УНИВЕРСИТЕТСКИЙ УЧЕБНИК

Серия «Прикладная математика и информатика»

Ю. Н. ПАВЛОВСКИЙ, Н. В. БЕЛОТЕЛОВ, Ю. И. БРОДСКИЙ

ИМИТАЦИОННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Допущено
Научно-методическим советом по математике
Министерства образования и науки Российской Федерации в качестве
учебного пособия для студентов высших учебных заведений,
обучающихся по специальностям направления подготовки
«Прикладная математика и информатика»

ACADEMIA

Москва
Издательский центр «Академия»
2008

УДК 519.673(075.8)
ББК 221.1: 32.81я73
П121

Рецензенты:
д-р физ.-мат. наук, проф. *В.Ф. Тишкин* (Институт математического моделирования РАН);
д-р физ.-мат. наук, проф. *И.Г. Поспелов* (Вычислительный центр им. А.А.Дородницына РАН)

Павловский Ю. Н.

П121 Имитационное моделирование : учеб. пособие для студ. высш. учеб. заведений / Ю.Н.Павловский, Н.В.Белотелов, Ю.И.Бродский. — М. : Издательский центр «Академия», 2008. — 236 с. — (Университетский учебник. Сер. Прикладная математика и информатика).

ISBN 978-5-7695-3967-1

В учебном пособии представлены материалы по разработке имитационных математических моделей сложных явлений, процессов, систем по компьютерной реализации моделей и организации интерфейсов в процессе выполнения имитационных экспериментов с моделями. Дан анализ моделируемых процессов. Приведены примеры имитационных математических моделей, иллюстрирующие составляющие технологии имитационного моделирования.

Для студентов высших учебных заведений. Может быть полезно аспирантам и научным работникам.

УДК 519.673(075.8)
ББК 22.1: 32.81я73

ISBN 978-5-7695-3967-1

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Учебное пособие написано на основе курсов, посвященных различным аспектам математического и компьютерного моделирования, читавшихся в разное время авторами в МГУ им. М.В. Ломоносова, МФТИ, ГУ-ВШЭ, МПГУ и РХТУ им. Д.И. Менделеева. Принципы, идеи и методы построения математических моделей достаточно подробно раскрыты, например, в изданиях [17], [34], [38]. В данном пособии авторы сделали акцент на приложении этих принципов, идей и методов к технологии математических экспериментов [18], а также на методах гуманитарного и естественно-научного анализа результатов таких экспериментов, основываясь на практическом опыте построения и эксплуатации имитационных моделей сложных систем [22], [23], [25], [32].

Книга вводит читателей в раздел прикладной математики, именуемый имитационным моделированием. В настоящее время термины «компьютерное моделирование», «компьютерная имитация» употребляются часто в виде синонимов имитационного моделирования. Имитационное моделирование как часть математического моделирования представляет собой сложное явление.

Содержание настоящей книги можно охарактеризовать как иллюстрацию на примерах конкретных моделей этапов технологии имитационного моделирования, а также перечисленных качеств имитационных моделей.

В гл. 1 рассмотрены проблемы общего характера, связанные с имитационным моделированием. Поскольку имитационные модели как математические объекты являются динамическими системами, в главе на простых примерах изложены полезные в дальнейшем сведения из этого раздела математики. Обсуждены взаимосвязи между непрерывными и дискретными динамическими системами. Последний раздел главы посвящен проблеме наблюдаемости динамической системы. Первая его часть содержит алгоритм, позволяющий для известного наблюдателя дать ответ на вопрос, является ли модель относительно него наблюдаемой. Во второй части на примере задачи наблюдения дана иллюстрация того, каким образом с помощью подходящей системы понятий (языковой среды) можно выяснить «сущность» проблемы и «увидеть» алгоритм ее решения. Этот материал может вызвать определенные затруднения у читателя именно предлагаемой языковой средой, которой студенты технических вузов, как правило, не владеют, поэтому читатель, не любящий излишних умственных напряжений, может его пропустить без ущерба для понимания дальнейшего содержания книги. Однако, на взгляд авторов, силы, затраченные на овладение новой системой понятий, всегда вознаграждаются более глубоким уровнем понимания предмета.

В гл. 2 на примере моделей демографических процессов продемонстрированы этапы технологии имитационного моделирования и взаимосвязи между имитационными моделями и теми моделями, которые доступны аналитическим методам исследования.

В гл. 3 изложена концепция имитационного моделирования, предложенная Дж. Форрестером и известная в настоящее время под названием «*системная динамика*». Вначале рассмотрены достаточно простые модели, затем на примере разработанной Дж. Форрестером модели, описывающей развитие мирового сообщества в целом на характерном временно́м отрезке, соизмеримом со временем жизни поколения (несколько десятков лет), т. е. модели, которая была отнесена к первому множеству моделей. В настоящее время эта концепция, оснащенная мощными инструментальными средствами конструирования моделей, их компьютерной реализации, визуализации результатов выполнения имитационных экспериментов, широко используется для построения моделей, отнесенных ко второму множеству, т. е. моделей, применяемых для практического анализа конкретных производственных процессов.

В гл. 4 рассмотрен метод имитации при изучении случайных процессов. Вначале приведены основные положения теории вероятностей и математической статистики, затем сформулированы простейшие задачи теории массового обслуживания, решение которых доступно аналитическим средствам. Далее дан пример «достаточно простой» системы массового обслуживания, математическая модель которой такова, что получение результатов аналитическими средствами затруднительно. Описана имитационная модель этого процесса и полученные с ее помощью результаты.

В гл. 5 изложены инструментальные средства имитационного моделирования, которые возникли в связи с реализацией третьего этапа технологии имитационного моделирования — разработки компьютерной программы, осуществляющей воспроизведение течения процесса. Инструментальная система имитации — совокупность средств информатики, поддерживающих разработку проблемно-ориентированных имитационных систем.

В гл. 6 рассмотрены проблемно-ориентированные интерактивные системы и, в частности, проблемно-ориентированные интерактивные имитационные системы, возникшие в связи с реализацией шестого этапа технологии имитационного моделирования — этапа организации эксплуатации имитационных моделей. Совокупность средств информатики, поддерживающих эксплуатацию имитационной модели, т. е. реализующая модель компьютерная программа, средства поддержки ее исполнения, средства обработки и визуализации результатов имитационных экспериментов, средств хранения и манипулирования внешней информацией, средств корректировки модели — это и есть проблемно-ориентированная имитационная система. Таким образом, проблемно-ориентированные имитационные системы являются формой эксплуатации сложных имитационных моделей.

В гл. 7 на ряде примеров проиллюстрировано одно из перечисленных качеств имитационных моделей, состоящее в «размывании границы» между математическими и гуманитарными методами анализа и прогноза сложных процессов. Одной из форм системного анализа предлагается считать гуманитарный анализ сложного процесса, использующий понятия и представления, возникшие в результате изучения данного процесса с помощью математической имитации. Приведены три «большие» имитационные модели: модель экономической динамики древнегреческих полисов в период Пелопоннесской войны (431 — 404 гг. до н. э.); модель развития взаимоотношений в системе государств; модель экологических, демографических и экономических процессов в виртуальном мире на характерном временно́м отрезке, сравнимом со временем жизни поколения. Выполнен основанный на понятиях, возникших в процессе моделирования, содержательный анализ этих процессов на гуманитарном уровне.

Главное внимание в учебном пособии уделено технологической стороне имитационного моделирования. Эта сторона имитационного моделирования есть совокупность инструментов и методов переработки «исходной» информации об интересующем нас процессе, которую можно получить, не обращаясь к средствам математического моделирования, в значениях неизвестных характеристик. Технология имитационного моделирования встроена во всю технологическую производственную структуру и, с одной стороны, обеспечивается этой структурой, а с другой, способствует ее развитию. В книге представлены некоторые детали взаимосвязи имитационного моделирования с другими технологиями, обеспечивающими производство материальных и духовных благ. У студентов должно создаться четкое убеждение, что производственная структура и структура потребления в их современном виде не могут существовать без технологии имитационного моделирования, так же как они не могут существовать без энергетики, транспорта, связи, добычи природных ресурсов и т. д.

Авторы благодарны профессорам В. Ф. Тишкину и И. Г. Поспелову за полезные замечания.

ВВЕДЕНИЕ

Под термином «имитационное моделирование» («имитационная модель») обычно подразумевают вычисление значений некоторых характеристик развивающегося во времени процесса путем воспроизведения течения этого процесса на компьютере с помощью его математической модели, причем получить требуемые результаты другими способами или невозможно, или крайне затруднительно. Воспроизведение течения процесса на компьютере с помощью математической модели принято называть *имитационным экспериментом.* В этом словосочетании имеется претензия на замену реальных экспериментов экспериментами с математическими моделями. Словосочетания «математическая имитация», а также «компьютерная имитация» вместо словосочетания «имитационное моделирование» будут использоваться, когда будет необходимо подчеркнуть эту претензию. Широкое использование имитационного моделирования стало возможным на определенном этапе развития информационных технологий, т. е. средств и инструментов сбора передачи, обработки, хранения информации. Здесь имеются в виду не только компьютеры, но и средства вычислительной математики, многоуровневые инструменты программирования, системы управления банками данных.

Имитационные модели относятся к классу моделей, которые являются системой соотношений между характеристиками описываемого процесса. Эти характеристики разделяют на внутренние («эндогенные», «фазовые переменные») и внешние («экзогенные», «параметры»). Приблизительно *внутренние характеристики* — это те, значения которых намереваются узнать с помощью средств математического моделирования; внешние — такие, от которых внутренние характеристики существенно зависят, но обратная зависимость (с практически приемлемой точностью) не имеет места. Модель, способная давать прогноз значений внутренних характеристик, должна быть замкнутой («замкнутая модель»), в том смысле, что ее соотношения позволяют вычислять внутренние характеристики при известных внешних. Процедура определения внешних характеристик модели называется ее *идентификацией*, или *калибровкой*.

Математические модели описанного класса (к ним относят и имитационные модели) определяют отображение, позволяющее получить по известным значениям внешних характеристик значения внутренних. Далее это отображение будет называться отображением, ассоциированным с моделью. Еще раз подчеркнем то обстоятельство, что в основе моделей рассматриваемого класса лежит постулат о независимости внешних характеристик от внутренних, а соотношения модели являются формой записи ассоциированного с ней отображения.

В имитационном моделировании очень заметна технологическая сторона математического моделирования. Слово «технология» означает «совокупность методов обработки, изготовления, изменения состояния, свойств формы сырья, материала или полуфабриката в процессе производства» (Современный словарь иностранных слов. — М.: Русский язык, 1992). В нашем случае «сырьем» служат фигурирующие в модели внешние характеристики; совокупностью методов обработки сырья, т. е. его превращения в значения интересующих нас характеристик реального мира — следующие действия, которые далее будут называться *этапами технологии имитационного моделирования*:

1) составление модели процесса;

2) проверка замкнутости модели и разработка процедуры вычисления внутренних характеристик по известным внешним характеристикам;

3) разработка компьютерной программы для вычисления внутренних характеристик, а также других характеристик, являющихся функциями внутренних и внешних («выходов показателей»);

4) идентификация модели, т. е. определение значений ее внешних характеристик;

5) верификация модели, т. е. выяснение границ ее применимости;

6) организация эксплуатации модели, т. е. выполнение имитационных экспериментов.

Таким образом, технология имитационного моделирования — способ извлечения новой информации (т. е. новых «знаний»), а именно значений внутренних характеристик модели, из той, которой уже располагаем — значений внешних характеристик.

Технология имитационного моделирования встроена во всю современную технологическую структуру: на разных этапах этой технологии используются разные инструменты, являющиеся элементами современной технологической структуры, и люди, обладающие разными знаниями и квалификацией. С одной стороны, развитие технологии имитационного моделирования зависит от развития технологической структуры, а с другой — технология имитационного моделирования способствует развитию современной технологической структуры. Иначе, общественное производство таково, что создание в его рамках практически любой, даже самой простой вещи требует использования всей существующей технологической структуры. Не является исключением и «производство прогнозов» с помощью имитационного моделирования. Ни современная структура производства, ни современная структура потребления не могут существовать, например, без передачи информации через искусственные спутники Земли. Для этого необходим прогноз их местоположений с помощью радиолокационных станций (см. гл. 1), в производстве которых задействована вся современная технологическая структура. Достаточно, впрочем, сослаться на необходимость использования компьютеров при прогнозировании местоположений спутников. В производстве компьютеров также задействована вся современная технологическая структура.

При изучении естественных физических процессов имитационное моделирование есть результат развития математического моделирования в данной области. Первоначально, с помощью исследования аналитическими средствами математических моделей в данной области (см. гл. 2) выясняются основные свойства протекающих в ней процессов. С течением времени развитие данной области требует все более точных прогнозов, что вызывает появление все более сложных моделей, учитывающих все больше влияющих на прогнозируемый процесс деталей. Аналитические средства становятся не применимыми, и получение необходимых прогнозов возможно только с помощью имитационных моделей.

Другая причина появления имитационных моделей состоит либо в высокой стоимости реальных экспериментов, либо в невозможности проведения экспериментов, например в технической сфере. Так, запрещение испытаний ядерного оружия привело не к отказу от его совершенствования (таков характер современных межгосударственных отношений: каждое государство, принадлежащее «ядерному клубу», не может «отстать» от других государств этого клуба в деле совершенствования ядерного оружия — см. гл. 7), а к развитию компьютерной имитации процессов, происходящих при ядерном взрыве. В настоящее время в ряде случаев компьютерной имитации движения проектируемого самолета в воздухе и вычислению на этой основе сил и моментов, действующих на самолет, доверяют больше, чем экспериментальным результатам, получаемым в результате продувок моделей самолетов в аэродинамических трубах (при продувках моделей в трубах трудно сохранить все необходимые параметры подобия).

Невозможность выполнить реальные эксперименты характерна также для социально-экономических и экологических процессов, поэтому имитационное моделирование в этих областях — одно из основных инструментов изучения и прогнозирования процессов. Среди различных моделей социально-экономических и экологических процессов, которые можно считать имитационными, выделяются два множества моделей. Одно из них используется для изучения общих свойств и закономерностей, присущих социально-экономическим процессам. Во многих случаях модели, принадлежащие этому множеству, описывают процессы, протекающие не в реальном, а виртуальном мире. Другое множество, наоборот, состоит из моделей, носящих утилитарно-практический характер и используемых для анализа реально протекающих производственно-экономических и бизнес-процессов.

Следующие качества, характерные для имитационных моделей, связаны с тем, что для получения требуемых результатов необходимо выполнять имитационные эксперименты на компьютере:

- наличие в модели случайных внешних характеристик;
- наличие в модели внешних управлений, т. е. управлений, которые должны задаваться «извне» экспертами для того, чтобы получить прогноз внутренних характеристик;
- создаваемая моделью иллюзия реальности;
- нахождение модели на границе возможностей математического моделирования, взаимодействие с исследованиями, выполняемыми гуманитарными средствами.

Имитационная модель необязательно обладает этими качествами одновременно, но по крайней мере одно такое качество присутствует. Дадим комментарии этим качествам.

Если в модели имеются случайные внешние характеристики, то и внутренние характеристики, и сам процесс являются случайными: в любой момент времени его характеристики — случайные величины. Имитационные эксперименты тогда воспроизводят реализации случайного процесса. Для того чтобы определить статистические характеристики случайного процесса, необходимо выполнить «достаточное» число таких реализаций (какое именно — оценивается средствами математической статистики в ходе самих экспериментов). Иначе, необходимо многократно воспроизводить течение процесса с помощью его имитационной модели. Заметим, что словосочетание «имитационное моделирование» появилось первоначально именно в теории случайных процессов и математической статистике как способ вычисления статистических характеристик случайных процессов путем многократного воспроизведения его течения с помощью модели этого процесса.

Вскоре после начала использования методов прикладной математики в управлении экономикой, планировании, исследовании операций, проектировании термины «имитация», «имитационный эксперимент» приобрели в этих областях смысл, не совпадающий с их первоначальной трактовкой в теории случайных процессов и математической статистике. Этим термином стали обозначать способ выбора рационального управления сложным процессом (рационального плана, рациональной конструкции проектируемого изделия), состоящий в следующем. Некоторым образом разрабатываются варианты управлений (планов, конструкций). Затем варианты сравниваются. Для этого при каждом варианте процесс (функционирование проектируемого изделия) воспроизводится с помощью его математической модели. Сравнение происходит либо по некоторым формальным критериям, либо носит неформальный характер, причем, чем сложнее используемая модель, чем больше она содержит реальных факторов, влияющих на принятие решений, тем более естественна неформальная оценка сравниваемых результатов. Математические модели, ориентированные на такое их использование, получили у специалистов в области управления, планирования, проектирования название «*имитационные*», процесс их составления стал называться *имитационным моделированием*, а каждая акция воспроизведения процесса (функционирования проектируемого изделия) — *имитационным экспериментом.*

Если изучаемый процесс — случайный, то для сравнения вариантов требуется выполнять так называемую *имитацию*, т. е. вычислять статистические характеристики этого случайного процесса путем набора необходимого количества реализаций (предполагается, что аналитическими средствами вычислить статистические характеристики нельзя), и именно эти статистические характеристики сравнивать.

Даже в этом случае специалисты в области управления, планирования, проектирования и исследования операций под термином «имитация» имеют в виду не способ вычисления характеристик случайных процессов путем набора статистики (для них это некоторая необходимая техническая деталь), а то, что альтернативные варианты управлений (планов, конструкций проектируемого объекта) являются внешними по отношению к модели процесса, т. е. задаются «извне». Они будут называть воспроизведение процесса имитацией и в случае, когда процесс детерминирован. Для них термин «имитация» имеет смысловую нагрузку противопоставления термину «оптимизация», в то время как для специалистов в области теории случайных процессов и математической статистики термин «имитация» несет оттенок противопоставления аналитическим методам расчета статистических характеристик случайного процесса.

Качество имитационных моделей, состоящее в создаваемой моделью иллюзии реальности, существенно при создании тренажеров, например, в аэрокосмической области, при управлении АЭС. Необходимо также отметить индустрию создания виртуальной реальности в компьютерных играх. Можно ожидать, что виртуальная реальность через некоторое время будет существенной составляющей структуры потребления людей.

Прокомментируем, наконец, качество имитационных моделей, состоящее в их позиции на границе применимости средств математического моделирования для анализа и прогноза сложных процессов, систем, явлений. Процессы, прогноз которых (в пределах практически необходимой точности) доступен в настоящее время средствам математического моделирования, будут называться «*простыми*». Тогда те явления, процессы, системы, прогноз которых с необходимой практически точностью не доступен в настоящее время средствам математической имитации, однако может быть дан специалистами в соответствующей сфере деятельности — экспертами, будут естественно называться «*сложными*». Введенная терминология [17] подчеркивает очевидный аспект двойственности между математическими и гуманитарными методами анализа и прогноза. Альтернативная терминология — трактовка математических методов анализа и прогноза как «*жестких*», гуманитарных — как «*мягких*».

Деление процессов на «простые» и «сложные» (т. е. методов их анализа и прогноза на «жесткие» и «мягкие») не является исчерпывающим. Имеются процессы, прогноз которых не доступен в настоящее время ни математическим, ни гуманитарным средствам. Кроме того, граница между математическими и гуманитарными средствами анализа и прогноза не является неподвижной. По мере развития технологии математического моделирования некоторые явления, процессы, системы, ранее бывшие «сложными», т. е. не доступными этой технологии, превращаются в «простые»: математические методы анализа и прогноза как бы «вторгаются» в гуманитарную сферу.

Имеет место и противоположный процесс, т. е. процесс вторжения гуманитарных методов анализа и прогноза в математические. Во-первых, построению любой математической модели предшествует гуманитарная фаза изучения явления, поскольку нужно «понимать» то, что подвергается математическому моделированию. Во-вторых, понятия и представления, возникшие в ходе математического моделирования, результаты математического моделирования, используются для прогноза явлений, процессов, систем, более сложных, чем те, которые непосредственно доступны математическим средствам.

Отмеченные аспекты взаимного влияния гуманитарных и математических методов анализа и прогноза явлений, процессов, систем лишь приблизительно отражают это взаимодействие. В настоящее время гуманитарные прогнозы многих «сложных» процессов (в экономике, медицине, социологии и т. д.) «поддерживаются» целыми системами математических моделей. С другой стороны, любая из стадий технологии математического моделирования (составление, идентификация, верификация, эксплуатация математической модели) предоставляет свои возможности для гуманитарного «понимания» моделируемого явления, процесса, системы и соответствующих прогнозов. Таким образом, граница между математическими и гуманитарными методами анализа и прогноза «размывается», причем в «обе стороны». Этот процесс «размывания» границы между гуманитарным и математическим, между «жесткими» и «мягкими» средствами анализа и прогноза, является процессом формирования технологий анализа и прогноза, объединяющих возможности математических и гуманитарных методов исследования. Такие технологии позволяют существенно расширить область реальных явлений, процессов, систем, которые поддаются адекватному прогнозу. Однако процесс формирования таких технологий пока происходит медленно и в течение жизни отдельного человека малозаметен.

Во многих случаях имитационные модели имеют дело с процессами, «лежащими» как раз на границе между «простым» и «сложным», если иметь в виду приведенное толкование этих терминов. Поэтому технологии, объединяющие математические и гуманитарные методы анализа и прогноза, проще всего формировать на основе имитационных моделей.

Глава 1

ИМИТАЦИОННЫЕ МОДЕЛИ КАК ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

В настоящей главе устанавливается, что имитационные модели являются дискретными динамическими системами, позволяющими шаг за шагом вычислять внутренние характеристики модели по известным внешним характеристикам. При выполнении некоторых условий дискретным динамическим системам можно придать «непрерывную форму». Эта форма имитационных моделей может оказаться полезной для извлечения информации о свойствах изучаемого процесса и понимания содержания некоторых этапов технологии математического моделирования. Рассматриваются взаимосвязи между дискретными и непрерывными динамическими системами. Непрерывная форма имитационных моделей используется для изучения той части проблемы идентификации имитационных моделей, которая связана с определением начальных значений внутренних характеристик модели.

1.1. Дискретные и непрерывные динамические системы

В имитационных моделях внутренние характеристики являются функциями времени, и соотношения модели должны однозначно определять эти функции, если известны фигурирующие в этих соотношениях характеристики, объявленные внешними. Интуитивно понятно, что для прогноза значений характеристик развивающегося во времени процесса необходимо знать значения этих характеристик в некоторый «начальный» момент времени. На самом деле необходимость иметь значения внутренних характеристик в начальный момент времени для того, чтобы с помощью модели дать прогноз их значений в последующие моменты времени, является предположением относительно характера процесса. Не будем останавливаться на анализе этого предположения, поскольку отказ от него приводит к «экзотическим» процессам, для которых трудно найти какие-либо реальные аналоги. (С этим обстоятельством и связана «интуитивная очевидность», о которой шла речь выше.) Таким образом, начальные значения внутренних характеристик моделей, описывающих развивающиеся во времени процессы, следует считать внешними характеристиками этого процесса. Более общей ситуацией для получения прогноза значений внутренних характеристик модели является необходимость знать не только их начальные значения, но и их значения в каждый момент времени некоторого временнóго отрезка, предшествующего начальному моменту времени.

Пусть известен отрезок времени $[t_0, T]$, на котором желательно получить прогноз значений некоторых характеристик, а t_k — некоторый момент времени, принадлежащий отрезку $[t_0, T]$. Пусть значения характеристик, которые подлежат прогнозу, известны в момент t_k. Замкнутая модель, удовлетворяющая предположениям, о которых шла речь в предыдущем абзаце, должна позволить вычислить значения интересующих нас характеристик в моменты t, принадлежащие отрезку $[t_k, T]$.

Что необходимо знать для того, чтобы, располагая значениями характеристик в некоторый момент t_k, узнать их значения в некоторый следующий момент $t_{k+1} = t_k + \Delta t$? Ответ очевиден: необходимо (и достаточно) знать средние скорости изменения этих характеристик на отрезке $[t_k, t_{k+1}]$ в зависимости от их значений в данный момент t_k. Предположим, что характеристики, о которых идет речь, уже разделены на внутренние и внешние, т. е. известны все «внешние» воздействия на изучаемый процесс, который на эти внешние воздействия не оказывает влияния. Обозначим значения внутренних характеристик процесса, подлежащего моделированию, в момент t_k через $y^1(t_k), \ldots, y^n(t_k)$; значения внешних характеристик в момент t_k, влияющие на внутренние, через $u^1(t_k), \ldots, u^r(t_k)$; средние скорости изменения характеристик $y^1(t_k), \ldots, y^n(t_k)$ на отрезке $[t_k, t_{k+1}]$ через $f^i(t_k, y^1(t_k), \ldots, y^n(t_k), u^1(t_k), \ldots, u^r(t_k))$, $i = 1, \ldots, n$. Тогда, располагая значениями $y^1(t_k), \ldots, y^n(t_k)$ внутренних характеристик и значениями $u^1(t_k), \ldots, u^r(t_k)$ внешних характеристик в момент t_k, можно вычислить значения $y^1(t_{k+1}), \ldots, y^n(t_{k+1})$ внутренних характеристик в момент t_{k+1}. Для этого разобьем отрезок $[t_0, T]$ на K частей точками $t_0, t_1, \ldots, t_k, \ldots, t_K = T$. Пусть для простоты $t_{k+1} - t_k = \Delta t$, $k = 0, 1, \ldots, K-1$. Если известны значения $y^1(t_0), \ldots, y^n(t_0)$ внутренних характеристик в момент t_0 и средние скорости $f^i(t_k, y^1(t_k), \ldots, y^n(t_k), u^1(t_k), \ldots, u^r(t_k))$, $i = 1, \ldots, n$, на каждом отрезке $[t_k, t_{k+1}]$, то с помощью следующих соотношений можно вычислить значения $y^1(t_k), \ldots, y^n(t_k)$ внутренних характеристик при всех t_k, $k = 1, \ldots, K$:

$$y^i(t_{k+1}) = y^i(t_k) + \Delta t f^i(t_k, y^1(t_k), \ldots, y^n(t_k), u^1(t_k), \ldots, u^r(t_k)),$$
$$i = 1, \ldots, n, k = 0, 1, \ldots, K-1. \tag{1.1}$$

В математике соотношения (1.1) называются *дискретной динамической системой.* Внешние характеристики $u^1(t_k), \ldots, u^r(t_k)$, $k = 0, 1, \ldots, K-1$, часто называют *входами* в систему (1.1), а внутренние характеристики $y^1(t_k), \ldots, y^n(t_k)$ — *выходами.*

Иногда интерес представляют не все внутренние характеристики, а меньшее количество их функций и функций внешних характеристик:

$$z^l = Z^l(t, y^1, \ldots, y^n, u^1, \ldots, u^r), \quad l = 1, \ldots, L. \tag{1.2}$$

В этом случае функции (1.2) называются выходами системы (1.1). Когда выше при определении имитационного моделирования говорилось о вычислении значений некоторых характеристик моделируемого процесса, имелись в виду именно выходы (1.2). Иногда выходы (1.2) называют также *показателями.* Может случиться так, что существует вытекающая из (1.1) более простая модель, содержащая меньшее количество внутренних характеристик, которая тем не менее позволяет вычислить все выходы (1.2) с необходимой точностью. Такая модель называется *реализацией модели* (1.1) относительно выходов (1.2). Проблема реализации моделей относительно заданных выходов будет обсуждаться в разд. 1.4.

Система (1.1) определяет значения внутренних характеристик изучаемого процесса в дискретные моменты времени t_k, $k = 1, \ldots, K$. Если процесс таков, что можно говорить о значениях $y^1(t), \ldots, y^n(t)$ при любом (вещественном) значении t промежутка $[t_0, T]$ и естественно считать функции $y^1(t), \ldots, y^n(t)$ непрерывными и имеющими производные, то вместе с дискретной моделью (1.1) можно попытаться описать процесс с помощью «непрерывной» модели, которая имеет вид

$$dy^i/dt = f^i(t, y^1, \ldots, y^n, u^1, \ldots, u^r), \quad i = 1, \ldots, n. \tag{1.3}$$

Здесь функции $f^i(t, y^1, \ldots, y^n, u^1, \ldots, u^r)$, $i = 1, \ldots, n$, являются «мгновенными» скоростями изменения соответствующих внутренних характеристик. Если значение Δt в (1.1) достаточно мало, то можно считать, что это те же самые функции, которые фигурируют в дискретной модели (1.1). Если модель является имитационной, то, как следует из приведенного выше объяснения этого термина, вычислить значения показателей (1.2) возможно только воспроизводя течение процесса, который описывается моделью (1.3), на компьютере. Практически это означает, что зависимость значений внутренних характеристик от времени и/или внешних характеристик не выражается с помощью элементарных функций.

Замечание 1.1. Класс элементарных функций — степенные, тригонометрические, обратные к тригонометрическим, показательные, логарифмические, результаты их сложения, вычитания, умножения, деления, суперпозиции, выполняемые в произвольном порядке. Производная элементарной функции является элементарной функцией. Однако первообразная элементарной функции не всегда является элементарной. В настоящее время не существует алгоритма, с помощью которого можно было бы ответить на вопрос: является первообразная предъявленной элементарной функции элементарной функцией? В то же время имеются элементарные функции, для которых доказано, что их первообразная не является элементарной функцией. То же касается динамических систем как дискретных, так и непрерывных. Если правая часть такой системы является элементарной функцией, а при составлении модели это, как правило, так и есть, то решение этой системы (как функция времени — целочисленного или дискретного, и/или внешних характеристик) необязательно принадлежит классу элементарных функций. В настоящее время не существует алгоритма, позволяющего ответить на вопрос: является ли решение для заданных правых частей системы, являющихся элементарными функциями, элементарной функцией? Для некоторых элементарных функций доказано, что решение соответствующих им динамических систем не является элементарной функцией. В этом случае и в случае, когда неизвестно, является решение системы элементарной функцией, принято говорить, что «у системы нет аналитического решения». Это словосочетание не точно отражает существо дела, поскольку понятия «элементарная функция» и «аналитическая функция» не совпадают. Не входя в обсуждение соотношения между этими понятиями, укажем лишь, что очень часто решение динамической системы является аналитической функцией времени и/или внешних характеристик (т. е. раскладывается в сходящийся степенной ряд по независимым переменным), но не является элементарной функцией. Точно так же словосочетания «у системы есть аналитическое решение» и «система решается аналитически» означают, что решение системы является известной элементарной функцией времени и/или внешних характеристик. При этом оно может и не быть, вообще говоря, аналитической функцией.

Поэтому для компьютерного воспроизведения течения процесса необходимо от модели (1.3) переходить к ее конечно-разностной аппроксимации.

Одним из вариантов такой аппроксимации является модель (1.1), которая получается из (1.3) заменой производных dy^i/dt, $i = 1, \ldots, n$, конечными разностями:

$$dy^i/dt \approx (y^i(t + \Delta t) - y^i(t))/\Delta t, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Величина Δt в (1.1) называется *шагом дискретизации модели* (1.3). Возможны более сложные способы дискретизации непрерывной системы (1.3), имеющие целью при заданной точности вычислений внутренних характеристик системы получить их за меньшее количество вычислений, чем это имеет место при простейшей дискретизации (1.1) системы (1.3).

Из выполненных рассуждений следует также, что дискретные динамические системы можно считать «стандартной формой» имитационных моделей, поскольку при численном решении на компьютере непрерывная динамическая система дискретизируется.

1.2. Примеры динамических моделей

Соотношение между непрерывными и дискретными динамическими системами поясним на ряде примеров, относящихся к демографии и экологии.

Начнем с простейшей модели изменения численности некоторой популяции (людей, животных), называемой иногда моделью Мальтуса. Единственная внутренняя характеристика в модели Мальтуса — численность некоторой популяции (людей, животных) $N(t)$ в момент t. Функция $N(t)$ полагается непрерывной и дифференцируемой.

В основе модели Мальтуса лежит предположение, что скорость $\dot{N}$ (здесь и далее удобно обозначать производную $\frac{dN}{dt}$ через $\dot{N}$) изменения некоторой популяции (людей, животных) пропорциональна ее текущему значению $N(t)$:

$$\dot{N} = \gamma N, \tag{1.4}$$

где коэффициент пропорциональности γ — темп прироста популяции, при этом $\gamma = \alpha - \beta$ — разность темпов рождаемости α и смертности β.

Приведем другую форму вывода этой модели. Именно в основе модели (1.4) лежит предположение о том, что отношение $\dot{N}/N = \gamma$ не зависит от N. Значение γ может при этом зависеть от времени или каких-либо характеристик, не зависящих, однако, от $N(t)$. До тех пор, пока предположение о том, что γ не зависит от $N(t)$, верно, соотношение (1.4) является моделью, а γ — внешней характеристикой этой модели.

Такие предположения будем называть *гипотезами об инвариантности*. Их суть в самом общем виде состоит в том, что некоторая совокупность характеристики реального мира не зависит от других характеристик.

В основе многих моделей лежит совокупность гипотез об инвариантности. Далее при составлении моделей этот факт, если он имеет место, будет обязательно отмечаться. (Если в соотношении $\dot{N}/N = \gamma$ характеристика γ зависит от N , то для того, чтобы это соотношение было моделью, необходимо явно указать функцию $\gamma\ (N)$. В этой функции могут фигурировать коэффициенты, которые не зависят от N . Тогда эти коэффициенты и будут внешними характеристиками модели.)

Как известно, решение уравнения (1.4) есть

$$N(t) = N_0 e^{\gamma t}, \tag{1.5}$$

где N_0 — численность популяции при $t = 0$.

В разностном виде уравнение модели Мальтуса выглядит следующим образом:

$$N_n = N_{n-1} + \Delta t \gamma N_{n-1}, \quad n = 0, 1, 2, \ \ldots \tag{1.6}$$

Его решением является функция

$$N_n = N_0 (1 + \Delta t \gamma)^n. \tag{1.7}$$

Сравним решение (1.5) уравнения (1.4) и решение (1.7) уравнения (1.6).

Для этого зафиксируем время t в решении (1.4). Значению t соответствует номер n в (1.7), получаемый по формуле

$$n = t/\Delta t. \tag{1.8}$$

Подставляя (1.8) в (1.7), получим $N_{t=n\Delta t} = N_0(1 + \Delta t\gamma)^{t/\Delta t}$, или, что то же самое, $N_{t=n\Delta t} = N_0(1 + \Delta t\gamma)^{\gamma t/\gamma \Delta t}$. При стремлении Δt к нулю и $t = \text{const}$, поскольку $\lim\limits_{\gamma\Delta t \to 0}(1 + \gamma\Delta t)^{1/\gamma\Delta t} = e$ и функция $y = x^t$ непрерывна по x, получим $N(t) = N_0 e^{\gamma t}$.