связи. Сер. Техника проводной связи. – Л., 1990. – Вып. 1. – С. 121–130.

5. Макарова, Н. В. Статистика в Excel : учеб. пособие / Н. В. Макарова, В. Я. Трофимец. – М. : Финансы и статистика, 2003. – 368 с.

ЧАСТЬ 3. ПРАКТИКУМ ПО ИМИТАЦИОННОМУ МОДЕЛИРОВАНИЮ

Лабораторная работа 1
МОДЕЛИРОВАНИЕ ОДНОКАНАЛЬНЫХ СМО

Цель работы. Имитационное моделирование одноканальной системы массового обслуживания (СМО).

Содержание работы:

1. Изучение объекта моделирования (одноканальной СМО).
2. Предварительное аналитическое исследование СМО с применением Ms Excel.
3. Разработка и отладка имитационной модели СМО на GPSS World.
4. Выполнение имитационных экспериментов и анализ результатов.

Краткая теория и методические указания

1. Одноканальная система массового обслуживания характеризуется следующими свойствами. СМО имеет *канал*. В СМО приходят *заявки*. Если СМО пустая (нет заявок), то приходящая заявка занимает канал. Заявка, приходящая в непустую СМО (канал занят), становится в очередь к каналу. Любая заявка, занявшая канал, обслуживается, освобождает канал и уходит из СМО. Если в момент ухода очередь не пустая, то первая в ней заявка выходит из очереди и занимает канал.

Символическое изображение одноканальной СМО приведено на рис. 3.1. Кружком обозначен канал, прямоугольниками – очередь к каналу. Стрелки указывают направление движения заявок. Буквой τ обозначено время между приходами заявок (случайная величина), буквой x – время обслуживания заявки.

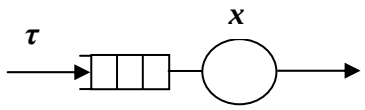


Рис. 3.1. Одноканальная СМО

Одноканальная экспоненциальная СМО

В *экспоненциальной* СМО приходы заявок образуют пуассоновский поток событий. Это означает, что время τ между приходами любых двух последовательных заявок есть такая независимая случайная величина (с. в.), которая имеет экспоненциальное распределение вероятностей. Кроме того, в экспоненциальной СМО время обслуживания заявок x также распределено экспоненциально.

Таким образом, в экспоненциальной СМО функции распределения вероятностей (ф. р. в.) случайных величин τ и x имеют следующий вид:

$$F_\tau(t) = 1 - e^{-\lambda t}, \qquad F_x(t) = 1 - e^{-\mu t} \qquad (t \geq 0), \tag{3.1}$$

где λ – параметр, называемый *интенсивностью поступления* заявок на вход СМО; μ – интенсивность *обслуживания* заявок каналом СМО.

Параметр «интенсивность» для экспоненциально распределённой с. в. обратен её математическому ожиданию (м. о.). Обозначая м. о. случайной величины надчёркиванием, можно записать: $\lambda = 1/\overline{\tau}$ и $\mu = 1/\overline{x}$. Интенсивность λ поступле-

ния заявок в СМО – это среднее число заявок, поступающих в единицу времени. Если средний интервал поступления заявок $\overline{\tau}$ измеряется в секундах (c), то интенсивность $\lambda = 1/\overline{\tau}$ измеряется в секундах в минус первой степени (c^{-1}).

Аналогично интенсивность обслуживания заявок $\mu = 1/\overline{x}$ – это среднее число заявок, обслуживаемых каналом в единицу времени. Здесь имеется в виду, что канал обслуживает заявки с интенсивностью μ, когда он занят, не простаивает. Когда заявок в системе нет, интенсивность их обслуживания равна нулю.

Параметры λ и μ полностью задают одноканальную экспоненциальную СМО и тем самым однозначно определяют следующие показатели (*характеристики*) эффективности её функционирования:

ρ – коэффициент загрузки;
L – средняя длина очереди;
N – среднее число заявок в СМО;
W – среднее время ожидания заявкой обслуживания;
U – среднее время пребывания заявки в СМО.

Приведём без вывода хорошо известные формулы для расчёта этих показателей.

Коэффициент загрузки ρ рассчитывается по формуле

$$\rho = \lambda / \mu = \lambda \overline{x} = \overline{x} / \overline{\tau} . \qquad (3.2)$$

Если выполняется условие

$$\rho \le 1, \qquad (3.3)$$

то существует *стационарный режим* функционирования СМО, в котором средняя длина очереди L не зависит от времени. Как видно из определения коэффициента загрузки (3.2), в случае (3.3) имеем $\lambda \le \mu$, т. е. среднее число заявок λ, поступающих в систему за единицу времени, не превосходит среднего числа заявок μ, которые за единицу времени обслуживаются каналом. Следовательно, канал справляется с поступающей работой. Интенсивность потока заявок на выходе СМО равна интенсивности λ входного потока.

Наряду с ρ и L в стационарном режиме также не зависят от времени, т. е. являются постоянными величинами, и вероятностные характеристики N, W, U. Сами происходящие в СМО процессы, средними значениями которых являются эти характеристики, остаются случайными величинами. Так, $N = \overline{n}_t$, $W = \overline{w}_i$, $U = \overline{u}_i$, где n_t – число заявок в системе (в очереди и канале вместе) в случайно выбранный момент времени t в стационарном режиме, w_i, u_i – время ожидания в очереди и, соответственно, время прохождения через всю систему (через очередь и канал) заявки со случайно выбранным номером i, поступающей в систему в стационарном режиме.

При $\rho > 1$, наоборот, стационарного режима не существует. Действительно, если $\rho > 1$, то $\lambda > \mu$ и работа поступает в СМО в среднем быстрее, чем выполняется. Поэтому длина очереди возрастает каждую единицу времени в среднем на ($\lambda - \mu$). Очередь с ходом времени неограниченно растёт, и стационарной средней длины очереди не существует. Также не существует стационарных показателей N, W, U.

В *стационарном режиме* среднее число N заявок в СМО постоянно. Поэтому среднее число заявок, поступающих в СМО в единицу времени, равно среднему числу заявок, в единицу времени из СМО уходящих. Следовательно, в стационарном режиме интенсивность потока уходящих заявок равна λ. Эта величина меньше, чем интенсивность обслуживания μ, так как канал в стационарном режиме определённую долю времени простаивает. Эта доля времени равна $(1-\rho)$ – коэффициенту простоя СМО. Интенсивность выходного потока заявок равна интенсивности обслуживания, когда канал занят, и равна нулю, когда канал свободен. В среднем же она равна интенсивности поступления заявок. Поэтому среднее число заявок в СМО в стационарном режиме со временем не изменяется, т. е. остаётся постоянным.

Требование (3.3) является условием стационарности не только для экспоненциальных СМО, но и для любых других. «Физический смысл» этого требования состоит в том, чтобы «скорость поступления работы» в систему не превышала «скорости её выполнения» системой.

Коэффициент загрузки ρ в стационарном режиме можно интерпретировать следующими тремя способами:

– как среднюю долю единицы времени, в течение которой канал занят;

– как вероятность застать в случайный момент времени канал занятым;

– как среднее число заявок в канале.

Примечание 1. Если речь идет об экспоненциальной СМО, то коэффициент загрузки ρ равен также вероятности того, что заявка, приходящая в СМО в стационарном режиме, застанет канал занятым. Этот способ интерпретации показателя ρ для не экспоненциальных СМО в общем случае не имеет места. Например, если интервал τ поступления заявок и интервал x их обслуживания имеют такое распределение, при котором они мало отклоняются от своих средних значений, то, как легко видеть, даже при больших ρ ($\rho < 1$) вероятность того, что приходящая заявка застанет канал занятым, может быть равна нулю.

Далее в данном цикле лабораторных работ речь будет идти только о стационарных значениях характеристик, определяемых при $\rho \le 1$.

Средняя длина очереди (среднее число заявок в очереди) в одноканальной экспоненциальной СМО рассчитывается по формуле

$$L = L_{\exp}(\rho) = \frac{\rho^2}{1-\rho}. \qquad (3.4)$$

График зависимости L от ρ приведен на рис. 3.2.

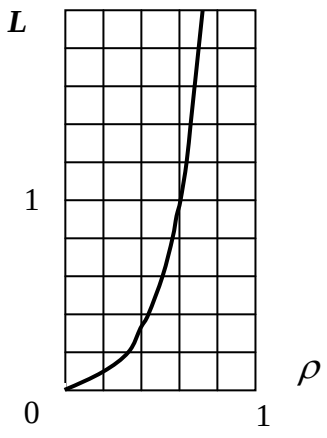


Рис. 3.2. Зависимость $L(\rho)$

Среднее число N заявок в СМО равно сумме среднего числа L заявок в очереди и среднего числа ρ заявок в канале:

$$N = L + \rho. \qquad (3.5)$$

Действительно, как видно из рис. 3.2, число заявок в СМО складывается из числа заявок в очереди

и числа заявок в канале. Отсюда, поскольку среднее значение суммы чисел равно сумме их средних, вытекает соотношение (3.5).

Зная *среднее число* заявок в какой-либо части системы, можно легко определить и *среднее время* пребывания заявок в этой части. Названные две средние величины связаны знаменитой *формулой Литтла*, которая представляет собой своеобразный «закон природы» для систем массового обслуживания любого вида, не обязательно только экспоненциальных. Эта формула достаточно проста:

$$n_{ср} = \lambda_{вх}\, t_{ср}\,,$$

где $\lambda_{вх}$ – интенсивность поступления заявок в выделенную часть системы; $t_{ср}$ – среднее время пребывания заявки в этой части, $n_{ср}$ – среднее число заявок в ней.

Формула Литтла справедлива для стационарного режима. Её универсальность можно понять с помощью следующего рассуждения. Поскольку в стационарном режиме среднее число заявок $n_{ср}$ в выделенной области системы постоянно, то среднее число заявок, поступающих в неё в единицу времени, т. е. $\lambda_{вх}$, равно $\lambda_{вых}$ – среднему числу заявок, выходящих из неё в единицу времени. При этом интенсивность выхода заявок $\lambda_{вых}$ складывается из интенсивностей выхода каждой из $n_{ср}$ заявок, т. е. $\lambda_{вых} = n_{ср}\cdot(1/t_{ср})$. Отсюда получаем $\lambda_{вх} = n_{ср}\cdot(1/t_{ср})$, т. е. формулу Литтла.

Применяя формулу Литтла к очереди в СМО, находим среднее время ожидания обслуживания через среднюю длину очереди:

$$W = L / \lambda\,. \qquad (3.6)$$

Аналогично вычисляется среднее время пребывания заявки во всей СМО:

$$U = N / \lambda\,. \qquad (3.7)$$

Среднее время пребывания можно вычислить и через средние его слагаемых:

$$U = W + \bar{x}\,.$$

Характеристики (3.2)–(3.7) дают ценную информацию о системе, моделируемой в виде СМО.

Заметим, что только формула (3.4) для средней длины очереди связана здесь с предположением о том, что СМО экспоненциальная. Остальные формулы справедливы для любых СМО.

Обозначения Кендалла – Башарина

Для указания типа СМО используются условные обозначения Кендалла – Башарина, в которых тип системы указывается её основными структурными параметрами в формате:

A|B|K|m.

К основным структурным параметрам, определяющим тип СМО, относятся:

– вид закона распределения интервалов поступления заявок (**A**);

– вид закона распределения времени обслуживания заявок (**B**);

– число каналов (**K**),

– число мест в очереди (**m**).

Первая позиция (**A**) содержит буквенное обозначение вида закона распределения $F_\tau(t)$ для времени τ между поступлениями заявок. Вторая позиция (**B**) указывает вид закона распределения $F_x(t)$ для времени x обслуживания заявки каналом. В обозначениях вида закона распределения буква M соответствует экспоненциальному распределению (от слова *Марковиан*), буква E – распределению Эрланга, R – равномерному распределению и D – детерминированной величине. Порядок эрланговского распределения указывается в виде верхнего индекса при букве E. Равномерное распределение R задаётся на интервале от нуля до двух математических ожиданий. Обозначением RT будем указывать равномерное распределение на интервале от половины м. о. до полутора м. о., обозначением H^r – гиперэкспоненциальное распределение второго порядка с параметром r (r – коэффициент вариации, r^2 – квадратичный коэффициент вариации), HB^ε – ограниченное гиперболическое распределение с параметром ε. Справочная информация по перечисленным распределениям приводится в приложении. Буквой G (general) обозначают распределение произвольного типа.

Третья позиция (**K**) задаёт число каналов в СМО. Четвёртая позиция (**m**) определяет число мест в очереди, т. е. её максимальную длину. Заявка, приходящая в систему, когда все места в очереди заняты, теряется.

Рассмотренная выше одноканальная экспоненциальная СМО является системой типа M|M|1. В этом обозначении четвёртая позиция опущена. Это означает, что число мест в очереди бесконечное, т. е. приходящие заявки не теряются.

2. Предварительное аналитическое исследование одноканальной СМО рассмотрим на примере системы R|R|1. Проще всего приближённый расчёт характеристик выполнить с помощью программы Ms Excel. Основной характеристикой СМО является зависимость $L(\rho)$ средней длины очереди от коэффициента загрузки. Для системы M|M|1 эта зависимость, определяемая формулой (3.4), может быть рассчитана точно. Для СМО других типов, за редким исключением, подобных точных аналитических решений не существует. Если исходить из предположения, что систему R|R|1 можно аппроксимировать системой M|M|1, то приближённое представление о характеристике $L(\rho)$ системы R|R|1 можно получить, используя характеристику $L_{\exp}(\rho)$ системы M|M|1:

$$L(\rho) \approx L_{\exp}(\rho) = \frac{\rho^2}{1-\rho}, \qquad 0 \le \rho < 1. \tag{3.8}$$

Погрешность приближения (3.8) нам неизвестна, так как мы не знаем, как сильно на характеристике $L(\rho)$ сказывается переход в СМО от экспоненциальных законов распределения к равномерным.

Другой распространённый метод приближённого анализа СМО состоит в использовании верхней оценки для средней длины очереди, найденной Кингманом и Кёллерстрёмом:

$$L(\rho) \le L^+(\rho) = \frac{C_\tau^2 + \rho^2 C_x^2}{2(1-\rho)}, \tag{3.9}$$

где C_τ^2 и C_x^2 – квадратичные коэффициенты вариации с. в. τ и x – определяются, как обычно, через их дисперсии σ_τ^2 и σ_x^2:

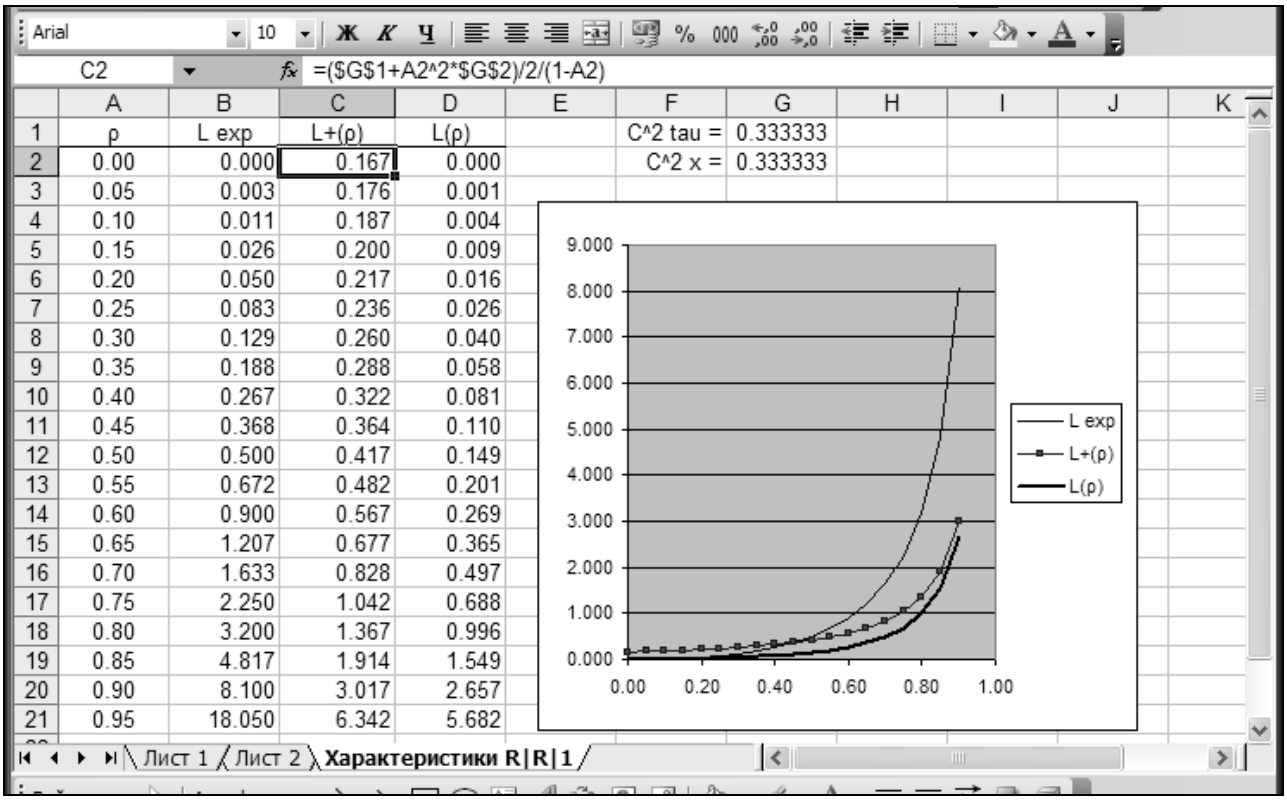
$$C_\tau^2 = \frac{\sigma_\tau^2}{\bar{\tau}^2}, \quad C_x^2 = \frac{\sigma_x^2}{\bar{x}^2}.$$

Достоинства верхней границы $L^+(\rho)$ Кингмана – Кёллерстрёма (3.9) в том, что:

– неравенство (3.9) имеет простой вид и выполняется в любой системе G|G|K;

– при большой нагрузке $\rho \to 1$ функция $L^+(\rho)$ является хорошим приближением искомой характеристики $L(\rho)$.

Расчёт приближённых характеристик (3.8) и (3.9) для системы R|R|1 приведен на рис. 3.3. Кривая с маркерами на рисунке представляет характеристику $L^+(\rho)$. Действительная характеристика $L(\rho)$ системы R|R|1 лежит целиком под кривой $L^+(\rho)$: она показана жирной линией. Кривая наиболее быстро растущей функции – это характеристика $\rho^2/(1-\rho)$ очереди в экспоненциальной СМО. Действительная характеристика $L(\rho)$ получена путём моделирования системы R|R|1 на GPSS World.



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	ρ	L exp	L+(ρ)	L(ρ)		C^2 tau =	0.333333				
2	0.00	0.000	0.167	0.000		C^2 x =	0.333333				
3	0.05	0.003	0.176	0.001							
4	0.10	0.011	0.187	0.004							
5	0.15	0.026	0.200	0.009							
6	0.20	0.050	0.217	0.016							
7	0.25	0.083	0.236	0.026							
8	0.30	0.129	0.260	0.040							
9	0.35	0.188	0.288	0.058							
10	0.40	0.267	0.322	0.081							
11	0.45	0.368	0.364	0.110							
12	0.50	0.500	0.417	0.149							
13	0.55	0.672	0.482	0.201							
14	0.60	0.900	0.567	0.269							
15	0.65	1.207	0.677	0.365							
16	0.70	1.633	0.828	0.497							
17	0.75	2.250	1.042	0.688							
18	0.80	3.200	1.367	0.996							
19	0.85	4.817	1.914	1.549							
20	0.90	8.100	3.017	2.657							
21	0.95	18.050	6.342	5.682							

Рис. 3.3. Результаты приближённого расчёта и моделирования системы R|R|1

3. Разработка и отладка имитационной модели СМО на языке GPSS World выполняется в соответствии с рекомендациями, излагаемыми в курсе лекций и в учебных пособиях [2, 7, 8, 9]. Модель системы R|R|1 на языке GPSS (при ρ = 0,5) имеет следующий вид:

```
GENERATE        10,10
QUEUE           1
SEIZE           1
DEPART          1
ADVANCE         5,5
RELEASE         1
TERMINATE
GENERATE        5000000
TERMINATE       1
```

Здесь время обслуживания заявки задано в блоке ADVANCE как с. в., равномерно распределённая на интервале 5 ± 5 (т. е. от 0 до 10) ед. времени. Поэтому среднее время обслуживания составляет 5 ед. времени. Интервал поступления заявок задан в блоке GENERATE так же, как равномерно распределённая с. в., но со средним значением 10. Следовательно, коэффициент загрузки $\rho = \bar{x}/\bar{\tau} = 5/10 = 0{,}5$. На рис. 3.4 приведен результат прогона модели по команде START 1. Зависимость $L(\rho)$, показанная на рис. 3.3, получена в экспериментах с этой моделью при разных ρ. Для этого менялись параметры блока ADVANCE.

```
                Wednesday, June 07, 2006 15:22:36

          START TIME          END TIME  BLOCKS  FACILITIES  STORAGES
               0.000       5000000.000     9        1          0


 LABEL              LOC  BLOCK TYPE     ENTRY COUNT CURRENT COUNT RETRY
                    1    GENERATE        499694             0       0
                    2    QUEUE           499694             0       0
                    3    SEIZE           499694             0       0
                    4    DEPART          499694             0       0
                    5    ADVANCE         499694             0       0
                    6    RELEASE         499694             0       0
                    7    TERMINATE       499694             0       0
                    8    GENERATE             1             0       0
                    9    TERMINATE            1             0       0


FACILITY         ENTRIES  UTIL.   AVE. TIME AVAIL. OWNER PEND INTER RETRY DELAY
 1                499694    0.500       5.005  1        0    0    0     0      0


QUEUE              MAX CONT. ENTRY ENTRY(0) AVE.CONT. AVE.TIME   AVE.(-0) RETRY
 1                   8    0 499694 338347     0.149      1.493      4.624   0
```

Рис. 3.4. Файл отчёта (REPORT), выданного GPSS World после прогона имитационной модели системы R|R|1 при $\rho = 0{,}5$

4. Выполняя имитационные эксперименты и анализ их результатов, необходимо обеспечить получение статистически достоверных данных о свойствах моделируемой СМО, проинтерпретировать смысл этих данных (извлечь новые знания о системе), а также сделать общие выводы об особенностях имитационного моделирования как инструмента исследования сложных систем.

Для того чтобы данные имитационного эксперимента имели приемлемую статистическую погрешность, нужно выполнить достаточно длинный прогон модели. На рис. 3.4 показан отчёт об эксперименте, в котором система наблюдалась в течение 5 млн ед. времени. За это время через систему прошло около

500 тысяч заявок. Такое время моделирования для целей лабораторной работы несколько избыточно; достаточно моделировать СМО в течение более короткого времени, обеспечивающего прохождение около 100 тысяч заявок.

Кроме того, на рис. 3.3 график характеристики $L(\rho)$ построен по 20 равноотстоящим значениям ρ, что потребовало проведения 20 прогонов модели при разных значениях среднего времени обслуживания в блоке ADVANCE. В лабораторной работе достаточно промоделировать СМО при 10 значениях ρ, следующих с шагом 0,1.

Результаты, приведенные на рис. 3.3, позволяют сделать вывод о том, что система M|M|1 представляет собой плохую аппроксимацию системы R|R|1. Принятие предположения о возможности замены равномерных распределений экспоненциальными в данном случае привело бы к многократным ошибкам при расчёте основной характеристики $L(\rho)$ системы.

Причиной возникновения очередей в СМО является несогласованность поступления заявок. Если бы все заявки поступали через постоянные интервалы времени и обслуживались также за постоянное детерминированное время, то при любом $\rho < 1$ очередей в системе не возникало бы. И поскольку мерой разброса значений для интервалов поступления заявок τ и интервалов их обслуживания x являются соответствующие коэффициенты вариации (или квадратичные коэффициенты вариации) этих с. в., то чем эти коэффициенты вариации больше, тем большего значения средней длины очереди $L(\rho)$ следует ожидать при фиксированной нагрузке ρ.

Поскольку в системе R|R|1 оба квадратичных коэффициента вариации C_τ^2 и C_x^2 составляют лишь 1/3, в то время как в системе M|M|1 они равны 1, то и характеристика $L(\rho)$ для системы R|R|1 оказалась существенно меньшей, чем для M|M|1.

При использовании аналитических методов исследования СМО отказ от экспоненциальных распределений приводит к колоссальным математическим трудностям, которые чаще всего не удаётся преодолеть. Поэтому использование упрощающих предположений о «пуассоновости потоков», «экспоненциальности распределений», «отсутствии последействия» и т. п. часто связано лишь с желанием получить хоть какие-то результаты. При имитационном моделировании систем, напротив (как видно из примеров моделирования, выполняемых в данной лабораторной работе), замена одних распределений другими представляет собой чисто технический вопрос и решается просто правильным использованием генераторов случайных чисел.

Действительная характеристика $L(\rho)$, найденная с помощью имитационного моделирования, определяется с точностью до статистических погрешностей (в нашем примере они составляют около одного – двух процентов), которые контролируются посредством повтора или удлинения эксперимента и могут быть сделаны, в принципе, сколь угодно малыми. Имея характеристику $L(\rho)$, остальные основные показатели СМО можно рассчитать при любом заданном ρ по простым формулам (3.5–3.7).

Примечание 2. Для ускорения набора модели в GPSS World рекомендуется воспользоваться меню Edit/Insert GPSS Blocks… .

Примечание 3. После изменения какого-либо параметра в GPSS-модели её нужно ретранслировать (команда Retranslate) и только потом выполнять START.

Варианты заданий

Варианты заданий приводятся в табл. 3.1. Рекомендации по формированию с. в. с указанными в табл. 3.1 распределениями приводятся в прил. 1.

Таблица 3.1

Варианты заданий к лабораторной работе 1

№	Тип СМО	$M(\tau)$	№	Тип СМО	$M(\tau)$
1	RT|R|1	10	11	M|H^2|1	10
2	R|RT|1	10	12	E^2|R|1	10
3	H^2|M|1	10	13	E^3|M|1	10
4	M|E^2|1	10	14	E^3|D|1	10
5	E^2|E^3|1	10	15	E^4|R|1	10
6	M|R|1	10	16	H^2|R|1	10
7	H^2|D|1	10	17	D|E^2|1	10
8	R|D|1	10	18	D|E^4|1	10
9	R|E^3|1	10	19	D| H^2|1	10
10	R|M|1	10	20	D|M|1	10

Форма отчёта

Для защиты лабораторной работы необходимо подготовить отчёт, оформить его и передать на проверку в установленном порядке. Файл, подготовленный в Ms Excel (см. рис. 3.3), и GPSS-модель вашего варианта СМО рекомендуется хранить в личном архиве до завершения аттестации по дисциплине «Моделирование систем».

Контрольные вопросы

1. Какими основными факторами определяется величина средней очереди в системе массового обслуживания?

2. Выведите выражения для плотности распределения вероятностей (п. р. в.) из указанных в (3.1) выражений для ф. р. в. Используя выражения для п. р. в., выведите формулы для м. о., дисперсии и коэффициента вариации.

3. Какой физический смысл имеет параметр «интенсивность» экспоненциального распределения вероятностей?

4. Перечислите основные показатели эффективности функционирования СМО.

5. Как интерпретируется значение коэффициента загрузки ρ? Какие значения может принимать ρ в стационарном режиме?

6. Запишите выражение для средней длины очереди в системе M|M|1.

7. Запишите в общем виде формулу Литтла и обоснуйте её.

8. Поясните систему обозначений Кендалла – Башарина.

9. Укажите значения основных характеристик (границы диапазона возможных значений, дисперсию и коэффициент вариации) равномерного распределения вероятностей типа R при заданном м. о. $\overline{x}$. Обоснуйте ответ.

10. Укажите основные характеристики равномерного RT-распределения и обоснуйте ответ.

11. Перечислите основные характеристики распределения Эрланга.

12. Перечислите основные характеристики гиперэкспоненциального распределения вероятностей второго порядка.

13. Как изменяются основные характеристики случайной величины при её масштабном преобразовании (при умножении на постоянный коэффициент)?

14. Поясните, как по вашей GPSS-модели перемещаются транзакты, как формируются статистические показатели о модели, как и когда завершается статистический эксперимент.

15. Покажите ваш файл GPSS-отчёта (REPORT) и поясните данные, содержащиеся в нём.

16. С чем обычно связано введение упрощающих допущений при аналитическом моделировании СМО?

17. Как при среднем интервале поступления заявок, равном 10, вы определяете среднее время задержки транзакта в блоке ADVANCE, чтобы система имела требуемое значение коэффициента загрузки ρ?

18. Как вы изменяете среднее время задержки транзакта в блоке ADVANCE, не меняя при этом заданного вида закона распределения вероятностей?

19. Поясните пример, приведенный в примечании 1 данной лабораторной работы.

20. Приведите оценку Кингмана – Кёллерстрёма и поясните её смысл.

Лабораторная работа 2
МОДЕЛИРОВАНИЕ МНОГОКАНАЛЬНЫХ СМО

Цель работы. Имитационное моделирование многоканальной системы массового обслуживания.

Содержание работы:

1. Изучение объекта моделирования (многоканальной СМО).
2. Предварительное аналитическое исследование СМО с применением Ms Excel.
3. Разработка и отладка имитационной модели СМО на GPSS World.
4. Выполнение имитационных экспериментов и анализ результатов.

Краткая теория и методические указания

1. Многоканальная СМО отличается от одноканальной СМО следующим. Число каналов в ней более одного. Приходящая заявка становится в очередь, если все каналы заняты. В противном случае заявка занимает свободный канал.

Условное изображение многоканальной СМО приведено на рис. 3.5.

Многоканальная экспоненциальная СМО

Многоканальная экспоненциальная СМО задаётся тремя параметрами: интенсивностью λ прихода заявок, средним временем $\bar{x}$ обслуживания заявки и числом каналов K.

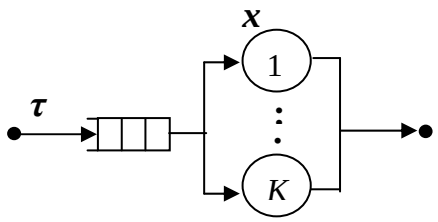


Рис. 3.5. Многоканальная СМО

Формулы для расчёта многоканальной экспоненциальной СМО не намного сложнее формул (3.2–3.7).

Коэффициент загрузки многоканальной СМО определяется в виде

$$\rho = (\lambda \bar{x})/K = (\bar{x}/\bar{\tau})/K. \qquad (3.10)$$

Его значение должно отвечать условию (3.3), чтобы многоканальная СМО имела стационарный режим. Формула (3.10) справедлива и для не экспоненциальных СМО.

Средняя длина очереди в *экспоненциальной* многоканальной СМО вычисляется с помощью достаточно громоздкого выражения:

$$L = \frac{(K\rho)^{K+1}}{K!K(1-\rho)^2}\pi_0, \qquad (3.11)$$

в котором π_0 – стационарная вероятность того, что в СМО нет заявок;

$$\pi_0 = \frac{1}{\dfrac{(K\rho)^K}{K!(1-\rho)} + \sum\limits_{i=0}^{K-1}\dfrac{(K\rho)^i}{i!}}. \qquad (3.12)$$

При $K = 1$ многоканальная СМО превращается в одноканальную, вероятность π_0 в (3.12) становится равной $1-\rho$, и формула (3.11) превращается в формулу (3.4).

Остальные характеристики многоканальной СМО, рассуждая по аналогии со случаем одноканальной СМО, можно вычислять следующим образом:

$$N = L + K\rho, \qquad (3.13)$$

$$W = L/\lambda, \qquad (3.14)$$

$$U = W + \bar{x}. \qquad (3.15)$$

Формулы (3.10) и (3.13–3.15) справедливы для многоканальных СМО с неограниченной очередью независимо от предположения об экспоненциальном распределении интервалов поступления и обслуживания заявок. Если известна зависимость $L(\rho)$ – основная характеристика многоканальной СМО, то расчёт остальных показателей СМО не составляет труда. Поэтому в данной лабораторной работе, как и в предыдущей, будем определять для заданного варианта СМО характеристику $L(\rho)$.

2. Предварительное аналитическое исследование СМО рассмотрим на примере системы R|R|3. Приближённый расчёт характеристик выполним

в Excel. Приближённое представление о характеристике $L(\rho)$, которую имеет наша система R|R|3, можно получить двумя способами, подобно тому, как это делалось при моделировании одноканальной системы. Первый способ, характеризуемый неопределённой величиной ошибки, состоит в расчёте характеристики (3.11) экспоненциальной СМО (с таким же числом каналов) как некоторого приближения к искомой характеристике $L(\rho)$ заданной системы, в данном случае – системы R|R|3.

Другой способ приближённого расчёта состоит, как и в лабораторной работе 1, в использовании верхней оценки Кингмана – Кёллерстрёма (3.9). При использовании (3.9) нужно иметь в виду, что в многоканальной системе коэффициент загрузки ρ, определяемый формулой (3.10), зависит от числа каналов K.

Пример расчёта рассматриваемых двух приближённых характеристик для системы R|R|3 приведен на рис. 3.6. На графике кривая с маркерами представляет оценку $L^{+}(\rho)$ Кингмана – Кёллерстрёма. Действительная характеристика $L(\rho)$ системы R|R|3 лежит целиком под кривой $L^{+}(\rho)$ и показана жирной линией. Характеристика очереди в трёхканальной экспоненциальной СМО здесь также оказывается растущей слишком быстро – в несколько раз быстрее действительной характеристики $L(\rho)$, найденной с помощью имитационного моделирования системы R|R|3.

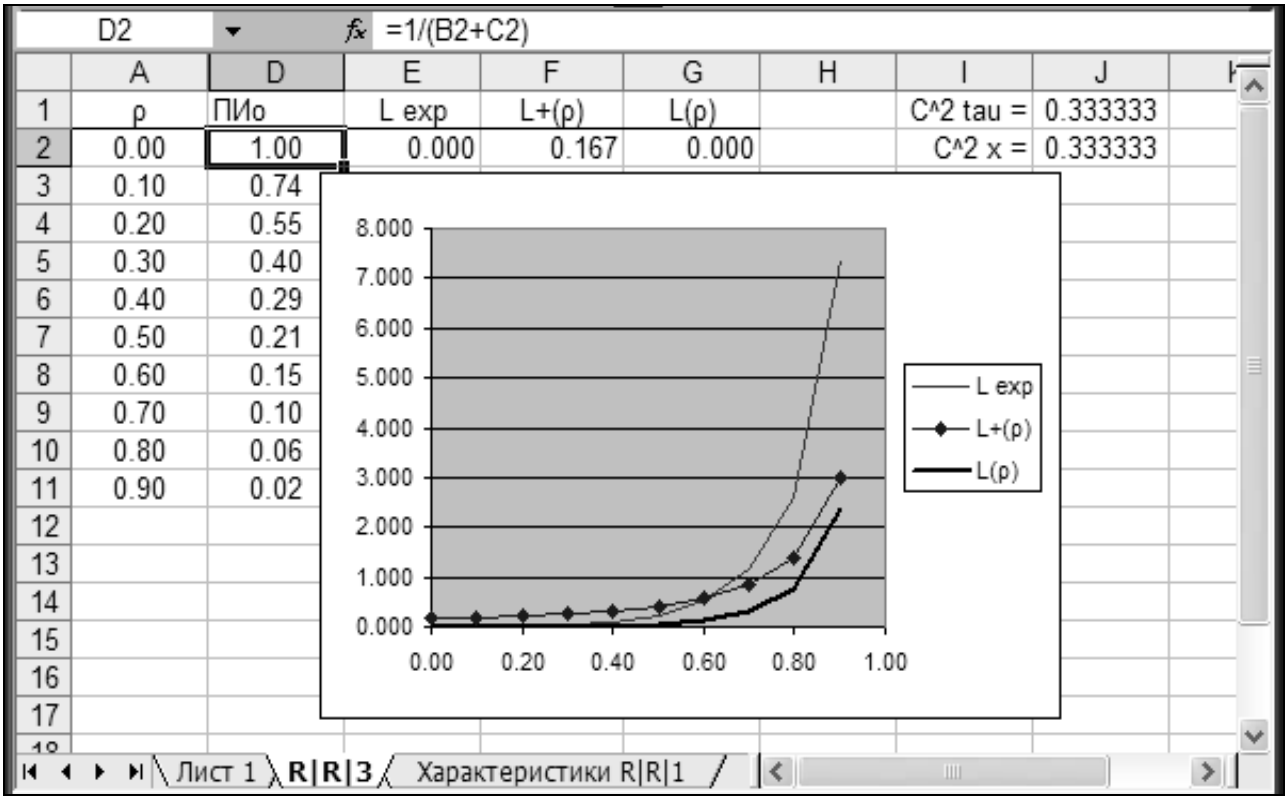


Рис. 3.6. Результаты приближённого расчёта и моделирования системы R|R|3

3. Имитационная модель многоканальных СМО строится на языке GPSS World с использованием объектов типа *память* STORAGE требуемого объёма.

Модель системы R|R|3 на языке GPSS при ρ = 0,5 можно написать так:

```
CHAN  STORAGE  3
      GENERATE 10,10
      QUEUE    1
      ENTER    CHAN
      DEPART   1
      ADVANCE  15,15
      LEAVE    CHAN
      TERMINATE
      GENERATE 5000000
      TERMINAT 1
```

Здесь время обслуживания заявки задано в блоке ADVANCE как с. в., равномерно распределённая на интервале 15 ± 15 ед. времени. Следовательно, коэффициент загрузки $\rho = (\bar{x}/\bar{\tau})/K = (15/10)/3 = 0{,}5$. В результате выполнения данной модели по команде START 1 получены данные, представленные на рис. 3.7.

```
 LABEL              LOC  BLOCK TYPE     ENTRY COUNT CURRENT COUNT RETRY
                    1    GENERATE        500357             0       0
                    2    QUEUE           500357             0       0
                    3    ENTER           500357             0       0
                    4    DEPART          500357             0       0
                    5    ADVANCE         500357             1       0
                    6    LEAVE           500356             0       0
                    7    TERMINATE       500356             0       0
                    8    GENERATE             1             0       0
                    9    TERMINATE            1             0       0


QUEUE               MAX CONT. ENTRY ENTRY(0) AVE.CONT. AVE.TIME   AVE.(-0) RETRY
 1                    7    0 500357 448603     0.052      0.520      5.029   0


STORAGE             CAP. REM. MIN. MAX.  ENTRIES AVL.  AVE.C. UTIL. RETRY DELAY
 CHAN                 3    2   0    3   500357   1    1.501  0.500    0    0
```

For Help, press F1 | Report is Complete. | Clock

Рис. 3.7. Фрагмент отчёта (REPORT) GPSS World, выданного после прогона имитационной модели системы R|R|3 при $\rho = 0{,}5$

4. При выполнении имитационных экспериментов, как и прежде, рекомендуется моделировать СМО в течение времени, обеспечивающего прохождение примерно 100 тысяч заявок (на рис. 3.7 приведен пример моделирования с более высоким запасом времени сбора статистики, охватывающим прохождение 500 тыс. заявок).

График характеристики $L(\rho)$, приведенный на рис. 3.6, построен по 10 равноотстоящим значениям ρ, что потребовало выполнения 10 прогонов модели при разных значениях среднего времени обслуживания в блоке ADVANCE.

Результаты моделирования (рис. 3.6) позволяют заключить, что система M|M|3 представляет собой плохую аппроксимацию для системы R|R|3, так как в последней основная характеристика $L(\rho)$ растёт в несколько раз медленнее, чем в системе M|M|3. В данном случае, как и при моделировании одноканальной СМО, проявляется то обстоятельство, что коэффициент вариации равно-

мерно распределённой с. в. (задающей интервалы в системе R|R|3) значительно меньше коэффициента вариации экспоненциально распределённой с. в. (задающей интервалы в системе M|M|3).

По-видимому, в тех вариантах лабораторной работы, где коэффициенты вариации C_τ^2 и C_x^2 больше единицы, можно, наоборот, ожидать более быстрого роста характеристики $L(\rho)$, чем в экспоненциальной СМО с тем же числом каналов.

Варианты заданий

Варианты заданий приводятся в табл. 3.2. Наряду с ранее применявшимися обозначениями распределений, здесь используется обозначение HB^{ε} ограниченного гиперболического распределения с параметром ε (при $\varepsilon = 0{,}01$ и $\varepsilon = 0{,}001$). Рекомендации по формированию с. в. с распределениями, указанными в табл. 3.2, приводятся в приложении.

Таблица 3.2

Варианты заданий к лабораторной работе 2

№	Тип СМО	$M(\tau)$	№	Тип СМО	$M(\tau)$
1	$RT\|HB^{0,01}\|2$	10	11	$M\|H^2\|2$	10
2	$HB^{0,001}\|RT\|3$	10	12	$E^2\|R\|3$	10
3	$H^2\|M\|2$	10	13	$E^3\|H^2\|2$	10
4	$M\|E^2\|3$	10	14	$H^2\|D\|2$	10
5	$E^2\|E^3\|3$	10	15	$H^2\|R\|2$	10
6	$M\|R\|4$	10	16	$D\|HB^{0,01}\|2$	10
7	$H^2\|D\|3$	10	17	$HB^{0,001}\|E^2\|2$	10
8	$R\|D\|4$	10	18	$D\|E^4\|4$	10
9	$R\|E^3\|3$	10	19	$H^2\|RT\|2$	10
10	$R\|M\|4$	10	20	$D\|M\|4$	10

Форма отчёта

Для защиты лабораторной работы необходимо подготовить отчёт, оформить его и передать на проверку в установленном порядке. Файл, подготовленный в Ms Excel (см. рис. 3.6), и GPSS-модель вашего варианта СМО рекомендуется хранить в личном архиве до завершения аттестации по дисциплине «Моделирование систем».

Контрольные вопросы

1. Как определяется величина коэффициента загрузки ρ в многоканальной СМО?

2. Как можно интерпретировать значение коэффициента загрузки в многоканальной СМО?

3. Перечислите основные характеристики ограниченного гиперболического распределения вероятностей.

4. Покажите, что формулы для расчёта одноканальной экспоненциальной СМО являются частным случаем формул, приведенных выше для расчёта многоканальной экспоненциальной СМО.

5. Поясните, как по вашей GPSS-модели перемещаются транзакты, как формируются статистические показатели о функционировании СМО, как и когда завершается статистический эксперимент.

6. Покажите ваш файл GPSS-отчёта (REPORT) и поясните данные, содержащиеся в нём.

7. Как при среднем интервале поступления заявок, равном 10, вы определяете среднее время задержки транзакта в блоке ADVANCE, чтобы система имела требуемое значение коэффициента загрузки ρ?

8. Как вы изменяете среднее время задержки транзакта в блоке ADVANCE, не меняя при этом заданного вида закона распределения вероятностей?

9. Какая из формул (3.13–3.15) является формулой Литтла? Обоснуйте ответ.

Лабораторная работа 3
ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЛОКАЛЬНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК СеМО

Цель работы. Имитационное моделирование сети массового обслуживания (СеМО) и определение её локальных характеристик.

Содержание работы:

1. Изучение объекта моделирования (СеМО).
2. Предварительное аналитическое исследование СеМО с применением Ms Excel.
3. Разработка и отладка имитационной модели СеМО на языке GPSS World.
4. Выполнение имитационных экспериментов и анализ результатов.

Краткая теория и методические указания

1. Сетью массового обслуживания (СеМО) в общем случае называют совокупность СМО, в которой заявки с выходов одних СМО могут поступать на входы других СМО. Входными потоками заявок в СеМО называют потоки заявок, приходящих на входы отдельных СМО из внешней среды сети, но не с выхода каких-либо СМО, входящих в данную сеть.

Если заявки приходят в сеть и уходят из неё, то сеть называется *разомкнутой*. Если заявки не приходят в сеть и из неё не уходят, то сеть называется *замкнутой*. Число заявок в замкнутой сети постоянное.

Характеристики СеМО делятся на локальные и системные. К локальным характеристикам СеМО относятся характеристики отдельных входящих в неё СМО. Системные характеристики отражают свойства всей СеМО как единого целого.

Разомкнутая экспоненциальная СеМО

Экспоненциальной будем называть СеМО, которая обладает следующими свойствами:

– входные потоки, поступающие в СеМО из внешней среды, пуассоновские;

– во всех n СМО время обслуживания заявок в каналах имеет экспоненциальное распределение вероятностей;

– переход заявки с выхода i-й СМО на вход j-й СМО является независимым случайным событием, имеющим вероятность p_{ij} (возможно, нулевую), известную для всех $i, j = 1, ..., n$. При этом выполняется условие $p_{i1} + ... + p_{in} = 1 - p_{i0}$, где p_{i0} – вероятность ухода заявки, покидающей i-ю СМО, во внешнюю среду сети.

Разомкнутая экспоненциальная СеМО задается следующими параметрами:

1) числом n СМО;

2) числом $K_1, ..., K_n$ каналов в СМО с номерами 1, ..., n;

3) матрицей $\mathbf{P} = \| p_{ij} \|$ вероятностей передач, $i = 1, ..., n$; $j = 0, ..., n$;

4) интенсивностями $\Lambda_1, ..., \Lambda_n$ входных потоков заявок, поступающих из внешней среды в СМО с номерами 1, ..., n соответственно;

5) средними значениями $\bar{x}_1, ..., \bar{x}_n$ времени обслуживания заявок в СМО с номерами 1, ..., n.

Например, СеМО, изображённая на рис. 3.8, имеет следующие параметры:

1) число СМО в сети $n = 3$;

2) число каналов в СМО с номерами 1–3 соответственно $K_1 = 1$, $K_2 = 1$, $K_3 = 2$;

3) матрица переходных вероятностей

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \boxed{\begin{array}{cccc} 0{,}1 & 0 & 0{,}5 & 0{,}4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}} \end{array};$$

4) интенсивности входных потоков заявок из внешней среды СеМО $\Lambda_1 = 1$, $\Lambda_2 = 0$, $\Lambda_3 = 0$;

5) средние значения времени обслуживания $\bar{x}_1 = 0{,}07$, $\bar{x}_2 = 0{,}06$, $\bar{x}_3 = 0{,}35$.

В виде СеМО можно моделировать, например, информационно-вычислительные системы (ИВС). Тогда входные потоки заявок СеМО будут изображать запросы, поступающие на входы ИВС, отдельные СМО – процессоры и периферийные устройства, обрабатывающие запросы, выходные заявки СеМО – результаты обработки запросов.

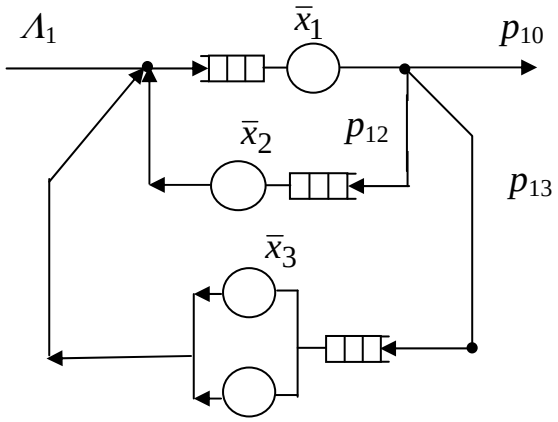


Рис. 3.8. Пример СеМО

В СеМО поток заявок на входе i-й СМО складывается в общем случае из входного потока Λ_i, поступающего из внешней среды сети, и из потоков, поступающих с выходов отдельных СМО. Входной поток СМО в экспоненциальной СеМО в общем случае получается *не пуассоновским*. Это означает, что отдельные СМО в ней в общем случае не

экспоненциальные. Тем не менее доказано (теорема Джексона), что СМО ведут себя в ней во многих отношениях *как экспоненциальные*. В частности, характеристики отдельных СМО могут быть рассчитаны по формулам (3.2–3.15). Отсюда следует, что для их расчёта в экспоненциальной СеМО достаточно найти интенсивности $\lambda_1, ..., \lambda_n$ входных потоков отдельных СМО.

Расчёт входных интенсивностей и характеристик отдельных СМО

Нахождение интенсивностей $\lambda_1, ..., \lambda_n$ осуществляется на основе *уравнений баланса потоков* в сети. При составлении уравнений баланса учитываются простые свойства слияния и разветвления потоков.

Если происходит *слияние* нескольких потоков заявок, то образуется один общий поток, интенсивность которого равна сумме интенсивностей всех сливающихся потоков.

Если поток *разветвляется* на несколько направлений, то образуются потоки, сумма интенсивностей которых равна интенсивности исходного потока. При этом если разветвление потока происходит путём случайного выбора заявками одного из направлений, то интенсивность потока на каждом направлении равна произведению интенсивности исходного потока и вероятности выбора данного направления.

В стационарной СеМО среднее число заявок в любой её фиксированной части не меняется во времени (свойство стационарности). Отсюда следует, что суммарная интенсивность входящих в эту часть потоков равна суммарной интенсивности выходящих потоков. Запись этого закона в математической форме представляет собой уравнение баланса потоков.

Выделяя в СеМО различные части и составляя для каждой части уравнение баланса, можно получить систему уравнений, связывающую искомые интенсивности $\lambda_1, ..., \lambda_n$ с известными интенсивностями $\Lambda_1, ..., \Lambda_n$. Обычно при этом в качестве отдельных частей СеМО выделяют отдельные СМО. В этом случае для n неизвестных получается n уравнений. Можно добавить к ним уравнение баланса, составленное для входных и выходных потоков всей СеМО. Тогда получится $n + 1$ уравнение, и одно (любое) из них можно либо исключить, как линейно связанное с остальными n уравнениями (выводимое из них), либо использовать в качестве проверочного уравнения для контроля правильности расчётов.

2. Уравнения баланса интенсивностей в сети, изображённой на рис. 3.8, составим, обозначая интенсивности на входах и выходах СМО и СеМО так, как показано на рис. 3.9. Эти обозначения (рис. 3.9) учитывают, что входные и выходные интенсивности отдельных

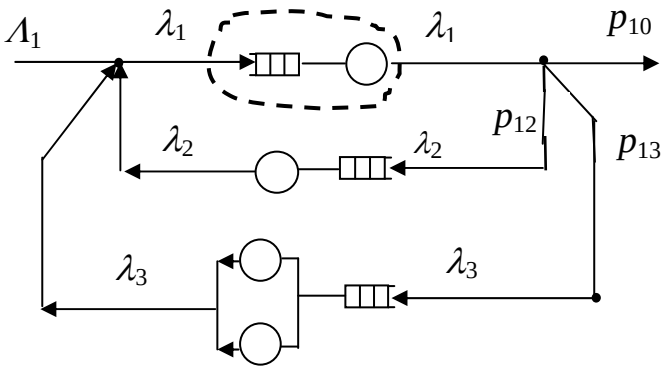


Рис. 3.9. К составлению уравнений баланса

СМО одинаковы. Применяя свойства слияния и разветвления потоков к входному и выходному потоку первой СМО (она обведена штриховой линией), запишем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \lambda_1 = \Lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \\ \Lambda_1 = p_{10}\lambda_1 \\ \lambda_2 = p_{12}\lambda_1 \\ \lambda_3 = p_{13}\lambda_1 \end{cases} \qquad (3.16)$$

Второе в (3.16) уравнение баланса учитывает, что выходная интенсивность всей СеМО равна входной интенсивности Λ_1.

При заданных параметрах $\Lambda_1 = 1$, $p_{10} = 0{,}1$, $p_{12} = 0{,}5$ и $p_{13} = 0{,}4$ из последних трёх уравнений в (3.16) находим, что $\lambda_1 = 10$, $\lambda_2 = 5$, $\lambda_3 = 4$. Теперь первое уравнение в (3.16) можно использовать для проверки найденных решений. Подставляя в него полученные значения интенсивностей, получаем тождество $10 = 1 + 5 + 4$. Это подтверждает правильность произведённых нами вычислений.

Расчёт входных интенсивностей следует завершать проверкой выполнения условий стационарности СеМО. Сеть стационарна, если стационарны все её СМО, т. е. если

$$\rho_j = \frac{\lambda_j \bar{x}_j}{K_j} \le 1, \qquad j = 1, \ldots, n. \qquad (3.17)$$

Проверить эти условия после того, как определены все λ_j, не представляет труда. Например, для СеМО (рис. 3.8) находим:

$$\rho_1 = 10 \cdot 0{,}07 = 0{,}7 \le 1,$$

$$\rho_2 = 5 \cdot 0{,}06 = 0{,}3 \le 1,$$

$$\rho_3 = 4 \cdot 0{,}35/2 = 0{,}7 \le 1,$$

т. е. условия стационарности (3.17) выполняются.

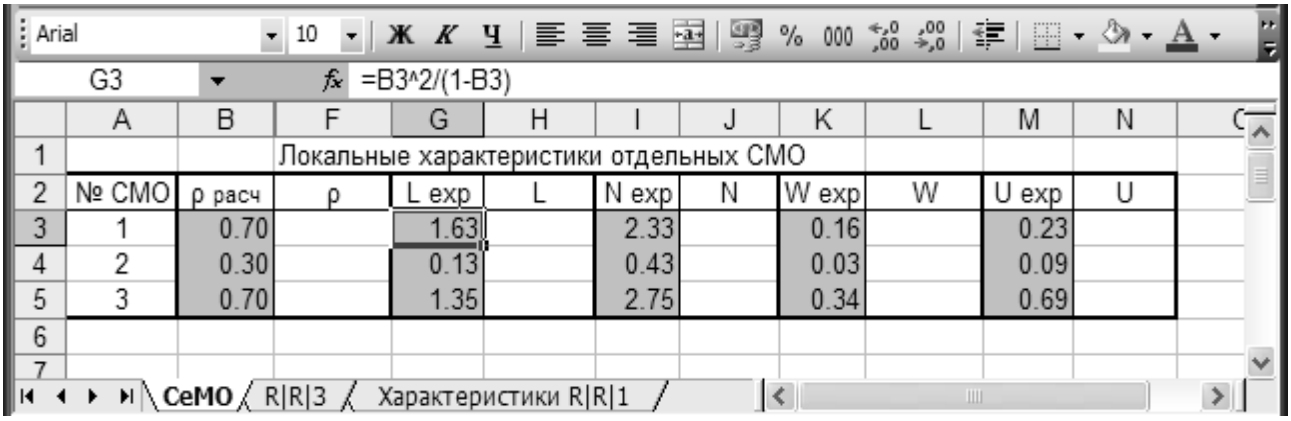
Если бы условия стационарности СеМО не выполнялись, то это означало бы, что расчёт входных интенсивностей СМО λ_j выполнен неверно, так как уравнения баланса потоков справедливы только для стационарной СеМО. В этом случае следует использовать методы расчёта нестационарных режимов. Заметим, что во многих случаях установление факта нестационарности СеМО приводит к завершению расчётов, так как свидетельствует о непригодности моделируемой системы (нехватке ресурсов для выполнения требуемых работ). В таких случаях принимают решение заменить в реальной системе те СМО, у которых коэффициент загрузки превышает единицу, более мощными системами.

Примечание 1. Составление и решение уравнений баланса СеМО не связано с предположениями об экспоненциальности распределения интервалов поступления и интервалов обслуживания заявок. Поэтому продемонстрированный метод расчёта интенсивностей λ_j и коэффициентов загрузки ρ_j отдельных СМО можно использовать и для предварительного анализа вашего варианта СеМО. Определяемые таким образом показатели λ_j и ρ_j являются точными.

Для стационарной *экспоненциальной* СеМО с известными интенсивностями λ_j расчёт локальных характеристик входящих в неё систем сводится к применению формул (3.2)–(3.15). Например, для рассматриваемой нами СеМО (рис. 3.8), применяя эти расчётные формулы, находим:

$\rho_1 = 0{,}7$, $L_1 = 1{,}633$, $N_1 = 2{,}333$, $W_1 = 0{,}163$, $U_1 = 0{,}233$,
$\rho_2 = 0{,}3$, $L_2 = 0{,}129$, $N_2 = 0{,}429$, $W_2 = 0{,}026$, $U_2 = 0{,}086$,
$\rho_3 = 0{,}7$, $L_3 = 1{,}345$, $N_3 = 2{,}745$, $W_3 = 0{,}336$, $U_3 = 0{,}686$.

Все приведенные решения для экспоненциальной СеМО являются точными. На рис. 3.10 приводится пример оформления листа Ms Excel с расчётом характеристик экспоненциальных СМО сети по их найденным выше коэффициентам загрузки. Пустые столбцы таблицы подготовлены для последующего внесения результатов имитационного моделирования исследуемой СеМО (как на рис. 3.14).



	A	B	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1			Локальные характеристики отдельных СМО								
2	№ СМО	ρ расч	ρ	L exp	L	N exp	N	W exp	W	U exp	U
3	1	0.70		1.63		2.33		0.16		0.23	
4	2	0.30		0.13		0.43		0.03		0.09	
5	3	0.70		1.35		2.75		0.34		0.69	
6											
7											

Рис. 3.10. Пример оформления расчёта характеристик экспоненциальных СМО

3. Разработка и отладка имитационной модели СеМО на языке GPSS World здесь не составляет особого труда, поскольку моделирующая программа просто составляется из нескольких частей, которые соответствуют отдельным СМО и соединяются между собой блоками TRANSFER, предназначенными для передачи транзактов.

В качестве примера приведём для рассматриваемой сети (см. рис. 3.8) моделирующую программу, изображённую на рис. 3.11. Программа состоит из однотипных частей, соответствующих СМО с номерами 1–3. Третья СМО моделируется памятью STORAGE с ёмкостью 2 единицы. Интервал поступления транзактов задан в блоке GENERATE библиотечным генератором случайных чисел, имеющих экспоненциальное распределение вероятностей. Поскольку имя библиотечной процедуры Exponential является выражением, помещённым в поле блока, то оно, согласно синтаксису GPSS World, заключено в скобки. Три аргумента процедуры Exponential – это номер генератора стандартных случайных чисел, смещение генерируемой с. в. относительно нуля и м. о. генерируемой с. в.

В блоках ADVANCE случайная задержка транзакта задаётся аналогичным образом. Среднее значение экспоненциальной задержки везде указано в соответствии с заданными параметрами моделируемой СеМО.

```
Chan        STORAGE    2
            GENERATE   (Exponential(1,0,1))
CMO1        QUEUE      1
            SEIZE      1
            DEPART     1
            ADVANCE    (Exponential(1,0,0.07))
            RELEASE    1
            TRANSFER   .1,,Exit_
            TRANSFER   .4444,CMO2,CMO3
CMO2        QUEUE      2
            SEIZE      2
            DEPART     2
            ADVANCE    (Exponential(1,0,0.06))
            RELEASE    2
            TRANSFER   ,CMO1
CMO3        QUEUE      3
            ENTER      Chan
            DEPART     3
            ADVANCE    (Exponential(1,0,0.35))
            LEAVE      Chan
            TRANSFER   ,CMO1
Exit_       TERMINATE
            GENERATE   1000
            TERMINATE  1

For Help, press F1        Report is Complete.   Clock
```

Рис. 3.11. Имитационная модель СеМО

Транзакты на выходе СМО 1 перенаправляются в другие части модели парой сопряжённых блоков TRANSFER, работающих в статистическом режиме. Поскольку транзакты распределяются здесь более чем по двум направлениям, понадобилось более одного блока TRANSFER. Блок TRANSFER .1,,Exit_ (см. рис. 3.11) переправляет транзакты с вероятностью 0,1 по метке Exit_ (на выход из системы) либо (с дополнительной вероятностью 1 – 0,1 = 0,9) к следующему по тексту блоку (т. е. к блоку TRANSFER .4444,СМО 2,СМО 3). Далее тот транзакт, который попал во второй блок сопряжённой пары TRANSFER, с вероятностью 0,4444 переходит по метке СМО 3. Но перед тем как направиться туда, он должен был ещё войти в этот второй блок пары TRANSFER. Последовательный выбор обоих рассматриваемых переходов происходит с вероятностью 0,9 · 0,4444 = 0,4. Таким образом, с выхода СМО1 транзакт с вероятностью 0,4 передаётся парой сопряжённых блоков TRANSFER по метке СМО 3. Аналогично с вероятностью 0,9 · (1 – 0,4444) = 0,5 он передаётся по метке СМО 2.

На рис. 3.12 приводится трассировка блоков – фрагмент результатов выполнения модели, запущенной командой START 50. Счётчики входов Entry Count показывают, что в блок СМО 1 вошло около 100 тыс. транзактов, в блок СМО 2 – около 50 тыс., в блок СМО 3 – около 40 тыс. и в блок Exit_ – около 10 тыс., что соответствует заданным вероятностям на выходе СМО 1. Отклонения пропорций счётчиков от точных отношений вероятностей связаны со случайным характером процессов. Чем дольше моделируется СеМО, тем меньше эти отклонения.

LABEL	LOC	BLOCK TYPE	ENTRY COUNT	CURRENT COUNT	RETRY
	1	GENERATE	10131	0	0
CMO1	2	QUEUE	100287	0	0
	3	SEIZE	100287	0	0
	4	DEPART	100287	0	0
	5	ADVANCE	100287	0	0
	6	RELEASE	100287	0	0
	7	TRANSFER	100287	0	0
	8	TRANSFER	90164	0	0
CMO2	9	QUEUE	49906	4	0
	10	SEIZE	49902	0	0
	11	DEPART	49902	0	0
	12	ADVANCE	49902	1	0
	13	RELEASE	49901	0	0
	14	TRANSFER	49901	0	0
CMO3	15	QUEUE	40258	1	0
	16	ENTER	40257	0	0
	17	DEPART	40257	0	0
	18	ADVANCE	40257	2	0
	19	LEAVE	40255	0	0
	20	TRANSFER	40255	0	0
EXIT_	21	TERMINATE	10123	0	0
	22	GENERATE	10	0	0
	23	TERMINATE	10	0	0

For Help, press F1 | Report is Complete. | Clock

Рис. 3.12. Фрагмент отчёта GPSS World – трассировка блоков модели

Другой фрагмент полученного отчёта – статистические значения показателей устройств, памяти и очередей – приводится на рис. 3.13. На нём виден также фрагмент окна с программой и фрагмент окна журнала (процесса моделирования).

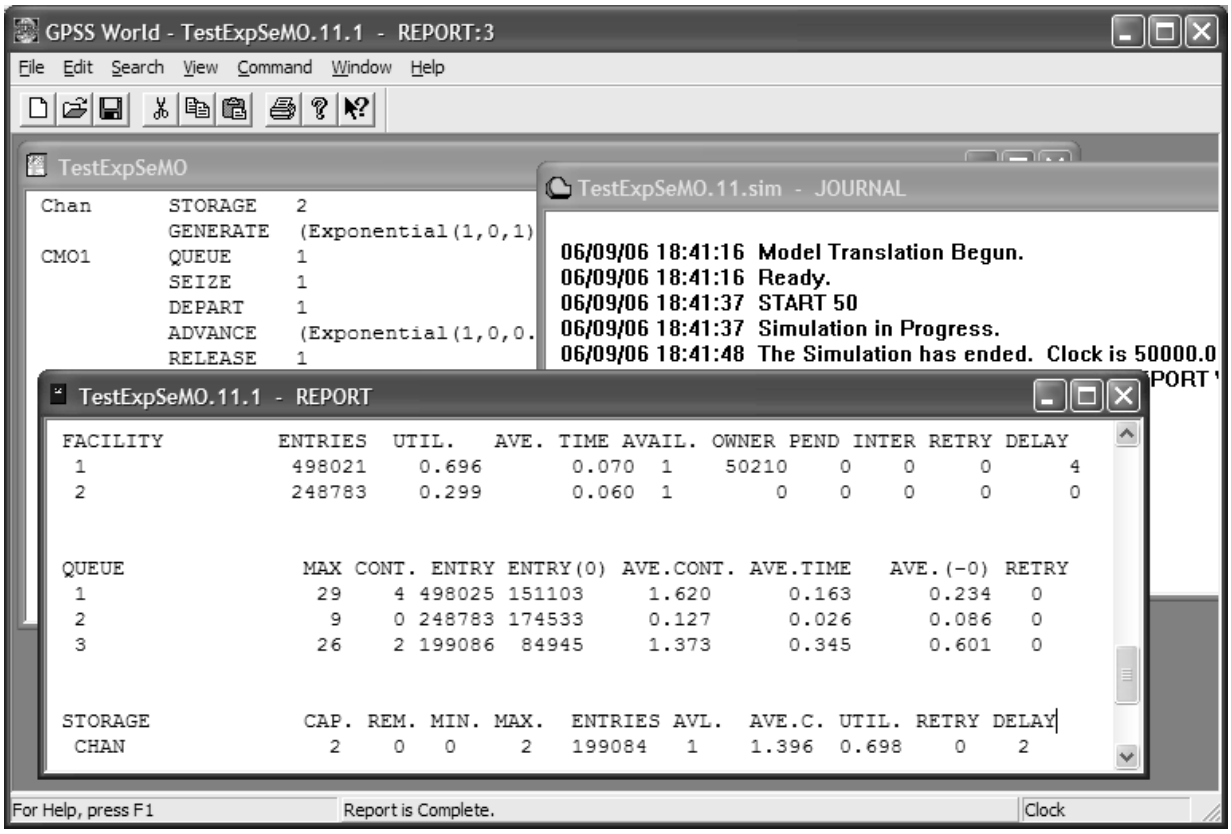
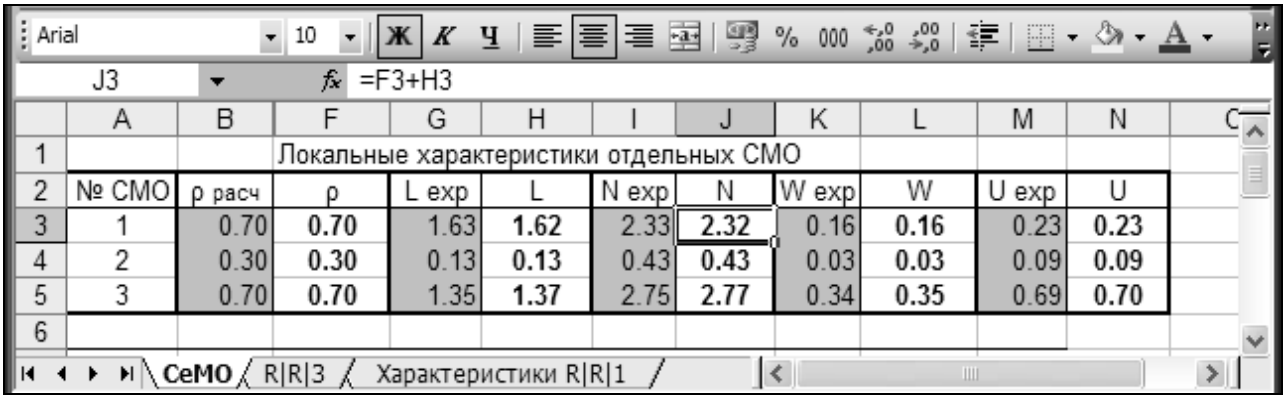


Рис. 3.13. Основные окна GPSS World после трансляции и прогона модели

Журнал JOURNAL (рис. 3.13) содержит строки с датой и временем выполнения операций имитационного эксперимента. По данным журнала можно су-

дить, например, о том, что выполнение имитационной модели СеМО продолжалось 11 секунд.

Полученные в имитационном эксперименте коэффициенты загрузки, средние длины очередей и средние значения времени ожидания в очередях, выданные в окне REPORT (рис. 3.13), перенесём в ранее подготовленную таблицу MsExcel (рис. 3.10), получая таблицу (рис. 3.14) для их сравнения с точными (тёмные столбцы) расчётными показателями. Экспериментальные значения среднего числа N заявок в каждой системе и среднего времени U прохождения заявки через каждую систему рассчитаны через другие экспериментальные показатели как соответствующие суммы.



J3 =F3+H3

	A	B	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1			Локальные характеристики отдельных СМО								
2	№ СМО	ρ расч	ρ	L exp	L	N exp	N	W exp	W	U exp	U
3	1	0.70	**0.70**	1.63	**1.62**	2.33	**2.32**	0.16	**0.16**	0.23	**0.23**
4	2	0.30	**0.30**	0.13	**0.13**	0.43	**0.43**	0.03	**0.03**	0.09	**0.09**
5	3	0.70	**0.70**	1.35	**1.37**	2.75	**2.77**	0.34	**0.35**	0.69	**0.70**
6											

СеМО / R|R|3 / Характеристики R|R|1

Рис. 3.14. Сравнение результатов моделирования с расчётными значениями

Выполненное на рис. 3.14 сравнение показывает, что при имитационном моделировании СеМО в течение модельного времени, обеспечивающего прохождение через каждую СМО около сотни тысяч заявок, относительная погрешность результатов моделирования не выходит обычно за пределы двух-трёх процентов.

Примечание 2. В вариантах заданий, указанных в табл. 3.3, сеть в целом не является экспоненциальной. Поэтому расчётные показатели, получаемые в предположении, что тот или иной вариант сети можно приближённо рассматривать как экспоненциальную СеМО, могут значительно отличаться от результатов имитационного моделирования. Для достижения достаточно высокой точности результатов моделирования рекомендуется обеспечить прохождение через сеть около 100 тысяч заявок.

Варианты заданий

На рис. 3.15 изображена разомкнутая СеМО, имеющая следующие параметры:

1) $n = 6$;
2) $K_1 = 1$, $K_2 = 1$, $K_3 = 2$, $K_4 = 1$, $K_5 = 1$, $K_6 = 1$;
3) $p_{40} = 0{,}3$, $p_{45} = 0{,}5$ и $p_{46} = 0{,}2$;
4) $\Lambda_1 = 1/100$, $\Lambda_2 = 1/70$, $\Lambda_3 = 1/50$ (c^{-1});
5) $\bar{x}_1 = 50$, $\bar{x}_2 = 35$, $\bar{x}_3 = 90$, $\bar{x}_4 = 7$, $\bar{x}_5 = 15$, $\bar{x}_6 = 40$ (c).

Все входные потоки СеМО пуассоновские. Интервалы обслуживания имеют разные распределения в разных вариантах работы.

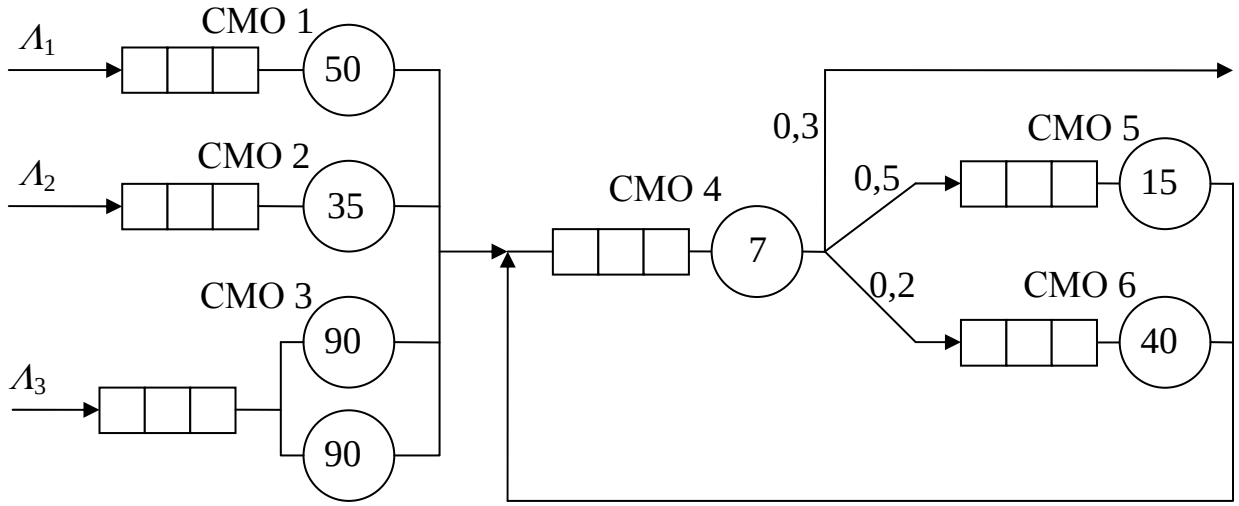


Рис. 3.15. Схема СеМО
(в символах каналов указано среднее время обслуживания)

Определим правила удаления СМО из сети (рис. 3.15) следующим образом. Если удаляется СМО с номером от 1 до 3, то удаляется также соответствующий входной поток. Например, при удалении СМО 1 удаляется её входной поток с интенсивностью Λ_1. СМО 4 не удаляется. Если удаляется СМО 5, то вероятность p_{40} становится равной 0,8, а при удалении СМО 6 вероятность p_{40} становится равной 0,5.

В табл. 3.3 определены 20 вариантов СеМО, которые получаются из этой сети (см. рис. 3.15) путём удаления СМО, под номерами которых в таблице стоит знак «–». Для остающихся СМО в таблице заданы типы вероятностных распределений времени обслуживания заявки. Используемые обозначения введены в предыдущих работах.

Таблица 3.3

Варианты заданий к лабораторной работе 3

№	Номера СМО					
	1	2	3	4	5	6
1	M	M	–	$H^{1,5}$	–	E^2
2	M	M	–	$H^{1,6}$	R	R
3	–	–	M	$H^{1,7}$	–	E^2
4	–	H^2	–	$H^{1,8}$	–	E^2
5	–	H^2	–	$H^{1,9}$	R	R
6	H^2	–	–	H^2	R	R
7	M	M	–	$H^{2,1}$	E^2	–
8	–	–	M	$H^{2,2}$	E^2	–
9	–	H^2	–	$H^{2,3}$	E^2	–
10	M	M	–	$H^{2,4}$	–	H^2
11	R	R	–	$H^{2,5}$	–	H^2
12	R	R	–	$H^{2,6}$	M	M
13	–	–	M	$H^{2,7}$	–	H^2
14	–	H^2	–	$H^{2,8}$	–	H^2

Окончание табл. 3.3

№	Номера СМО					
	1	2	3	4	5	6
15	–	H^2	–	$H^{2,9}$	M	M
16	H^2	–	–	H^3	M	M
17	R	R	–	$H^{3,1}$	H^2	–
18	–	–	M	$H^{3,2}$	H^2	–
19	–	H^2	–	$H^{3,3}$	H^2	–
20	R	R	–	$H^{3,4}$	M	M

Форма отчёта

Для защиты лабораторной работы необходимо подготовить отчёт, оформить его и передать на проверку в установленном порядке. Файлы, полученные при выполнении вашего варианта работы в Ms Excel (см. рис. 3.14) и в GPSS World (см. рис. 3.11–3.13), рекомендуется хранить в личном архиве до завершения аттестации по дисциплине «Моделирование систем».

В отчёте следует объяснить причины расхождения или, наоборот, близости результатов имитационного моделирования и результатов расчёта.

Контрольные вопросы

1. Чем отличаются разомкнутые и замкнутые СеМО?

2. Как (и для определения каких неизвестных) составляются и решаются уравнения баланса разомкнутой СеМО?

3. Составьте уравнение, по которому можно рассчитывать аргумент поля A во втором блоке сопряжённой пары блоков TRANSFER (на рис. 3.11 он равен 0,4444). Исходные условия таковы: транзакты должны случайно распределяться по трём заданным направлениям с заданными вероятностями p_1, p_2, p_3 (для $p_1 + p_2 + p_3 = 1$). При этом считается, что вероятность p_1 указана в поле A первого блока TRANSFER, так что транзакт переходит ко второму блоку с вероятностью $(1 - p_1)$. Вероятность p_3 – это требуемая вероятность, с которой пара сопряжённых блоков должна отправлять транзакт по метке поля C второго блока TRANSFER.

Решите составленное уравнение относительно искомого аргумента поля A.

4. Прочитайте с помощью команды Help GPSS World, как используется режим Pick блока TRANSFER. Можно ли в модели на рис. 3.11 вместо пары сопряжённых блоков TRANSFER, переводящих транзакт (в статистическом режиме) по одному из трёх направлений, использовать один блок TRANSFER в режиме Pick?

5. Поясните назначение аргументов A, B и C функции Exponential(A, B, C) в GPSS World.

6. Укажите в окне REPORT на рис. 3.13 коэффициенты загрузки одноканальных и многоканальной СМО, средние длины очередей и средние времена ожидания заявок в очередях.

Лабораторная работа 4
ОПРЕДЕЛЕНИЕ СИСТЕМНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК СеМО

Цель работы. Имитационное моделирование сети массового обслуживания (СеМО) и определение её системных характеристик.

Содержание работы:

1. Предварительное аналитическое исследование СеМО с применением Ms Excel.

2. Модификация и отладка имитационной модели СеМО на языке GPSS World.

3. Выполнение имитационных экспериментов, определение системных характеристик СеМО, включая гистограммы распределений, и анализ результатов.

Краткая теория и методические указания

1. Если локальные характеристики СеМО относятся к её отдельным СМО, то системные характеристики отражают свойства сети в целом, рассматриваемой как единая, не делимая на части система.

Расчёт системных характеристик разомкнутых СеМО

К наиболее важным системным характеристикам разомкнутой СеМО можно отнести следующие показатели.

1) Среднее время E пребывания заявки в сети

Временем пребывания заявки в сети называется время между моментом прихода заявки в сеть и моментом её ухода из сети. Это время случайное. Его среднее значение (по всем заявкам) и есть показатель E.

2) Входовое среднее время F_i пребывания заявок в сети

Величина F_i определяется как среднее время пребывания в сети такой заявки, которая поступает из i-го входного потока ($i = 1,\ldots, n$).

3) Абсолютная пропускная способность A_i

Предположим, что в заданной стационарной СеМО интенсивности всех входных потоков, кроме i-го, мы заменяем *на нулевые*. После этого интенсивность i-го входного потока Λ_i может быть увеличена до некоторого максимально возможного значения A_i, при котором сеть еще стационарна. Это значение A_i будем называть абсолютной пропускной способностью сети по i-му входу.

Если сделать $\Lambda_i > A_i$, то сеть становится не стационарной, каковы бы ни были интенсивности остальных входных потоков.

4) Условные пропускные способности $B_1, \ldots, B_n$

Если в заданной стационарной СеМО интенсивности всех входных потоков, кроме i-го, *фиксированы в заданных значениях*, то интенсивность Λ_i можно увеличивать до некоторого максимального значения B_i, при котором сеть ещё стационарна. Это значение B_i, в общем случае отличающееся от A_i, будем называть условной пропускной способностью по i-му входу.

Для фиксированных Λ_k ($k \neq i$) сеть стационарна при любых $\Lambda_i \leq B_i$.

5) <u>*Запасы D_1, ..., D_n по пропускным способностям*</u>

Запас D_i определяется в виде $D_i = B_i - \Lambda_i$ (i = 1, ..., n). Запас D_i показывает, насколько может быть увеличена интенсивность прихода заявок по i-му входу в сеть (при заданных остальных интенсивностях) без нарушения условия стационарности.

Если в виде СеМО моделируется некоторая реальная система, то перечисленные системные характеристики сети могут дать ценную информацию о свойствах этой реальной системы. Например, если СеМО изображает информационно-вычислительную сеть, то среднее время пребывания E характеризует среднее время ответа системы на запросы, а запасы D_i выражают готовность моделируемой сети продолжать устойчивое функционирование при увеличении нагрузки (интенсивности запросов) по тому или иному входу.

Среднее время E пребывания заявок в СеМО рассчитывается по формуле Литтла

$$E = \mathrm{N}/\Lambda, \tag{3.18}$$

где $\mathrm{N} = N_1 + \ldots + N_n$ – среднее число заявок в СеМО, $\Lambda = \Lambda_1 + \ldots + \Lambda_n$ – суммарная интенсивность поступления заявок в сеть по всем входам.

Расчёт системных характеристик СеМО выполняется после определения её локальных характеристик. Так, в формуле (3.18) используются локальные показатели N_i.

Для рассмотренного в предыдущей работе примера СеМО (см. рис. 3.8) среднее время прохождения заявки через сеть составляет

$$E = (2{,}333 + 0{,}429 + 2{,}745)/(1 + 0 + 0) = 5{,}507. \tag{3.19}$$

Входовые средние времена $F_1, \ldots, F_n$ определяются с помощью уравнений, которые можно составлять, опираясь на конфигурацию СеМО и учитывая свойство суммы и свойство смеси случайных величин.

Свойство суммы с. в. состоит в том, что м. о. суммы случайных величин всегда равно сумме м. о. этих с. в.

Смесью с. в. $x_1, \ldots, x_k$ называется с. в. z, которая с вероятностью p_1 принимает значение с. в. x_1, с вероятностью p_2 – значение с. в. x_2, …(и т. д.)… и с вероятностью p_k – значение с. в. x_k. Здесь $p_1 + \ldots + p_k = 1$, и случайный выбор из случайных величин x_i статистически независим от их значений. Смесь z имеет м. о.

$$\bar{z} = p_1\bar{x}_1 + \ldots + p_k\bar{x}_k\,. \tag{3.20}$$

Теперь рассмотрим СеМО на рис. 3.8 и проследим, как формируется с. в. «входовое время пребывания в сети» для заявок первого потока.

Из рис. 3.8 видно, что это время состоит из двух слагаемых. Первое слагаемое есть время пребывания в СМО 1, составляющее в среднем U_1. Второе слагаемое, формируемое в момент выхода заявки из СМО 1, есть смесь трёх с. в.: с вероятностью p_{10} оно равно нулю (когда заявка покидает сеть), с вероятностью p_{12} равно входовому времени F_2 (когда заявка с выхода СМО 1 «входит в сеть» через СМО 2) и с вероятностью p_{13} – входовому времени F_3. Отсюда с учётом свойства смеси вытекает, что в среднем второе слагаемое составляет величину $p_{10} \times 0 + p_{12}F_2 + p_{13}F_3 = p_{12}F_2 + p_{13}F_3$. В целом среднее входовое время

пребывания F_1 (по свойству суммы) равно сумме средних значений первого и второго своих слагаемых:

$$F_1 = U_1 + p_{12}F_2 + p_{13}F_3. \qquad (3.21)$$

Рассуждая аналогично о входовом среднем времени F_2 и входовом среднем времени F_3, можно записать для них другие уравнения, которые вместе с (3.21) составят следующую систему:

$$\begin{cases} F_1 = U_1 + p_{12}F_2 + p_{13}F_3 \\ F_2 = U_2 + F_1 \\ F_3 = U_3 + F_1 \,. \end{cases} \qquad (3.22)$$

Из этой системы с известными U_j (они вычислены при расчёте локальных характеристик СеМО) нетрудно найти решение: $F_1 = 5{,}507$, $F_2 = 5{,}593$, $F_3 = 6{,}202$ (c).

По аналогии с (3.22) можно составлять уравнения относительно F_i для любой экспоненциальной СеМО.

Примечание 1. Если речь идёт о СеМО других типов, то при составлении уравнений для входовых времён необходимо убедиться, что выбор очередного слагаемого (т. е. выбор продолжения маршрута заявки) является случайным событием, независимым от выбираемых слагаемых. В нашей СеМО и в вариантах заданий к лабораторной работе это условие выполняется по определению. Но оно не выполняется, например, когда заявка выбирает переход к СМО с минимальной очередью.

Абсолютную пропускную способность по i-му входу A_i можно найти следующим образом.

В уравнениях баланса (см., например, (3.16)) нужно все имеющиеся там входные интенсивности Λ_k сохранить в буквенном виде, как переменные. Решая систему уравнений относительно входных интенсивностей СМО λ_j ($j = 1, \ldots, n$), нетрудно выразить их через переменные Λ_k в виде

$$\lambda_j = \sum_k \alpha_{kj}\Lambda_k \,, \qquad j = 1, \ldots, n. \qquad (3.23)$$

Получаемые таким образом числовые коэффициенты α_{kj} имеют смысл среднего числа прохождений через j-ю СМО той заявки, которая входит в сеть из k-го входного потока. Коэффициент α_{kj} – это *коэффициент передачи* интенсивности (от k-й входной точки СеМО к входной точке j-й СМО). С учётом (3.23) условия стационарности $\rho_j \le 1$ ($j = 1, \ldots, n$) можно записать следующим образом:

$$\rho_j = \frac{\lambda_j \bar{x}_j}{K_j} = \frac{\bar{x}_j}{K_j}\sum_k \alpha_{kj}\Lambda_k \le 1, \qquad j = 1, \ldots, n. \qquad (3.24)$$

В системе линейных неравенств (3.24), которой должны удовлетворять переменные Λ_k, известны (и неотрицательны) все входящие в неё числовые коэффициенты. Эта система вместе с естественными ограничениями $\Lambda_k \ge 0$ ($k = 1, \ldots, n$) задаёт в евклидовом пространстве R^n выпуклый многогранник – область стационарности, точки которой ($\Lambda_1, \ldots, \Lambda_i, \ldots, \Lambda_n$) соответствуют допустимой для СеМО стационарной нагрузке.

После получения системы (3.24) из неё легко определяется абсолютная пропускная способность сети A_i по любому выбранному i-му входу. Для этого достаточно в этой системе неравенств заменить все Λ_k, кроме Λ_i, нулями и найти максимально возможное значение $\Lambda_i = A_i$, при котором система неравенств не нарушается. Из (3.24) можно видеть, что при этом получается следующее решение:

$$A_i = \min_j \left\{ \frac{K_j / \overline{x}_j}{\alpha_{ij}} \right\}. \qquad (3.25)$$

Содержательный смысл выражения (3.25) достаточно прост. Числитель дроби – это интенсивность обслуживания заявок в j-й СМО, когда она работает без простоя. Разделив эту интенсивность на передаточный коэффициент α_{ij}, мы определяем соответствующую интенсивность рассматриваемого входного потока СеМО. Поскольку ни одна СМО не должна получить нагрузку, которая была бы больше предельно допустимой, мы выбираем минимум.

Например, для СеМО, изображённой на рис. 3.8, в которой только первый входной поток имеет ненулевую интенсивность $\Lambda_1 = 1$, мы ранее нашли, что $\lambda_1 = 10$, $\lambda_2 = 5$, $\lambda_3 = 4$ (c^{-1}). Поскольку все λ_j здесь просто пропорциональны Λ_1, то можно сразу определить передаточные коэффициенты: $\alpha_{11} = 10$, $\alpha_{12} = 5$, $\alpha_{13} = 4$. Поэтому данная сеть стационарна, пока $\Lambda_1 \le A_1$, где $A_1 = \min\{1/(10\cdot 0{,}07); 1/(5\cdot 0{,}06); 2/(4\cdot 0{,}35)\} = \min\{10/7; 10/3; 10/7\} = 10/7(c^{-1})$.

Относительная пропускная способность по i-му входу СеМО может быть найдена по такому же алгоритму, как и абсолютная, с тем лишь отличием, что в условиях стационарности (3.24) все интенсивности Λ_k для $k \ne i$ сохраняются равными численно заданным в исходной модели. Относительная пропускная способность B_k определяется как наибольшее значение интенсивности Λ_k, удовлетворяющее одновременно всем неравенствам системы (3.24) при фиксированных Λ_j для ($j \ne k$).

Для рассматриваемой нами в качестве примера СеМО (см. рис. 3.8) относительная пропускная способность B_1 совпадает с A_1, поскольку все входные потоки в СеМО, кроме первого, нулевые. Следовательно, для этой СеМО $B_1 = 10/7$ (c^{-1}).

Запасы по пропускным способностям вычисляются в соответствии с их определениями. Для используемого примера СеМО (рис. 3.8) запас по её пропускной способности для первого входного потока составляет $D_1 = B_1 - \Lambda_1 = 10/7 - 1 = 3/7$ (c^{-1}).

3. В данной лабораторной работе необходимо рассчитать аналитически и/или определить путём имитационного моделирования системные характеристики E, F_i, A_i, B_i и D_i для вашего конкретного варианта СеМО (см. табл. 3.3).

Путём имитационного моделирования требуется также построить гистограммы распределения вероятностей: а) для времени t прохождения заявок через сеть; б) для числа $\acute{n}$ заявок, застигаемых в сети вновь приходящей заявкой.

Для определения показателей E и F_i при имитационном моделировании в GPSS-программу рекомендуется ввести соответствующие пары блоков QUEUE

(при входе заявки в сеть) и DEPART (при выходе из сети). Одна из этих очередей будет иметь содержимое, равное числу всех заявок в сети, поэтому её можно одновременно использовать и для получения гистограммы распределения с. в. $\acute{n}$.

Построение гистограмм осуществляется с помощью соответствующих таблиц TABLE и блоков сбора статистики TABULATE. Например, в программу, листинг которой представлен на рис. 3.11, с целью сбора статистики о случайных величинах t и $\acute{n}$ были добавлены следующие операторы, выделенные ниже жирным шрифтом:

```
Chan       STORAGE   2
E_time      TABLE     M1,0,1,20
N_general TABLE      Q$general,0,1,20
           GENERATE (Exponential(1,0,1))
           TABULATE N_general
           QUEUE     general
CMO1       QUEUE     1
           •
           •
           •
           TRANSFER    ,CMO1
Exit_      TABULATE   E_time
           DEPART     general
           TERMINATE
           GENERATE   1000
           TERMINATE  1
```

Здесь в строке E_time описываются параметры таблицы (гистограммы) для сбора статистики о времени прохождения через сеть. Сбор статистики (регистрация времени M1) осуществляется блоком с меткой Exit_. Следующий за ним блок регистрирует выход транзакта из очереди general. Каждый транзакт входит в неё в момент появления из первого блока GENERATE, но перед входом табулирует число $\acute{n}$ имеющихся в сети других транзактов (не считая себя).

На рис. 3.16 приведены гистограммы распределения с. в. t (слева) и $\acute{n}$ (справа) для примера СеМО (см. рис. 3.8), полученные моделированием 50 тыс. единиц модельного времени.

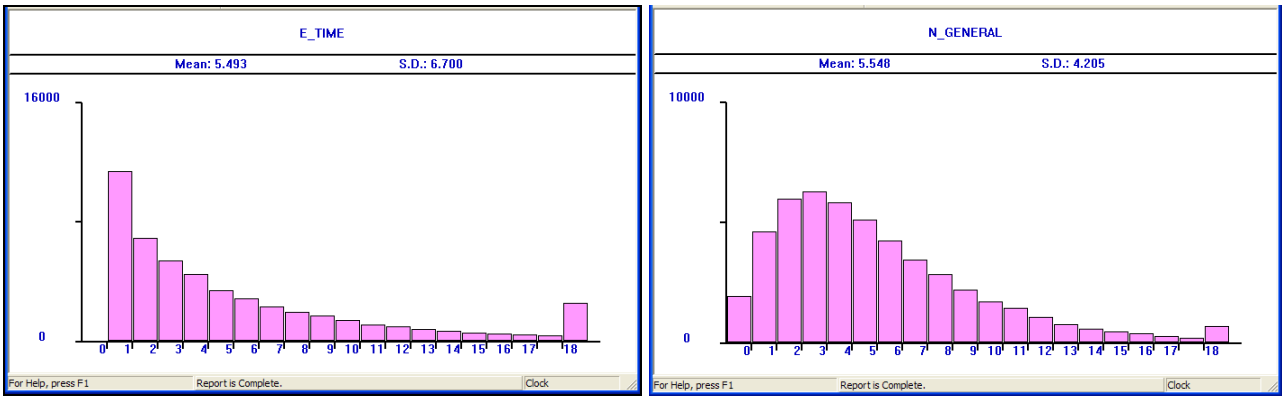
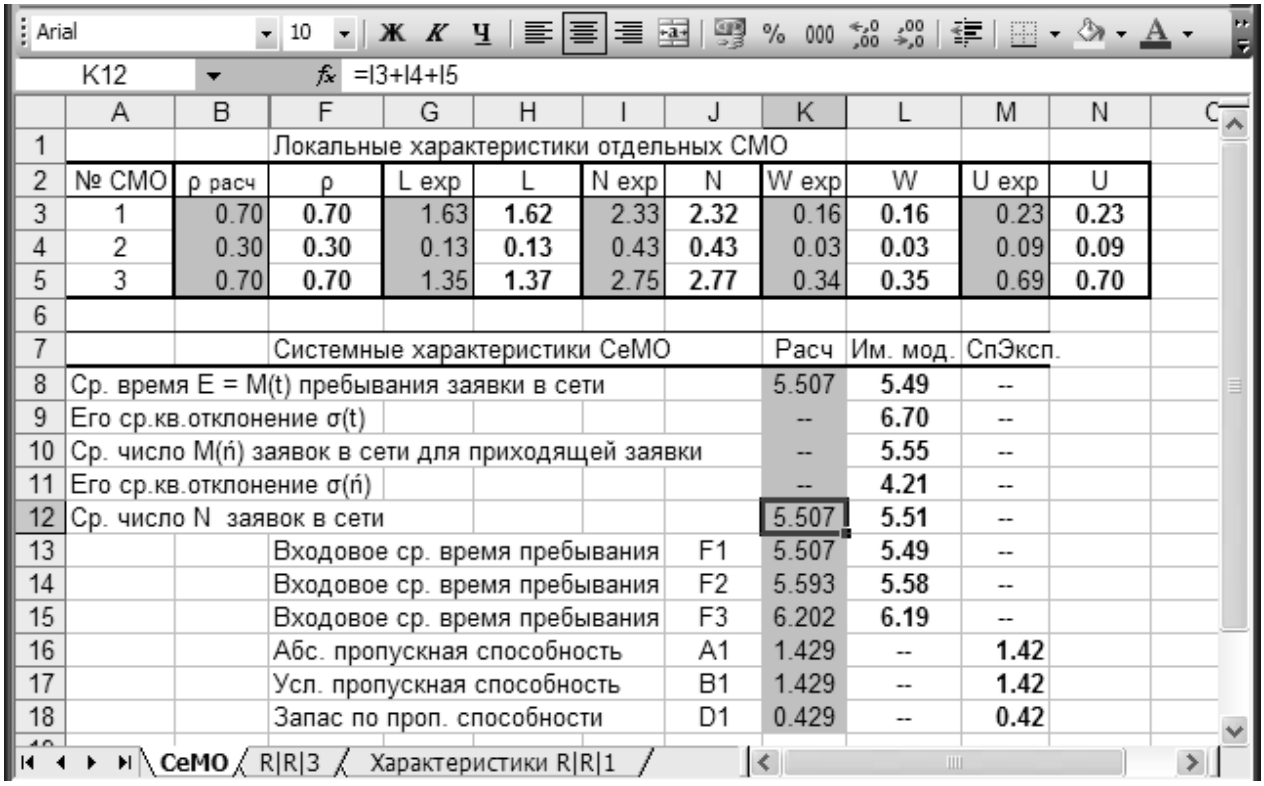


Рис. 3.16. Гистограммы времени пребывания в сети и числа застигнутых заявок

На рис. 3.17 приведено сравнение расчётных результатов и результатов моделирования. Точное расчётное среднее время E пребывания заявки в сети,

найденное по формуле (3.18), составило 5,507*с*. Оценка этого показателя, выданная после прогона модели (длившегося 50 тыс. единиц модельного времени) как среднее время прохождения очереди general, получилась равной 5,494 *с*. Среднее время, выданное таблицей E_time, составило 5,493 *с*. Все эти значения получились достаточно близкими.



K12 =I3+I4+I5

	A	B	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1			Локальные характеристики отдельных СМО								
2	№ СМО	ρ расч	ρ	L exp	L	N exp	N	W exp	W	U exp	U
3	1	0.70	**0.70**	1.63	**1.62**	2.33	**2.32**	0.16	**0.16**	0.23	**0.23**
4	2	0.30	**0.30**	0.13	**0.13**	0.43	**0.43**	0.03	**0.03**	0.09	**0.09**
5	3	0.70	**0.70**	1.35	**1.37**	2.75	**2.77**	0.34	**0.35**	0.69	**0.70**
6											
7			Системные характеристики СеМО					Расч	Им. мод.	СпЭксп.	
8	Ср. время E = M(t) пребывания заявки в сети							5.507	**5.49**	--	
9	Его ср.кв.отклонение σ(t)							--	**6.70**	--	
10	Ср. число M(ń) заявок в сети для приходящей заявки							--	**5.55**	--	
11	Его ср.кв.отклонение σ(ń)							--	**4.21**	--	
12	Ср. число N заявок в сети							5.507	**5.51**	--	
13			Входовое ср. время пребывания				F1	5.507	**5.49**	--	
14			Входовое ср. время пребывания				F2	5.593	**5.58**	--	
15			Входовое ср. время пребывания				F3	6.202	**6.19**	--	
16			Абс. пропускная способность				A1	1.429	--	**1.42**	
17			Усл. пропускная способность				B1	1.429	--	**1.42**	
18			Запас по проп. способности				D1	0.429	--	**0.42**	

СеМО / R|R|3 / Характеристики R|R|1

Рис. 3.17. Пример оформления таблицы с результатами моделирования СеМО

Расчётное среднее число заявок N = 5,507 близко к среднему содержимому 5,511 очереди general. Оба эти числа более заметно отличаются от среднего значения с. в. *ń*, выданного таблицей N_general. Эта разница объясняется тем, что здесь сравниваются разные показатели. Число заявок *ń*, застигаемое в сети каждой приходящей заявкой, – это случайный процесс, определённый на множестве дискретных моментов времени, и его свойства зависят от расположения этих моментов на оси времени. А среднее число заявок в сети N, определяемое очередью general, таблицей E_time или по формуле Литтла, – это среднее значение процесса *n*, рассматриваемого на непрерывном времени, который имеет иные свойства, нежели процесс *ń*. Сравните с примером аналогичного различия статистик в лабораторной работе 1 в примечании 1.

Варианты заданий

Необходимо рассчитать аналитически системные характеристики E, F_i, A_i, B_i и D_i для вашего варианта СеМО (см. табл. 3.3). При этом входовые характеристики A_i, B_i и D_i достаточно рассчитать только для одного входного потока, номер которого i – это наименьший из номеров СМО в вашем варианте.

Путём имитационного моделирования нужно проверить рассчитанные значения E и F_i, а также построить гистограммы распределения вероятностей: а) для времени t прохождения заявок через сеть; б) для числа *ń* заявок, застигаемых в сети вновь приходящей заявкой.

Форма отчёта

Для защиты лабораторной работы необходимо подготовить отчёт, оформить его и передать на проверку в установленном порядке. Файлы, полученные при выполнении работы в Ms Excel (см. рис. 3.17) и в GPSS World, рекомендуется хранить в личном архиве до завершения аттестации по дисциплине «Моделирование систем».

В отчёте необходимо объяснить причины расхождения или близости результатов имитации СеМО и результатов расчёта её системных показателей.

Примечание 2. Для определения пропускных способностей A_i и B_i *путём имитации* необходимо проводить специальный эксперимент. Его основная идея состоит в поддержании постоянного наличия некоторого числа внешних заявок на выбранном входе СеМО (например, путём установки пакета из нескольких тысяч заявок) и последующей обработке статистики по «узким местам» СеМО. Определять пропускные способности A_i, B_i и запасы D_i путём имитации в вашей работе не требуется (колонку «СпЭксп.», подобную представленной на рис. 3.17, формировать не нужно).

Примечание 3. Для определения путём имитации среднего времени E пребывания заявок в сети следует все заявки, проходящие через сеть (независимо от числа входных потоков), проводить через очередь general и через блок TABULATE E_time.

Контрольные вопросы

1. Чем отличаются разомкнутые и замкнутые СеМО?
2. Чем объясняются выступы на хвостах гистограмм на рис. 3.16?
3. Какой из двух показателей (A_i и B_i) в общем случае больше?
4. Объясните назначение, синтаксис и семантику всех строк модифицированной программной части, приведенной в данной лабораторной работе в п. 3.
5. Объясните смысл всех числовых показателей на листе Excel на рис. 3.17.

Лабораторная работа 5
ОПТИМИЗАЦИЯ ОТКРЫТЫХ МАРКОВСКИХ СеМО

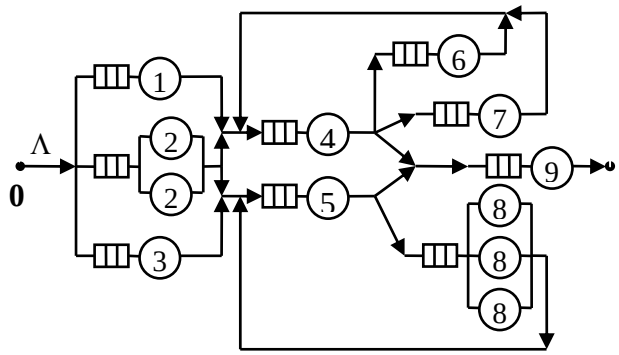
Цель работы. Оптимизация открытой марковской СеМО.

Содержание работы:

1. Постановка задачи оптимизации для заданного в лабораторной работе 3 варианта СеМО (теперь СеМО считаем экспоненциальной, т. е. марковской).
2. Определение центра области допустимых решений (ОДР) задачи.
3. Решение задачи на Ms Excel. Расчет эффекта оптимизации.
4. Проверка оптимального решения путем имитационного моделирования.

Краткая теория и методические указания

Выполнение работы рассмотрим по пунктам ее содержания на примере оптимизации сети, структура которой представлена на рис. 3.18.



$\Lambda = 1$,

$p_{0,1} = 0{,}2,\ p_{0,2} = 0{,}3,\ p_{0,3} = 0{,}5,\ p_{2,4} = 0{,}7,\ p_{2,5} = 0{,}3,$

$p_{4,6} = 0{,}3,\ p_{4,7} = 0{,}4,\ p_{4,9} = 0{,}3,\ p_{5,8} = 0{,}9,\ p_{5,9} = 0{,}1.$

Рис. 3.18. Структура оптимизируемой СеМО

1. Пример постановки задачи оптимизации. Часть характеристик вашего варианта СеМО уже рассчитана при выполнении работ 3 и 4. Тем не менее рассмотрим расчет всех требуемых характеристик на примере сети, изображенной на рис. 3.18. Для нее уравнения баланса относительно частот α_i посещения узлов i имеют следующий вид:

$$\begin{cases} \alpha_1 = 0{,}2\alpha_0 \\ \alpha_2 = 0{,}3\alpha_0 \\ \alpha_3 = 0{,}5\alpha_0 \\ \alpha_4 = \alpha_1 + 0{,}7\alpha_2 + \alpha_6 + \alpha_7 \\ \alpha_5 = 0{,}3\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_8 \\ \alpha_6 = 0{,}3\alpha_4 \\ \alpha_7 = 0{,}4\alpha_4 \\ \alpha_8 = 0{,}9\alpha_5 \\ \alpha_9 = 0{,}3\alpha_4 + 0{,}1\alpha_5. \end{cases}$$

По определению $\alpha_0 \equiv 1$. Из уравнений баланса находим остальные n частот α_i:

$$\vec{\alpha} = (\alpha_1, ..., \alpha_9) = (0{,}2,\ 0{,}3,\ 0{,}5,\ 1{,}3666,\ 5{,}9,\ 0{,}41,\ 0{,}54666,\ 5{,}31,\ 1). \qquad (3.26)$$

Отсюда с учетом того, что $\Lambda = 1$, находим интенсивности потоков на входах узлов СеМО: $\lambda_i = \alpha_i \cdot \Lambda = \alpha_i$, т. е.

$$\vec{\lambda} = (\lambda_1, ..., \lambda_9) = (0{,}2,\ 0{,}3,\ 0{,}5,\ 1{,}3666,\ 5{,}9,\ 0{,}41,\ 0{,}54666,\ 5{,}31,\ 1), \qquad (3.27)$$

а также минимальную интенсивность обслуживания для каждого узла:

$$\mu_{i\,\min} = \lambda_i / K_i,$$

т. е.

$$\vec{\mu}_{i\min} = (0{,}2,\ 0{,}15,\ 0{,}5,\ 1{,}3666,\ 5{,}9,\ 0{,}41,\ 0{,}54666,\ 1{,}77,\ 1). \qquad (3.28)$$

Фиксированный суммарный ресурс M^* определяется как сумма интенсивностей обслуживания всех каналов и в рассматриваемом примере составляет 30:

$$M(\vec{\mu}) = \sum_{i=1}^{9} c_i \mu_i = M^* = 30,$$

где вектор стоимостных коэффициентов имеет вид:

$$\vec{c} = (1,\ 2,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 3,\ 1). \qquad (3.29)$$

Теперь, поскольку сеть марковская, можно в явном виде выразить среднее время ответа E (среднее время пребывания заявки в СеМО) через заданные ее параметры и потребовать минимизации E за счет оптимального распределения ресурса M^* по узлам сети. Эту оптимизационную задачу можно записать в следующей, состоящей из стандартных частей, форме задачи нелинейного программирования:

$$E(\vec{\mu}) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left(W_i(\mu_i) + \frac{1}{\mu_i} \right) \to \min_{\vec{\mu}}, \qquad (3.30)$$

$$M(\vec{\mu}) = \sum_{i=1}^{9} c_i \mu_i = 30, \qquad \mu_i \ge \mu_{i\min}, \quad (i = \overline{1,n}), \qquad (3.31)$$

где n = 9, параметры α_i перечислены в формуле (3.26), параметры c_i – в (3.29), параметры $\mu_{i\min}$ – в (3.28), $\{p_{ij}\}$ – на рис. 3.18, μ_i являются варьируемыми параметрами, а выражения $w_i(\mu_i)$ для рассматриваемой экспоненциальной СеМО таковы:

$$W_i(\mu_i) = \begin{cases} \dfrac{\lambda_i}{\mu_i(\mu_i - \lambda_i)}, & for \quad i = \overline{1,9}\ (i \ne 2, i \ne 8), \\ \dfrac{\lambda_2^2}{\mu_2(4\mu_2^2 - \lambda_2^2)}, & for \quad i = 2, \\ \dfrac{\lambda_8^3}{\mu_8^4 \left(3 - \dfrac{\lambda_8}{\mu_8}\right)\left(6 + \dfrac{4\lambda_8}{\mu_8} + \dfrac{\lambda_8^2}{\mu_8^2}\right)}, & for \quad i = 8. \end{cases} \qquad (3.32)$$

Эти выражения для среднего времени ожидания $w_i(\mu_i)$ в узлах 1–9 нетрудно вывести из формул (3.6), (3.4) (для одноканальных узлов) и соответствующих формул (3.14), (3.11) и (3.12) (для многоканальных 2-го и 8-го узлов СеМО).

Параметры λ_i для (3.32) перечислены в формуле (3.27).

Таким образом, задача оптимизации открытой марковской СеМО, представленной на рис. 3.18, сформулирована как задача нелинейного программиро-

вания. В задаче требуется отыскать значения $(\mu_1,...,\mu_9)$, доставляющие минимум функции (3.30), и удовлетворяющие ограничениям (3.31).

2. Пример определения центра ОДР. Область допустимых решений задачи (3.30), (3.31) задана формулами (3.31) и представляет собой кусок *n*-мерной плоскости $\sum_{i=1}^{9} c_i \mu_i = 30$, координаты μ_i всех точек которого положительны и ограничены снизу соответствующими константами $\mu_{i\min}$ (3.28).

Центром ОДР назовем принадлежащую ОДР такую точку $\vec{\mu}_c$, представляемое координатами которой распределение ресурса M^* по узлам сети обеспечивает одинаковые коэффициенты загрузки узлов. Опуская простые математические выкладки, сразу приведем формулы, по которым можно рассчитать координаты центра:

$$\mu_{ci} = M^* \frac{\alpha_i}{K_i} \frac{1}{\sum_{j=1}^{n} c_j \frac{\alpha_j}{K_j}}, \qquad i = \overline{1,n}. \qquad (3.33)$$

Для нашего примера $c_j = K_j$ и $M^* = 30$, поэтому из (3.33) получаем:

$$\mu_{ci} = \frac{\alpha_i}{K_i} \frac{30}{\sum_{j=1}^{n} \alpha_j}, \qquad i = \overline{1,n}.$$

Итак, вычисляем центр ОДР:

$\vec{\mu}_c = (\mu_{c1},...,\mu_{c9})$ = (0,3862, 0,2897, 0,9656, 2,639, 11,39, 0,7918, 1,055, 3,418, 1,931).

3. Пример решения задачи оптимизации СеМО средствами Ms Excel. Принимая $\vec{\mu}_c$ в качестве начальной точки, можно, двигаясь из нее каким-либо градиентным методом, достаточно быстро попасть в искомую точку $\vec{\mu}_{opt}$, доставляющую минимум целевой функции (3.30). Используя Ms Excel, задачу перехода из $\vec{\mu}_c$ в $\vec{\mu}_{opt}$ можно решить следующим образом.

На листе Excel сформируйте диапазоны данных c_i, α_i, λ_i, $\mu_{i\min}$ (неважно, в строках или столбцах). Добавьте диапазон с координатами точки $\vec{\mu}$: они должны быть значениями (не формулами), так как будут варьироваться. На линии этого диапазона в отдельной ячейке запишите формулу, вычисляющую $\sum_{i=1}^{9} c_i \mu_i$. Назовем эту ячейку индикатором суммарного ресурса. Скопируйте в диапазон координат точки $\vec{\mu}$ координаты точки $\vec{\mu}_c$ (взятые как значения); в результате индикатор суммарного ресурса примет значение 30.

Теперь организуем вычисление среднего времени ответа $E(\vec{\mu})$. Параллельно диапазону с координатами точки $\vec{\mu}$ добавьте диапазон с формулами, вычисляющими $W_i(\mu_i)$, и на одной с ним линии в отдельной ячейке запишите формулу для вычисления $E(\vec{\mu})$. Эта ячейка примет значение 10,759.

Лист Excel для решения оптимизационной задачи готов.

Итак, в точке $\vec{\mu}_c$, задающей «справедливое» распределение ресурса по узлам нашей СеМО, обеспечивающее равную их загрузку, среднее время ответа *E*

составляет 10,759. Теперь решим задачу оптимизации и проверим, можно ли улучшить $E(\vec{\mu})$, отклоняясь от «справедливого» распределения $\vec{\mu}_c$.

Для решения оптимизационной задачи выберите в меню **Сервис** опцию **Поиск решения...** Параметры в появившемся основном диалоговом окне определите следующим образом:

– в микроокне **Установить целевую ячейку** укажите ячейку, вычисляющую $E(\vec{\mu})$;

– далее выберите в этом диалоговом окне опцию **минимальному значению**;

– в боксе **Изменяя ячейки** укажите диапазон ячеек с координатами точки $\vec{\mu}$;

– в боксе **Ограничения** нажмите кнопку **Добавить** и добавьте два ограничения:

1) в появившемся после нажатия кнопки **Добавить** диалоговом окне сформируйте требование (в виде условия-равенства), что ячейка с суммарным ресурсом (индикатор суммарного ресурса) должна быть равна 30; нажмите мышкой кнопку **ОК**;

2) в основном диалоговом окне еще раз нажмите кнопку **Добавить**, в появившемся диалоговом окне в боксе **Ссылка на ячейку** укажите сразу весь диапазон ячеек с координатами точки $\vec{\mu}$, затем выберите условие «≥» и в боксе **Ограничение** укажите диапазон ячеек с величинами $\mu_{i\min}$; нажмите **ОК**.

Основное диалоговое окно сервиса **Поиск решения...** готово для решения вашей задачи. Целевая ячейка указана, выбрано требование минимизации, диапазон изменяемых ячеек задан, два ограничения сформированы. Нажмите кнопку **Выполнить**. Практически мгновенно появится сообщение, что решение найдено. С деталями этого сообщения легко разобраться самостоятельно. Найденное оптимальное решение дает для $E(\vec{\mu}_{opt})$ значение **7,938**, заметно меньшее (т. е. лучшее), чем достигаемое в центре ОДР значение $E(\vec{\mu}_c)$ = 10,759. Варьируемые параметры – координаты точки $\vec{\mu}$ – в процессе поиска оптимума изменились и приняли оптимальные значения $\vec{\mu} = \vec{\mu}_{opt}$. Сохраните решение. Найденные оптимальные значения координат точки $\vec{\mu}_{opt}$ будут нужны при выполнении последнего пункта лабораторной работы. В данном примере эти значения таковы: $\vec{\mu} = \vec{\mu}_{opt}$ = (0,8324, 0,6018, 1,5000, 3,0199, 9,3350, 1,3155, 1,5923, 2,9290, 2,4142). Они заметно отличаются от найденных выше в п. 2 координат центра ОДР $\vec{\mu}_c$.

Самостоятельно оцените различие в процентах между $E(\vec{\mu}_c)$ и $E(\vec{\mu}_{opt})$. Вычислите евклидово расстояние между точками $\vec{\mu}_c$ и $\vec{\mu}_{opt}$.

Построенный только что лист Excel используйте, насколько это возможно, при оптимизации вашего варианта СеМО (выбранного при выполнении работы 3).

4. Пример проверки оптимального решения путем ИМ. Проверку оптимального решения выполним путем ИМ сети при оптимальных интенсивностях обслуживания заявок в ее узлах.

Здесь необходимо пояснить следующее. В контексте решаемой оптимизационной задачи под интенсивностью обслуживания в узле понимается интенсивность обслуживания в одном (любом) его канале. Иными словами, интенсивность μ_i обслуживания в узле – это величина, обратная среднему времени обслуживания в узле.

Ваши варианты СеМО совпадают с теми, которые вы исследовали в лабораторных работах 3 и 4. Таким образом, расчет системных характеристик экспоненциальной версии СеМО, включая время E, уже выполнен и проверен. Но это был не оптимизированный вариант СеМО. Теперь, выполняя данную лабораторную работу 5, вы должны получить оптимизированный вариант, в котором суммарный ресурс M^* вашей сети перераспределен так, чтобы время E было минимальным. По-видимому, полученное при оптимизации значение $E = E(\vec{\mu}_{opt})$ будет заметно меньше рассчитанного в работе 4. Для проверки полученного значения $E = E(\vec{\mu}_{opt})$ используйте имитационную модель вашей СеМО, написанную на языке GPSS в лабораторной работе 3. В модель нужно внести следующие изменения: *а*) все распределения времени обслуживания следует определить как экспоненциальные; *б*) все интенсивности обслуживания в узлах должны быть оптимальными, полученными способом, описанным выше на примере СеМО рис. 3.18. Для наглядности приведем листинг GPSS-модели этой СеМО и фрагмент листинга отчета, полученного в результате выполнения GPSS-модели по команде START 1.

1. Листинг GPSS-модели СеМО:

```
* Суммарный ресурс M* = 30

TTB  TABLE    M1,0,2,60
CHAN1         STORAGE       1
CHAN2         STORAGE       2
CHAN3         STORAGE       1
CHAN4         STORAGE       1
CHAN5         STORAGE       1
CHAN6         STORAGE       1
CHAN7         STORAGE       1
CHAN8         STORAGE       3
CHAN9         STORAGE       1

              GENERATE      (Exponential(1,0,1))
              TRANSFER      .5,,SMO3
              TRANSFER      .6,SMO1,SMO2
SMO1          QUEUE         1
              ENTER         CHAN1
              DEPART        1
              ADVANCE       (Exponential(1,0,1/0.83244))
              LEAVE         CHAN1
              TRANSFER      ,SMO4
SMO2          QUEUE         2
              ENTER         CHAN2
```

```
                DEPART        2
                ADVANCE       (Exponential(1,0,1/0.60184))
                LEAVE         CHAN2
                TRANSFER      .3,SMO4,SMO5
SMO3            QUEUE         3
                ENTER         CHAN3
                DEPART        3
                ADVANCE       (Exponential(1,0,1/1.49997))
                LEAVE         CHAN3
                TRANSFER      ,SMO5
SMO4            QUEUE         4
                ENTER         CHAN4
                DEPART        4
                ADVANCE       (Exponential(1,0,(1/3.01989)))
                LEAVE         CHAN4
                TRANSFER      .3,,CMO9
                TRANSFER      .571429,SMO6,SMO7
SMO5            QUEUE         5
                ENTER         CHAN5
                DEPART        5
                ADVANCE       (Exponential(1,0,1/9.33498))
                LEAVE         CHAN5
                TRANSFER      .1,SMO8,CMO9
SMO6            QUEUE         6
                ENTER         CHAN6
                DEPART        6
                ADVANCE       (Exponential(1,0,1/1.31551))
                LEAVE         CHAN6
                TRANSFER      ,SMO4
SMO7            QUEUE         7
                ENTER         CHAN7
                DEPART        7
                ADVANCE       (Exponential(1,0,1/1.59226))
                LEAVE         CHAN7
                TRANSFER      ,SMO4
SMO8 QUEUE      8
                ENTER         CHAN8
                DEPART        8
                ADVANCE       (Exponential(1,0,1/2.92903))
                LEAVE         CHAN8
                TRANSFER      ,SMO5
CMO9            QUEUE         9
                ENTER         CHAN9
                DEPART        9
                ADVANCE       (Exponential(1,0,1/2.41417))
                LEAVE         CHAN9
                TABULATE      TTB
                TERMINATE

                GENERATE      1000000
                TERMINATE     1
```

1. Фрагмент листинга отчета:

```
      GPSS World Simulation Report - SeMO-9.1.1
           Thursday, September 29, 2012 04:24:20
   START TIME           END TIME  BLOCKS  FACILITIES  STORAGES
        0.000        1000000.000    61        0          9

QUEUE              MAX CONT. ENTRY ENTRY(0) AVE.CONT. AVE.TIME
AVE.(-0) RETRY
1          9    0 199729 151882     0.076      0.382      1.594   0
2          7    0 299099 269727     0.032      0.108      1.099   0
3          11   0 499428 332116     0.167      0.334      0.998   0
4          15   0 1361370 747392    0.369      0.271      0.601   0
5          28   0 5894283 2168623   1.082      0.184      0.290   0
6          9    0 408346 281399     0.140      0.343      1.102   0
7          13   0 543744 358092     0.175      0.321      0.941   0
8          23   0 5305311 3394742   0.545      0.103      0.285   0
9          15   1 998252 586012     0.291      0.291      0.705   0


STORAGE CAP. REM. MIN. MAX. ENTRIES AVL. AVE.C.  UTIL. RETRY DELAY
CHAN1    1    1   0     1   199729   1    0.240  0.240    0    0
CHAN2    2    1   0     2   299099   1    0.497  0.248    0    0
CHAN3    1    0   0     1   499428   1    0.333  0.333    0    0
CHAN4    1    1   0     1  1361370   1    0.451  0.451    0    0
CHAN5    1    1   0     1  5894283   1    0.631  0.631    0    0
CHAN6    1    1   0     1   408346   1    0.310  0.310    0    0
CHAN7    1    1   0     1   543744   1    0.341  0.341    0    0
CHAN8    3    1   0     3  5305311   1    1.812  0.604    0    0
CHAN9    1    0   0     1   998251   1    0.413  0.413    0    1


TABLE              MEAN   STD.DEV.       RANGE         RETRY
FREQUENCY CUM.%
 TTB             7.918      7.123                        0
                          0.000  -        2.000     115155   11.54
                          2.000  -        4.000     216396   33.21
                          4.000  -        6.000     182184   51.46
                          6.000  -        8.000     132456   64.73
                          8.000  -       10.000      94162   74.17
                         10.000  -       12.000      67308   80.91
                         12.000  -       14.000      48398   85.76
                         14.000  -       16.000      35421   89.30
                         16.000  -       18.000      25679   91.88
```

Как видим из результатов моделирования, таблица TTB, вычисляющая статистические характеристики времени ответа E, выдала его среднее значение **7,918**, которое (с точностью до статистических погрешностей эксперимента) согласуется с рассчитанным значением $E(\vec{\mu}_{opt})$ = **7,938.**

Варианты заданий

Выполните приведенную в примерах оптимизацию СеМО, изображенной на рис. 3.18, и проверьте ее результаты путем ИМ этой СеМО. Затем выполните индивидуальные варианты заданий.

Индивидуальные варианты заданий (моделируемые СеМО и их параметры) указаны в лабораторной работе 3. В них изменяется только то, что интервалы обслуживания теперь нужно считать распределенными экспоненциально. Это позволит применить подход, описанный выше в примере оптимизации, поскольку он корректен только для экспоненциальных СеМО (теорема Джексона).

Примечание 1. При наличии в выбранном варианте двух и более входных потоков их рекомендуется «собрать» в один входной поток. Его интенсивность Λ должна быть равна сумме интенсивностей исходных потоков. И он должен разветвляться на входы соответствующих СМО (как, напр., на рис. 3.18). Переходные вероятности на его ветвях определяются как $p_{01} = \Lambda_1/\Lambda$, $p_{02} = \Lambda_2/\Lambda$ и т. д. Это не изменит рассчитанных ранее локальных характеристик и времени E, но значительно облегчит составление и решение уравнений баланса.

Примечание 2. Суммарный ресурс M^* для вашего варианта СеМО нужно взять таким же, каким он был в лабораторной работе 3.

Примечание 3. Корректное решение задач анализа и оптимизации немарковских (неэкспоненциальных) СеМО должно существенно опираться на их имитационное или численное моделирование [2–6, 10–20]. При ИМ СМО и СеМО возникают задачи планирования имитационных экспериментов, связанные с анализом переходных процессов, которые выше в учебном пособии подробно не рассматривались. Хорошее математическое введение в методы планирования имитационных экспериментов дается в книге [13], в методы оптимизации – в книге [1]. Один из наиболее эффективных методов оптимизации немарковских СеМО – двухуровневый двухэтапный аналитико-имитационный метод – описан в статьях [10, 11].

Форма отчёта

Отчет по лабораторной работе должен содержать описание всех основных этапов работы и формальные части, определенные в установленном порядке (титульный лист, реферат, оглавление и т. п.). Допускается представление отчета в электронном формате.

Контрольные вопросы

1. Выведите формулу $\mu_{i\,\min} = \lambda_i / K_i$ для минимально допустимой интенсивности обслуживания узла из неравенства $\rho_{i\,\max} = 1$.

2. Выведите формулу для расчета суммарного ресурса M^* вашего варианта СеМО.

3. Выведите формулы (3.32) для расчета среднего времени ожидания в узлах СеМО, рассматриваемой в примере оптимизации.

4. Докажите, что в центре ОДР, определяемом формулой (3.33), коэффициенты загрузки всех узлов СеМО одинаковы.

5. Объясните смысл всех числовых показателей на листе Excel на рис. 3.17.

Библиографический список к части 3

1. Базара, М. Нелинейное программирование. Теория и алгоритмы : [пер. с англ.] / М. Базара, К. Шетти. – М. : Мир, 1982. – 583 с.

2. Боев, В. Д. Моделирование систем. Инструментальные средства GPSS World : учеб. пособие / В. Д. Боев. – СПб. : БХВ-Петербург, 2004. – 368 с.

3. Вишневский, В. М. Моделирование ведомственных систем электронной почты / В. М. Вишневский, С. М. Пороцкий // Автоматика и телемеханика. – 1996. – № 12. – С. 48–57.

4. Вишневский, В. М. Теоретические основы проектирования компьютерных сетей / В. М. Вишневский. – М. : Техносфера. – 2003. – 512 с.

5. Герасимов, А. И. Оптимизация замкнутых сетей массового обслуживания с несколькими классами сообщений / А. И. Герасимов // Пробл. передачи информ., 30:1 (1994). – С. 85–96. http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=ppi&paperid=222&option_lang=rus (дата обращения: 13.02.2013).

6. Жожикашвили, В. А. Сети массового обслуживания. Теория и применение к сетям ЭВМ / В. А. Жожикашвили, В. М. Вишневский. – М. : Радио и связь, 1988. – 192 с.

7. Задорожный, В. Н. Моделирование систем : конспект лекций /В. Н. Задорожный. – Омск : Изд-во ОмГТУ, 2006. – 56 с.

8. Задорожный, В. Н. Имитационное моделирование : учеб. пособие / В. Н. Задорожный. – Омск : Изд-во ОмГТУ, 1999. – 151 с.

9. Статистическое моделирование : метод. указания к лаб. работам / сост. В. Н. Задорожный. – Омск : Изд-во ОмГТУ, 2006. – 32 с.

10. Задорожный, В. Н. Методы двухуровневого моделирования систем с очередями / В. Н. Задорожный // Труды VII Междунар. конф. «Идентификация систем и задачи управления» SICPRO ’08 (28–31 янв. 2008 г.). – М., 2008. – С. 1484–1563.

11. Задорожный, В. Н. Оптимизация однородных немарковских сетей массового обслуживания / В. Н. Задорожный // Проблемы управления. – 2009. – № 6 – С. 68–75.

12. Иглхарт, Д. Л. Регенеративное моделирование сетей массового обслуживания / Д. Л. Иглхарт, Д. С. Шедлер. – М. : Радио и связь, 1984. – 135 с.

13. Клейнен, Дж. Статистические методы в имитационном моделировании : [пер с англ.] / Дж. Клейнен ; под ред. Ю. П. Адлера и В. Н. Варыгина. – М. : Статистика, 1978. – Вып. 1. – 221 с.

14. Клейнрок, Л. Вычислительные системы с очередями : [пер. с англ.] / Л. Клейнрок / под ред. Б. С. Цыбакова. – М. : Мир, 1979. – 600 с.

15. Рыжиков, Ю. И. Имитационное моделирование. Теория и технологии / Ю. И. Рыжиков. – СПб. : КОРОНА принт; М. : Альтекс-А, 2004. – 384 с.

16. Феррари, Д. Оценка производительности вычислительных систем / Д. Феррари ; пер. с англ. А. И. Горлина, Ю. Б. Котова и Л. В. Ухова ; под ред. В. В. Мартынюка. – М. : Мир, 1981. – 576 с.

17. Gabriel R. Bitran, Reinaldo Morabito. Open Queueing Networks: Optimization and Performance Evaluation Models for Discrete Manufacturing Systems // Сайт

Массачусетского технологического института. – Режим доступа : http://dspace.mit.edu/bitstream/handle/1721.1/2537/SWP-3743-31904719.pdf?sequence=1 – November 1994. – 47 p.

18. Johnson M. E., Jackson J. Infinitesimal Perturbation Analysis: a Tool for Simulation // J. of the Operational Res. Soc. – 1989. – Vol. 40, N 3. – P. 134–160.

19. Rubinstein R.Y. Sensitivity analysis of computer simulation models via the efficient score // Oper. Res. – 1989. – Vol. 37. – P. 72–81.

20. Suri R, Zazanis M. Perturbation Analysis Gives Strongly Consistent Sensitivity Estimates for the M|G|1 Queue // Mgmt Science. – 1988. – Vol. 34. – P. 39–64.

Приложение

ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ ТИПЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

1. Распределение R *равномерной с. в.*

Равномерное распределение R случайной величины x задаётся на интервале от 0 до $2\bar{x}$. Основные параметры распределения: $M(x) = \bar{x}$, $D(x) = \bar{x}^2/3$, $C_x^2 = 1/3$.

В блоках ADVANCE и GENERATE такая с. в. реализуется с помощью модификатора-интервала. Её можно также реализовать выражением вида 2#$\bar{x}$#RNj/1000, где вместо $\bar{x}$ должна стоять заданная числовая константа (или выражение языка GPSS), вместо j – номер генератора стандартных случайных чисел.

2. Распределение RT *равномерной с. в.*

Равномерное распределение RT случайной величины x задаётся на интервале от $\bar{x}/2$ до $\bar{x}+\bar{x}/2$. Основные параметры: $M(x) = \bar{x}$, $D(x) = (\bar{x})^2/12$, $C_x^2 = 1/12$.

В блоках ADVANCE и GENERATE такая с. в. реализуется с помощью модификатора-интервала. Можно реализовать выражением вида $\bar{x}$/2+$\bar{x}$#RNj/1000.

<u>Примечание 1</u>. При записи выражений непосредственно в полях операторов ADVANCE, GENERATE и т. д. эти выражения следует заключать в скобки.

3. Экспоненциальное (M) *распределение с. в.*

Экспоненциально распределённая с. в. x имеет ф. р. в. $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$ и соответственно п. р. в. $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$, ($t \geq 0$). Основные параметры экспоненциально распределённой с. в.: $M(x) = 1/\lambda$, $D(x) = 1/\lambda^2$, $C_x^2 = 1$.

В блоках ADVANCE и GENERATE эта с. в. традиционно реализуется с помощью модификатора-функции. Можно реализовать и выражением вида -LOG(RNj/1000)/λ, но нужно иметь в виду, что в GPSS World стандартный числовой атрибут RNj иногда принимает нулевое значение. Наиболее «ортодоксальный» вариант – использовать в поле A блока ADVANCE или GENERATE библиотечный генератор в виде выражения в скобках (Exponential(1,0,$\bar{x}$)), где $\bar{x}$ – требуемое м. о. (число или выражение; пример см. на рис. 3.11).

4. Эрланговское (E^k) *распределение с. в.*

Распределение Эрланга k-го порядка определяется на полуоси $t \geq 0$ при целых $k \geq 1$. Описывается функцией распределения вероятностей $F(t) = 1 - \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(\lambda t)^i}{i!} e^{-\lambda t}$ и соответственно плотностью распределения $f(t) = \frac{\lambda^k}{(k-1)!} t^{k-1} e^{-\lambda t}$. Основные параметры эрланговской с. в. x следующие: $M(x) = k/\lambda$, $D(x) = k/\lambda^2$, $C_x^2 = 1/k$.

В блоках ADVANCE и GENERATE эта с. в. традиционно реализуется как сумма k независимых экспоненциальных с. в. с одинаковыми средними $1/\lambda$. Например, случайную задержку x с эрланговским распределением 2-го порядка и средним $M(x) = 10$ можно сформировать так:

```
...
        ADVANCE      (Exponential(1,0,5))
        ADVANCE      (Exponential(1,0,5))
...
```

Примечание 2. В пакете GPSS World есть библиотечный генератор случайных величин, имеющих гамма-распределение с плотностью $f(t) = \frac{\lambda^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} e^{-\lambda t}$, $\lambda > 0$, $\alpha > 0$. При целых $\alpha \geq 1$ оно становится нужным нам эрланговским распределением, так как тогда $\alpha = k$, $\Gamma(\alpha) = (k - 1)!$. Поэтому эрланговскую суммарную задержку, реализованную в примере как сумму экспоненциальных задержек, можно реализовать и в виде

```
ADVANCE      (Gamma(1,0,5,2))
```

Здесь число 5 задаёт среднее, делённое на порядок k, число 2 – порядок k эрланговского распределения.

5. Гиперэкспоненциальное (H^r) *распределение второго порядка*

Гиперэкспоненциальное распределение вероятностей второго порядка имеет случайная величина x, являющаяся смесью двух независимых экспоненциально распределённых с. в. x_1 и x_2. С вероятностью p величина x принимается равной x_1 либо с вероятностью $q = (1 - p)$ – равной x_2.

С. в. x, имеющую $M(x) = 1$ и требуемый квадратичный коэффициент вариации $C_x^2 = r^2 > 1$, можно реализовать, смешивая две экспоненциально распределённые с. в. x_1 и x_2 со средними $M(x_1) = m_1$ и $M(x_2) = m_2$ при следующих параметрах:

$$m_1 = C_1 - \sqrt{C_1(C_1 - 1)}, \qquad (П.1)$$

$$m_2 = C_1 + \sqrt{C_1(C_1 - 1)}, \qquad (П.2)$$

$$p = \frac{m_2 - 1}{m_2 - m_1}, \qquad (П.3)$$

где $C_1 = \frac{1 + r^2}{2}$.

В качестве примера рассмотрим реализацию на GPSS World с. в. x с распределением H^5, $M(x) = 1$. Здесь $r = 5$, поэтому в соответствии с формулами (П.1–П.3) находим $C_1 = (1+5^2)/2 = 13$, $m_1 = 0{,}51$, $m_2 = 25{,}49$, $p = 0{,}98$.

Нужная с. в. x получается путём выбора с вероятностью $p = 0{,}98$ экспоненциальной с. в. со средним $m_1 = 0{,}51$ либо с вероятностью $(1 - 0{,}98)$ – со средним $m_2 = 25{,}49$. В GPSS World этот случайный выбор проще всего реализуется с по-

мощью функции типа E (см. [1]). В данном примере присвоим этой функции имя Comp и опишем её так:

```
Comp        FUNCTION    (RN1>980),E2
0,(Exponential(1,0,0.51))/1,(Exponential(1,0,25.49))
```

Теперь заданную таким образом функцию FN$Comp удобно применять в качестве модификатора-функции для реализации гиперэкспоненциальной с. в. с любым средним значением, заданным в поле A соответствующего блока. Например, блок

```
GENERATE   10,FN$Comp
```

будет генерировать транзакты с интервалом времени, имеющим распределение H^5 и среднее значение 10.

6. Ограниченное гиперболическое (HB^{ε}) *распределение с. в.*

Представим себе СМО, в которой «размер» z обрабатываемой «детали» распределён равномерно на интервале от ε до $(1 + \varepsilon)$, где $\varepsilon > 0$. Время x обработки детали обратно пропорционально её размеру: $x = 1/z$. Тогда x имеет гиперболическое распределение, ограниченное очевидным условием $1/(1 + \varepsilon) < x < 1/\varepsilon$. Основные характеристики с. в. x таковы:

$$M(x) = \ln(1+\varepsilon) - \ln\varepsilon\,, \tag{П.4}$$

$$M(x^2) = \frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{1+\varepsilon}\,, \tag{П.5}$$

$$\sigma_x^2 = M(x^2) - M^2(x)\,, \tag{П.6}$$

$$C_x^2 = \frac{\sigma_x^2}{M_x^2}\,. \tag{П.7}$$

Реализация с. в. x на GPSS осуществляется непосредственно по определению, т. е. как преобразование равномерной с. в. z ($\varepsilon < z < 1 + \varepsilon$). В лабораторных работах предполагается, что последующим умножением с. в. x на подходящий числовой коэффициент обеспечивается требуемое заданием значение её м. о. Коэффициент вариации (П.7), как безразмерный показатель, остаётся при таком масштабном преобразовании неизменным.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 3
Перечень сокращений и обозначений.....4
ЧАСТЬ 1. МЕТОДЫ СТАТИСТИЧЕСКОГО И ИМИТАЦИОННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ 5
1. Статистическое моделирование 5
2. Построение и тестирование датчиков базовой случайной величины 5
2.1. Датчики БСВ.....5
2.2. Метод середины квадрата 6
2.3. Мультипликативный конгруэнтный метод 7
2.4. Тестирование равномерности БСВ 8
2.5. Тестирование независимости БСВ.....9
2.6. Противоречивость требований к программным датчикам БСВ 12
3. Моделирование случайных факторов.....13
3.1. Моделирование случайных событий и дискретных случайных величин 13
3.2. Моделирование непрерывных случайных величин 16
3.3. Моделирование случайных процессов 20
4. Расчёт интегралов методом Монте-Карло 23
4.1. Основная идея 23
4.2. Сведение интеграла к вероятности 24
4.3. Сведение интеграла к математическому ожиданию 28
4.4. Примеры расчёта интеграла как математического ожидания.....29
4.5. Управление скоростью сходимости.....30
5. Статистическое моделирование надёжности.....31
5.1. Классическая задача надёжности.....31
5.2. Аналитические и статистические методы расчёта надёжности.....32
5.3. Предел Бремермана – Эшби.....36
5.4. Модели теории протекания.....38
6. Имитационное моделирование.....43
7. Новые возможности GPSS 46
7.1. Исходные положения 46
7.2. Общие сведения о GPSS World 47
7.3. Основные нововведения.....48
7.4. Новые операторы и типы данных GPSS.....49
7.5. Совместимость с GPSS/PC и отличия от него 50
8. Пример моделирования на GPSS World.....52
8.1. Задача оптимизации производственного процесса 52
8.2. Моделирующая программа.....53
8.3. Результаты решения оптимизационной задачи 54
8.4. Анализ потока ремонтируемых машин 55
Библиографический список к части 1.....57

ЧАСТЬ 2. ПРАКТИКУМ ПО СТАТИСТИЧЕСКОМУ МОДЕЛИРОВАНИЮ 60
Общие указания 60
Лабораторная работа 1. Разработка мультипликативного датчика БСВ 60
Лабораторная работа 2. Моделирование дискретных случайных величин 65
Лабораторная работа 3. Моделирование непрерывных случайных величин 69
Лабораторная работа 4. Моделирование случайных величин методом режекции 73
Лабораторная работа 5. Расчет кратного интеграла методом Монте-Карло 75
Лабораторная работа 6. Расчет надёжности методом Монте-Карло 81
Лабораторная работа 7. Расчет надёжности методом расслоения 84
Библиографический список к части 2 90
ЧАСТЬ 3. ПРАКТИКУМ ПО ИМИТАЦИОННОМУ МОДЕЛИРОВАНИЮ 91
Лабораторная работа 1. Моделирование одноканальных СМО 91
Лабораторная работа 2. Моделирование многоканальных СМО 100
Лабораторная работа 3. Определение локальных характеристик СеМО 105
Лабораторная работа 4. Определение системных характеристик СеМО 115
Лабораторная работа 5. Оптимизация открытых марковских СеМО 121
Библиографический список к части 3 130
Приложение. Используемые типы распределений 132