

УДК: 519.67

## О возможной модификации дискретной математической модели динамического развития транспортной сети

М. Е. Степанцов

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»,  
факультет экономики, департамент математики,  
Россия, 119049, г. Москва, ул. Шаболовка, д. 26, корп. 5

E-mail: mews@yandex.ru

Получено 12 апреля 2013 г.

Целью данной работы явилось исследование дискретной математической модели динамического развития транспортной сети, ранее разработанной с участием автора. В ходе такого исследования были выявлены недостатки модели, рассмотрены пути устранения этих недостатков, после чего построена новая версия модели. На основе этой новой модели были созданы имитационные схемы для проведения пробных расчетов, аналогичных тем, какие использовались для тестирования исходной модели. Проведен сравнительный анализ результатов тестовых расчетов на основе новой и исходной моделей.

Ключевые слова: математическое моделирование, имитационное моделирование, дискретные модели, динамические модели, транспортная сеть

### A possible modification of the discrete mathematical model of transport network dynamics

M. Ye. Stepanstov

*National Research University Higher School of Economics, Faculty of Economics, Department of mathematics, 26 Shabolovka, building 5, Moscow, 119049, Russia*

**Abstract.** — The aim of this article is to study the discrete mathematical model of transport network dynamics, recently built by author. The study showed some drawbacks of the basic model and the ways of overcoming these drawbacks, and an improved version of the model was proposed. Simulation systems, created on the basis of this new model were used to do test calculations similar to those previously done with the help of the basic model. The results of these calculations with both models are compared.

Keywords: mathematical modeling, simulation, discrete models, dynamical models, transport network

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2013, vol. 5, no. 3, pp. 395–401 (Russian).

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, проекты 11-06-00193-а и 11-06-00471-а

Такая область знаний как математическое моделирование транспортных систем, с одной стороны, активно развивается в последнее время, а с другой стороны, в ней пока не сформировался достаточно полный набор базовых моделей, на основе которых можно было бы конструировать системы, позволяющие решать возникающие в этой области задачи.

Вопросам разработки одной из подобных моделей и был посвящен ряд работ с участием автора статьи. В работе [Малинецкий, Степанцов, 2009] была предложена дискретная математическая модель динамического развития транспортной сети, на основе которой могли бы быть построены имитационные системы, позволяющие моделировать, во-первых, функционирование сети в условиях отсутствия единого планирующего центра, а во-вторых – процесс развития транспортной системы.

Основной идеей модели являлось введение для каждого вида товаров величины, названной потенциалом, которая численно характеризовала потребность в данном товаре, существующую в узле транспортной сети. Именно разность потенциалов между узлами и создавала в модели потоки товаров. Темпы развития узлов в модели полагались пропорциональными квадрату потока товаров, перевозимых через данный узел (в обобщенном варианте модели [Степанцов, 2010] темпы развития узлов задавались неотрицательной возрастающей функцией модуля суммарного потока товаров).

Модель представляла собой полный граф, вершины и ребра которого изображали, естественно соответственно, узлы и коммуникации транспортной сети. Каждой вершине и каждому ребру был приписан определенный набор параметров и переменных.

Вершинам ставились в соответствие: размер узла, объем выпуска продукции каждого вида в данном узле (отрицательное значение выпуска означало спрос на продукцию), потенциал продукции данного вида в данном узле.

Ребрам ставились в соответствие длина, коэффициент затрат на расширение, пропускная способность и потоки продукции каждого вида. Отсутствие коммуникации задавалось нулевой пропускной способностью ребра.

Динамика модели характеризовалась дискретным временем с пошаговым одновременным изменением значений переменных, которые также носили дискретный характер.

Следует отметить, что в рамках модели схема перевозок складывалась не путем выбора оптимального (в каком-либо смысле) способа перевозок, а через самопроизвольное установление маршрутов перевозки, каждый из которых «закрывает» некоторую часть спроса на данный вид товара.

На основе данной модели были построены имитационные схемы сетей железных дорог России и Украины [Агапова, Гавдаева, Степанцов, 2011]. Использование модели в этом исследовании подтвердило ее адекватность, однако выявило ряд недостатков в ее положениях. В ходе этого и последующих исследований были сформулированы несколько изменений, имеющих своей целью устранение упомянутых недостатков.

Рассмотрим подробнее эти выявленные недостатки и соответствующие изменения.

## **Отказ от полноты графа**

Исходная модель базируется на полном графе. Отсутствие коммуникации между двумя узлами транспортной сети задается нулевой пропускной способностью соответствующего ребра. При этом в процессе развития системы такая коммуникация может быть создана.

Это положение оказывается несоответствующим моделируемой реальности в двух случаях.

Во-первых, коммуникацию может быть невозможно создать из-за существующих природных условий. Следует, правда, отметить, что это несоответствие можно устранить в рамках старой модели, задав очень высокий коэффициент затрат на строительство данной коммуникации.

Во-вторых, в случае, когда узел В расположен практически точно на линии, соединяющей узлы А и С, и при этом существуют коммуникации АВ и ВС, не имеет смысла рассматривать возможность создания новой коммуникации АС.

Таким образом, в качестве одной из модификаций модели уместно отказаться от полного графа в качестве ее базы. Эта модификация, однако, предусматривает некоторый произвол при построении имитационной схемы, поскольку при этом возникает необходимость принимать решение о наличии или отсутствии конкретного ребра графа модели, не имея для этого строгих оснований.

## Модификация алгоритма формирования схемы перевозок

В исходной модели на каждом временном шаге для каждого вида товаров  $k$  и для каждой вершины  $i$  рассматривалась задача

$$\left| \varphi_{ik} - \left( \sum_j S_{ijk} + P_{ik} \right) \right| \mapsto \min$$

при ограничениях

$$\sum_k |S_{ijk}| \leq W_{ij}.$$

Здесь  $\varphi_{ik}$  — потенциал товара вида  $k$  в вершине  $i$ ,  $P_{ik}$  — выпуск товара вида  $k$  в вершине  $i$ ,  $S_{ijk}$  — поток товара вида  $k$  из вершины  $j$  в вершину  $i$ ,  $W_{ij}$  — пропускная способность ребра  $(i, j)$ . Эти задачи решались последовательно для каждого вида товаров. Таким образом, виды товаров в исходной модели были упорядочены «по значимости», то есть, прежде всего, минимизировалась нехватка товара с номером  $k = 1$ , затем  $k = 2$ , и так далее. Такой подход в большинстве случаев не адекватен моделируемой реальности.

Поскольку в рассматриваемой задаче предполагается стихийно складывающаяся схема перевозок, более адекватным представляется реализация в рамках модели следующего алгоритма:

1.  $\forall k \forall i \varphi_{ik} = P_{ik}$
2.  $i_M j_M k_M : |\varphi_{i_M k_M} - \varphi_{j_M k_M}| = \max |\varphi_{ik} - \varphi_{jk}|$

Здесь максимум берется по всем существующим неотмеченным ребрам графа. Если максимум достигается на нескольких ребрах и видах товара, то один из вариантов выбирается случайно.

3. Предполагаем без ограничения общности, что  $\varphi_{i_M k_M} > \varphi_{j_M k_M}$

$$\begin{aligned} \varphi_{j_M k_M} &:= \varphi_{j_M k_M} + 1, \\ \varphi_{i_M k_M} &:= \varphi_{i_M k_M} - 1, \\ S_{i_M j_M k_M} &:= S_{i_M j_M k_M} + 1 \end{aligned}$$

4. Если

$$\sum_k |S_{i_M j_M k}| = W_{i_M j_M},$$

то отмечаем ребро  $(i_M, j_M)$ .

5. Если существуют неотмеченные ребра и

$$\max_{i, j, k} |\varphi_{ik} - \varphi_{jk}| > 1,$$

то переходим к пункту 2, иначе конец алгоритма.

## Модификация закона динамики размера узлов

Исходная модель характеризовалась обратной связью в виде увеличения размера узлов, что являлось результатом успешного (в том или ином смысле) функционирования сети. Увеличение размера узла приводило, в частности, к повышению возможности развития прилегающих коммуникаций (увеличения пропускной способности инцидентных данной вершине ребер).

Изменение размера вершин задавалось пропорциональным сумме квадратов потоков товаров через вершину

$$V_i' = V_i \left( 1 + G \sum_{j,k} S_{ijk}^2 \right),$$

Здесь  $V_i$  и  $V_i'$  — размер вершины на данном и следующем временных шагах соответственно,  $G$  — коэффициент роста узлов.

Однако данное правило имеет своим следствием неограниченное увеличение размера узлов, средние темпы которого пропорциональны самим этим размерам. В результате этого в модели наблюдается экспоненциальный рост масштаба размеров узлов, а, следовательно, и выпуска, и спроса на товары. В связи с этим при моделировании реальной ситуации приходилось учитывать некоторый экспоненциально растущий средний уровень размера узлов, с которым и следовало сравнивать динамику отдельных узлов.

Помимо этого, возникал и вопрос о том, что динамика развития узлов связана именно с количеством перевозимых через них товаров. Более адекватным представляется предположение о том, что темпы развития узла зависят от степени удовлетворения спроса на товары в этом узле.

Таким образом, имеет смысл задать динамику изменения размера вершин следующим образом:

$$V_i' = V_i \left( 1 + F \left( \sum_{k:\varphi_k < 0} |\varphi_{ik}| \right) \right),$$

Здесь  $F$  — функция благополучия узла, численно задающая темпы его роста. Данная функция должна убывать на всей области определения и равняться нулю при некотором фиксированном значении аргумента, меньшем характерного масштаба объемов спроса в модели.

Прочие отображения, задающие динамику модели, сохраняем неизменными по сравнению с [Малинецкий, Степанцов, 2009].

## Обсуждение сравнительных результатов пробных расчетов при помощи исходной и предлагаемой моделей

В качестве одного из критериев проверки адекватности модели в [Малинецкий, Степанцов, 2009] были проведены пробные расчеты для конфигураций транспортной сети, в которых результат эволюции транспортной сети является в какой-то степени ожидаемым. Представляется уместным провести аналогичные расчеты при помощи модифицированной модели и сравнить результаты.

В первом сценарии рассматривались четыре узла, условно названные Тверь, Иваново, Тула и Рязань с начальным размером 100, производящие один из четырех видов товаров и потребляющие три остальных, а также еще один узел меньшего размера (20), не производящий продукции, но удачно расположенный на пересечении потенциальных торговых путей (Москва).

В начальной конфигурации, показанной на рисунке 1, проложенные дороги отсутствуют.

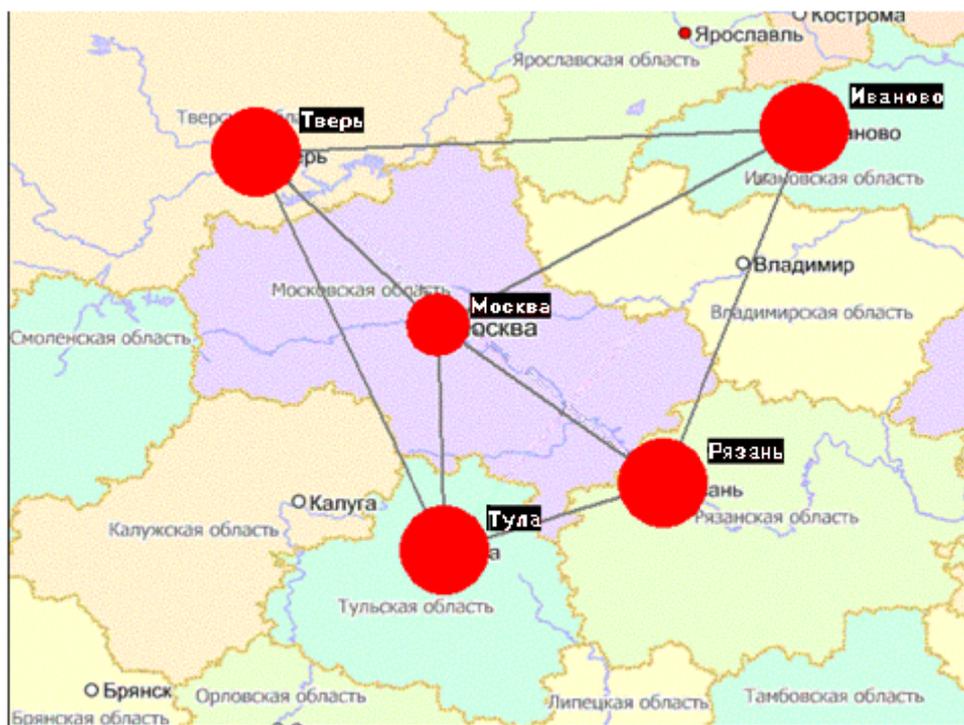


Рис. 1. Начальная конфигурация первого сценария

В новой версии модели из исходного (полного) графа были удалены ребра, соответствующие коммуникациям Иваново-Тула и Рязань-Тверь. Таким образом, средствами модифицированной модели было реализовано предположение о «расположении на пересечении торговых путей». Все остальные параметры были заданы такими же, как в имитационной схеме с использованием старой модели.

Рассмотрим сравнительную динамику размеров двух вершин графа: узла «Москва» и одного из четырех остальных узлов (благодаря симметрии модели их динамика в среднем одинакова), например — узла «Рязань» в течение 100 шагов с использованием двух моделей.

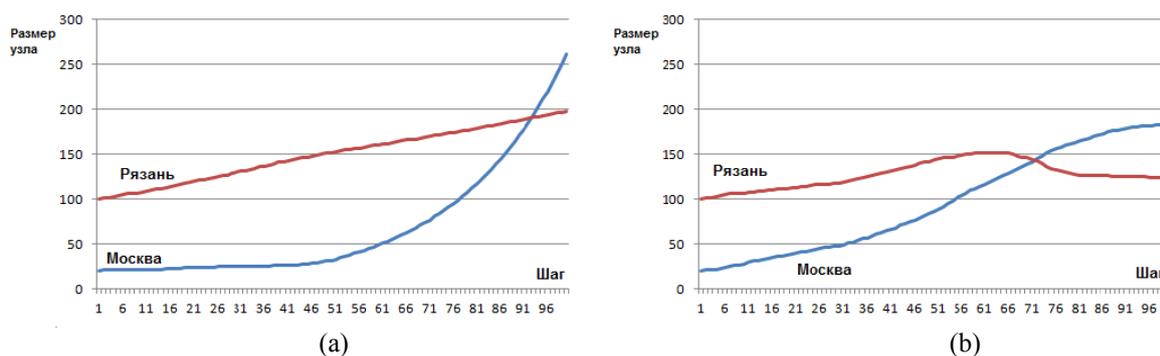


Рис.2. Динамика размеров узлов «Рязань» и «Москва» в исходной и модифицированной моделях

Из рисунка 2 видно, что при использовании для построения имитационной схемы модифицированной модели наблюдаются интересные особенности динамики размеров узлов: в частности, размер узла «Рязань» вначале растет, затем, достигнув максимума, начинает уменьшаться. Причина этого состоит в том, что с ростом размера узла увеличился и спрос на товары, производящиеся в других узлах, в том числе в диаметрально противоположных. Увеличение же объема перевозок этих товаров через узел «Москва» невозможно, поскольку для

расширения коммуникаций требуется развитие самого узла «Москва». И только после достижения узлом «Москва» достаточного уровня развития коммуникации расширяются, проблема со снабжением остальных узлов снимается, и их размеры стабилизируются.

В качестве второго пробного сценария в [Малинецкий, Степанцов, 2009] была рассмотрена конфигурация, в которой существуют два крупных узла (начальный размер 100), каждый из которых нуждается в продукции, производимой в другом узле друг друга (условные названия Альфа и Омега), прямое сообщение между которыми остановлено по каким-то внеэкономическим (политическим, военным и т.п.) причинам. При использовании модифицированной модели из графа было удалено ребро, соответствующее коммуникации «Альфа–Омега». Также в начальной конфигурации присутствовали два небольших как по размеру (10), так и по экономическому потенциалу узла Эпсилон и Ипсилон, на которые не налагалось ограничений по установлению транспортных коммуникаций. Эта конфигурация показана на рисунке 3.

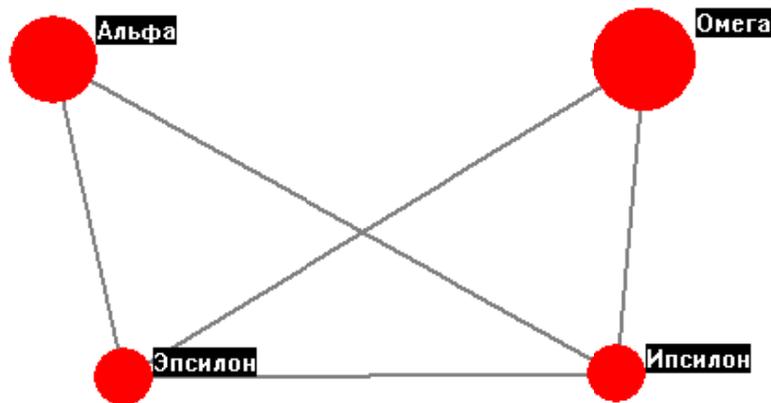


Рис. 3. Начальная конфигурация второго сценария

В рамках этого сценария при сохранении запрета на осуществление прямых транспортных перевозок в старой модели между узлами «Альфа» и «Омега» уже через десяток шагов не только устанавливается обходной торговый путь через Эпсилон и Ипсилон, но и начинается их бурный рост, приводящий к тому, что бывшие «малые» города обгоняют по развитию Альфу и Омегу. Отличие динамики при использовании модифицированной модели состоит лишь в том, что вместо относительной динамики размеров узлов «Альфа» и «Эпсилон» мы можем рассматривать их абсолютные величины: размер «Альфы» через 10 шагов начинает уменьшаться, в то время как размер «Эпсилон» стабильно растет (см. рис. 4). Таким образом, новая версия модели в явном виде демонстрирует проблемы развития узлов транспортной сети, появляющиеся при создании искусственных препятствий потокам товаров.

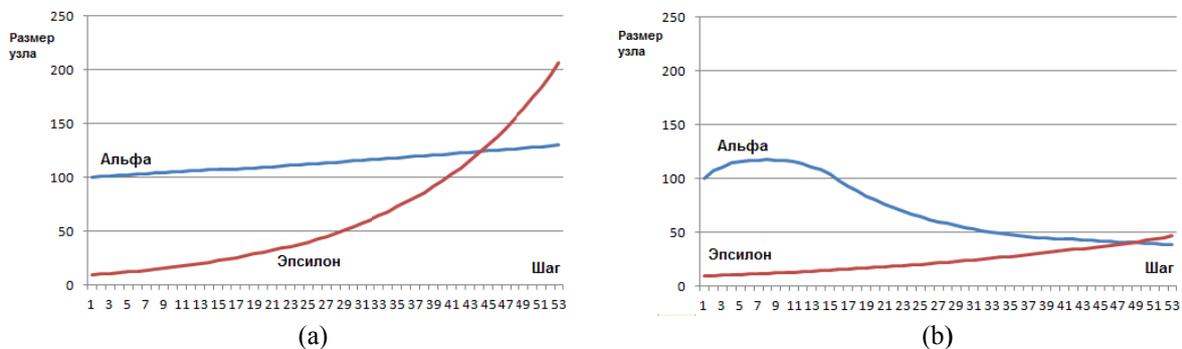


Рис.4. Динамика размеров узлов «Альфа» и «Эпсилон» в исходной и модифицированной моделях

По результатам сравнения моделирования в рамках пробных сценариев с использованием старой и новой версий модели можно сделать предварительный вывод о более адекватном характере варианта модели, предлагаемого в данной работе.

В качестве дальнейшего исследования предлагаемой модели представляется уместным повторить построение имитационных схем, моделирующих развитие реальных сетей, в частности, провести повторные исследования динамики железнодорожных систем России и Украины, в дополнение к изложенным в [Степанцов, 2011].

## Список литературы

- Агапова Г. И., Гавдаева А. В., Степанцов М. Е.* Моделирование динамики развития железнодорожных сетей. Препринт Института прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН, 2011, № 73.
- Малинецкий Г. Г., Степанцов М. Е.* Дискретная математическая модель динамического развития транспортной сети // Журнал вычислительной математики и математической физики, 2009. — Т. 49, № 9. — С. 1565–1570.
- Степанцов М. Е.* Моделирование некоторых сценариев развития систем железных дорог России и Украины // Пятая всероссийская научно-практическая конференция по имитационному моделированию и его применению в науках и промышленности «Имитационное моделирование: теория и практика» ИММОД-2011. Труды конференции. — СПб: ОАО Центр технологии и судостроения, 2011. — Т. 1. — С. 282–285.
- Stepantsov M. E.* On calibrating the dynamic model of a transport network // Труды Третьей международной конференции «Математическое моделирование социальной и экономической динамики» (MMSED-2010). 23–25 июня 2010 года. — М.: ЛЕНАНД, 2010. — С. 247–251.