

СТАВРОПОЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

Зайцева Ирина Владимировна

**Математическое моделирование самоорганизующихся
экономических процессов**

05.13.18 – Математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ

Диссертация на соискание
ученой степени кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-
математических наук,
профессор **Семенчин Е.А.**

Ставрополь – 2005

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	4
ГЛАВА 1. АНАЛИЗ ЭФФЕКТИВНОСТИ И ПРОБЛЕМ МОДЕЛИРОВАНИЯ РЫНКА ТРУДА	13
1.1. Постановка задачи моделирования рынка труда.....	13
1.2. Обзор инструментальных средств имитационного моделирования рынка труда.....	16
1.3. Особенности процесса самоорганизации рынка труда.....	21
1.4. Анализ модели самоорганизации рынка труда отдельной отрасли.....	24
1.5. Некоторые результаты исследования устойчивости линейных стационарных систем.....	28
1.6. Некоторые необходимые сведения из теории массового обслуживания	32
1.6.1. Уравнения Колмогорова для вероятностей состояний	32
1.6.2. Простейший поток требований.....	35
1.6.3. Системы массового обслуживания.....	40
1.7. Выводы.....	46
ГЛАВА 2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ САМООРГАНИЗАЦИИ РЫНКА ТРУДА	48
2.1. Математическая модель самоорганизации рынка труда для нескольких отраслей экономики	48
2.2. Методика исследования на устойчивость математической модели самоорганизации рынка труда для нескольких отраслей экономики.....	51
2.3. Примеры исследования на устойчивость математической модели самоорганизации рынка труда для двух и трех отраслей экономики.....	54
2.4. Алгоритм исследования математической модели самоорганизации рынка труда	60
2.4.1. Построение характеристического многочлена математической модели	62
2.4.2. Особенности вычисления собственных значений характеристического многочлена математической модели.....	70
2.4.3. Анализ устойчивости математической модели с использованием математической системы MathCad.....	73
2.5. Выводы.....	78
ГЛАВА 3. ВЕРОЯТНОСТНАЯ МОДЕЛЬ БИРЖИ ТРУДА КАК МЕТОДИКА ВЫЧИСЛЕНИЯ ОСНОВНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК РЫНКА ТРУДА	80

<i>3.1. Обоснование вероятностного подхода к описанию работы биржи труда</i>	<i>80</i>
<i>3.2. Разработка вероятностной модели биржи труда</i>	<i>81</i>
3.2.1. Примеры вычисления основных характеристик биржи труда	88
<i>3.3. Разработка имитационной модели биржи труда</i>	<i>90</i>
3.3.1. Особенности реализации имитационной модели биржи труда	90
3.3.2. Постановка задачи имитационного моделирования биржи труда	92
3.3.3. Анализ функциональной структуры модели биржи труда	93
3.3.4. Разработка структуры модели биржи труда	98
3.3.5. Результаты имитационного моделирования биржи труда	101
3.3.5.1. Аналитический обзор результатов серии экспериментов	101
<i>3.4. Выводы</i>	<i>109</i>
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	111
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ	112
Приложение А	121
Приложение Б	122
Приложение В	123
Приложение Г	124

ВВЕДЕНИЕ

Экономика - одна из самых распространенных сфер применения математических моделей. За последние 30-40 лет методы моделирования в экономике разрабатывались очень интенсивно. Математическое моделирование является важным инструментом экономических исследований. Применение математического подхода к экономическому моделированию способствует решению многих экономических задач. Целью математического моделирования экономических систем является использование методов математики для решения задач, возникающих в сфере экономики, с применением, как правило, современной вычислительной техники.

Одним из основных структурных элементов экономики является рынок труда. В экономической теории принято, что рынок труда характеризует систему социально-трудовых отношений по поводу удовлетворения потребности народного хозяйства в рабочей силе и реализации гражданами права на труд, осуществляемых посредством обмена на основе спроса и предложения (соответственно, рабочей силы и рабочих мест) [74].

Проблемы, противоречия, новые тенденции, закономерности развития, сопровождающие становление современного рынка труда, требуют всестороннего изучения. Моделирование рынка труда позволяет предотвратить будущие структурные дисбалансы в сфере труда, поддерживать соответствие спроса и предложения рабочей силы.

Целью математического моделирования рынка труда является получение объективных данных, что в какой-то мере обеспечит повышение эффективности его функционирования. Создание моделей рынка труда обеспечивает выбор стратегии управления в сфере занятости, учитывая при этом особенности экономического развития, состава трудоспособного населения, политической ситуации, приоритетов социального развития.

Моделирование рынка труда дает возможность объективно оценить его текущее состояние и тенденции изменения, а также принимать обоснованные

управленческие решения в сфере трудоустройства и эффективного использования человеческого капитала. На основе качественной математической модели рынка труда, возможно:

- создание информационной базы и системы мониторинга рынка труда;
- определение различных параметров рынка труда;
- предоставление заинтересованным службам информации для анализа и прогнозирования конъюнктуры рынка труда и тенденций ее изменения;
- анализ потребителей рабочей силы;
- определение наиболее предпочтительных, пользующихся спросом на данный момент специалистов;
- анализ распределения и перераспределения рабочей силы в аспекте дальнейшего использования по отраслям экономики;
- анализ имеющейся системы стимулирования занятости для формирования политики занятости;
- прогнозирование рынка рабочей силы, числа рабочих мест и потребностей в них, а также уровня и структуры занятости населения, его миграции.

Применение свойства самоорганизации для описания экономических процессов открывает новые возможности для их изучения. Построение математической модели самоорганизации рынка труда для нескольких отраслей экономики, исследование модели на устойчивость позволяет установить тенденции функционирования рынка рабочей силы, исследовать рынок на предмет его устойчивости.

Рынок труда в отличие от других типов рынков обладает свойством устойчивости. Однако исследование рынка труда в условиях рыночной экономики на предмет устойчивости, анализ деятельности биржи труда как составной части функционально-организационной структуры рынка труда, использование этих исследований при формировании социальной политики являются недостаточно изученными на сегодняшний день. *Актуальность данного исследования обусловлена необходимостью построения*

математической модели, описывающей процесс функционирования рынка труда для нескольких отраслей экономики.

Результаты деятельности биржи труда не всегда соответствуют запросам рынка труда на современном этапе [68]. Причиной является некомпетентность в оказании услуг, что препятствует развитию процесса ориентации на актуальность запросов населения. Недостаточная информация о состоянии рынка труда не позволяет адекватно воздействовать на протекающие в нем процессы. Возникает ряд противоречий, связанных с различием показателей официальной статистики и реального состояния рынка труда, возможностями современных информационных ресурсов и отсутствием технологий их использования в деятельности биржи труда.

В диссертационной работе разработана модель самоорганизации рынка труда для нескольких отраслей экономики, предложена методика, позволяющая определять устойчивое состояние рынка труда. В работе мы стремились объединить возможности применения современной теории устойчивости для решения практических задач оценивания состояния рынка труда с использованием ЭВМ.

В данной работе предлагаются вероятностная и имитационная модели биржи труда, позволяющие определить основные характеристики рынка труда.

Объект и предмет исследования. Объектом исследования являются рынок труда, биржа труда и основные ее составляющие - работодатели и ресурсы для трудовой деятельности, занятость населения и безработица, основные принципы их регулирования на федеральном и региональном уровнях, предметом исследования является математический аппарат, описывающий причинно-следственные связи и взаимозависимости между рынком труда и безработицей.

Гипотеза исследования заключается в том, что функционирование рынка труда можно считать самоорганизующимся процессом. Самоорганизация определяется как свойство «того или иного объекта менять поведение или структуру в зависимости от окружающей обстановки в направлении,

отвечающем интересам объекта» [43].

Цель и задачи исследования. Целью диссертационной работы является разработка математических моделей и программных средств для решения задачи исследования рынка труда на устойчивость к внешним воздействиям в начальный момент времени и описание основных его характеристик (параметров).

Для достижения поставленной цели требуется решение следующих задач:

1. Построить математическую модель самоорганизации рынка труда для нескольких отраслей экономики на основе проведенного анализа и обобщений начатого в этом направлении исследования [12] по аналитическому моделированию рынка труда, позволяющую при начальном возмущении исследовать на устойчивость состояние рынка труда.

2. Разработать комплекс программ, реализующий алгоритмы исследования на устойчивость построенной аналитической модели рынка труда.

3. Разработать вероятностную модель рынка труда, позволяющую определить его основные характеристики: интенсивность поступления требований от безработных в различные отделы биржи труда; время ожидания обслуживания в отделах биржи труда; время обслуживания требования от безработного; распределение ресурсов между отделами биржи труда для выполнения соответствующих функций; коэффициент использования (доля времени моделирования) отделов биржи труда.

4. Разработать имитационную модель функционирования биржи труда.

Методы проведенного исследования. Решение поставленных задач основывается на использовании аппарата теории устойчивости динамических систем, теории массового обслуживания, численных методах, инструментальных средствах моделирования сложных систем.

Для проведения исследований привлекались работы в области теории массового обслуживания (Б.В. Гнеденко, И.Н. Коваленко и др.) [24]; теории

вероятностей (Б.В. Гнеденко и др.) [16, 25, 26]; имитационного моделирования (Боев В.Д., Емельянов А.А., Кобелев Н.Б. и др.) [9, 34, 43, 50].

Недостаточная распространенность методов моделирования в эмпирических исследованиях рынка труда позволяет заявить о *научной новизне исследования*, которая состоит в следующем:

1. Обобщены известные результаты [12] математического моделирования рынка труда с одной отрасли экономики на случай n отраслей.

2. Проведенные исследования на устойчивость математической модели самоорганизации рынка труда для нескольких отраслей экономики реализованы в системе MathCad.

3. Разработана вероятностная модель функционирования (работы) биржи труда, позволяющая определять основные ее характеристики.

4. Вероятностная модель работы биржи труда реализована в виде имитационной модели в системе моделирования GPSS World.

Практическая значимость полученных результатов.

1. Предложенные математические модели могут быть использованы для проведения анализа устойчивости состояния рынка труда, определения основных параметров (факторов) процесса самоорганизации рынка труда.

2. Предлагаемый комплекс программ на ЭВМ позволяет исследовать на устойчивость математическую модель самоорганизации рынка труда для нескольких отраслей экономики.

3. Разработанные в процессе исследования функционирования рынка труда и деятельности биржи труда материалы и рекомендации были использованы в работе департамента социальной политики г. Ставрополя. Предложенные модели были апробированы в Ставропольском центре занятости, в кадровом агентстве НОУ «Бакалавр» (г. Ставрополь). Научные результаты проведенных исследований внедрены и использовались в учебном процессе Северо-Кавказского социального института (г. Ставрополь) при подготовке студентов специальности 351400 «Прикладная информатика в экономике» в ходе чтения курса «Имитационное моделирование

экономических процессов», при подготовке студентов специальности 230700 «Сервис» в ходе чтения курсов «Методы моделирования в сервисе», «Методы оптимизации в сервисе» и руководства написанием дипломных и курсовых работ.

По результатам проведенных исследований, изложенных в диссертационной работе, получены соответствующие акты внедрения.

Основные положения диссертации, выносимые на защиту:

1. Аналитическая модель самоорганизации рынка труда многоотраслевой экономики, позволяющая исследовать на устойчивость этот рынок при возмущении начального состояния рынка.

2. Методика исследования на устойчивость процесса самоорганизации рынка труда, реализованная с помощью ЭВМ.

3. Вероятностная модель функционирования биржи труда, разработанная с помощью методов теории массового обслуживания и позволяющая определять основные вероятностные характеристики биржи.

4. Имитационная модель функционирования биржи труда, позволяющая воспроизводить процесс ее работы в системе моделирования GPSS World.

Достоверность результатов исследования обеспечивается использованием современного математического аппарата и инструментальных средств (MathCad, системы моделирования GPSS World) для описания исследуемых процессов и подтверждается многократно наблюдавшейся согласованностью разработанных положений и предложенных методик с экспериментальными данными с погрешностью 0,01 %.

Апробация результатов диссертации.

Результаты проведенных исследований были апробированы и докладывались на третьей региональной научной конференции «Математическое моделирование и информационные технологии в технических, естественных и гуманитарных науках» (г. Георгиевск, 2003 г.); Понтрягинских чтениях-XIV «Современные методы теории краевых задач» (г. Воронеж, 2003 г.), Четвертом Всероссийском симпозиуме по прикладной и

промышленной математике (г. Сочи, 2003 г.), 49-й научно-методической конференции преподавателей и студентов СГУ «Университетская наука – региону» (г. Ставрополь, 2004 г.), Пятом Всероссийском симпозиуме по прикладной и промышленной математике (г. Петрозаводск, г. Кисловодск, 2004 г.), 50-й юбилейной научно-методической конференции преподавателей и студентов СГУ «Университетская наука – региону» (г. Ставрополь, 2005 г.), Шестом Всероссийском симпозиуме по прикладной и промышленной математике (г. Санкт-Петербург, 2005 г.), всероссийской научно-практической конференции «Рынок труда, занятость, доходы: проблемы и тенденции развития» (Орел, 2005 г.).

Материалы диссертации обсуждались на научных семинарах кафедры прикладной математики и информатики Ставропольского государственного университета, кафедры сервиса Северо-Кавказского социального института.

Опубликованность результатов. Материалы диссертации опубликованы в 12 научных работах.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, 3 глав, заключения, списка использованных источников и приложений. Работа изложена на 120 страницах, содержит 26 рисунков и 7 таблиц.

В первой главе приведены теоретические сведения о методах моделирования, свойстве самоорганизации, из теории устойчивости и из теории массового обслуживания, которые требуются для проводимых в диссертационной работе исследований.

Обосновано, положение о возможности объективно оценить текущее состояние рынка труда и тенденции его изменения.

Показано, что принципиально новым подходом к анализу рынка труда являются методы математического моделирования с использованием свойства самоорганизации рынка труда, которое может быть использовано для его исследования. Проанализирована математическая модель самоорганизации рынка труда для одной отрасли экономики.

Сформулировано, что, правильно выбрав показатели эффективности

работы, биржу труда можно интерпретировать как некоторую систему массового обслуживания с ожиданием (очередью), а использование построенной модели позволяет оценить ситуацию на рынке труда, создать четкую структуру, определить тенденции и процессы развития рынка рабочей силы.

Рассмотрено применение имитационного моделирования для моделирования рынка труда. Использование имитационных моделей рынка труда открывает новые возможности по концептуальному анализу проблем функционирования рынка труда. Имитационная модель биржи труда позволяет воспроизводить ход событий на бирже труда при соответствующей формализации поведения и взаимодействия ее объектов.

Во второй главе разработана математическая модель самоорганизации рынка труда для нескольких отраслей экономики, позволяющая проследить определенные тенденции функционирования рынка рабочей силы; представлена методика определения устойчивого состояния системы дифференциальных уравнений, описывающей динамику перераспределения рабочей силы.

Проанализировав полученные сведения об устойчивых и неустойчивых состояниях рынка труда для n различных отраслей экономики вполне возможно составить прогноз его состояния. Полученный прогноз позволит избежать кризисов на рынке труда.

В третьей главе предложены модели работы биржи труда для различных состояний рынка труда, позволяющие определить основные характеристики рынка труда: интенсивность поступления требований безработных в различные отделы биржи труда; время ожидания обслуживания в отделах биржи труда; время обслуживания требования от безработного; распределение ресурсов между отделами биржи труда для выполнения соответствующих функций; коэффициент использования (доля времени моделирования) отделов биржи труда.

С точки зрения теории массового обслуживания биржа труда

рассматривается как система массового обслуживания (СМО) с ожиданием (очередью), согласующей такие процессы, как спрос и предложение на рабочую силу, где отделы биржи – каналы СМО, поток требований от безработных – поток требований в СМО, очередь на бирже – очередь требований в СМО и т.д. Моделирование биржи труда позволяет оценить спрос и предложение на рынке труда.

Разработанная имитационная модель биржи труда позволяет получить статистические показатели использования ресурсов, на которые существенное влияние оказывают характеристики потоков поступления требований от безработных и проводить количественный анализ процесса и результатов функционирования биржи труда.

В заключении обобщены итоги и результаты проведенных исследований.

Приложение содержит листинг комплекса программ, реализующих алгоритм исследования на устойчивость математической модели самоорганизации рынка труда, разработанной в данном исследовании. Комплекс программ разработан в системе MathCad. Приведены структурная схема работы биржи труда г. Ставрополя, Q-схема биржи труда, блок-диаграмма модели биржи труда, листинг модуля функционирования биржи труда на языке GPSS.

ГЛАВА 1. АНАЛИЗ ЭФФЕКТИВНОСТИ И ПРОБЛЕМ МОДЕЛИРОВАНИЯ РЫНКА ТРУДА

1.1. Постановка задачи моделирования рынка труда

Среди многих проблем экономики в последние годы особую остроту и актуальность приобретает проблема эффективного функционирования рынка труда. Успешное решение этой проблемы зависит от глубины познания объективных законов развития рынка труда.

Рынок труда является одной из наиболее подвижных и динамичных систем, детерминированных внешними факторами, главным из которых является технический прогресс. Изменение условий общественного производства всегда отражается на организационной структуре и механизме социального регулирования рынка труда. Так было в эпоху технической революции 20-30-х гг. двадцатого столетия, так происходит и сегодня. НТР 70-80-х гг. ознаменовала не просто смену технико-технологического уклада, а качественный переход от индустриальной к информационной цивилизации, в основе которой лежит научный потенциал и способность трансформировать научные знания, информацию в конечный продукт. "Интеллектуальная экономика" превращает человека в главную производительную силу общества, а его созидательный потенциал - в капитал, от объема и качества которого, в первую очередь, зависит экономический прогресс. Формирование новых качеств современного работника вызывает перестройку не только структуры и механизма рынка труда, но и всей совокупности трудовых отношений.

Теоретическое осмысление проблем, противоречий, новых тенденций, сопровождающих становление современного рынка труда, требует всестороннего исследования всей совокупности факторов, порождающих специфику форм его функционального состояния, закономерностей его модификации и развития.

Функционально - организационная структура рынка труда включает в

себя в условиях развитой рыночной экономики следующие элементы: принципы государственной политики в области занятости и безработицы; систему подготовки кадров; систему найма, контрактную систему; фонд поддержки безработных; систему переподготовки и переквалификации; биржи труда; правовое регулирование занятости [60].

Факторы конъюнктуры современного рынка труда постоянно или циклически (на долгосрочных временных интервалах или в краткосрочном периоде), отклоняют рынок от равновесия или приближают к нему. Конъюнктура рынка труда определяется дефицитом кадров, равновесным состоянием, безработицей.

Биржа труда является одним из главных учреждений, организующим рынок труда, согласующим спрос и предложение на рабочую силу. Законодательные правила постановки на учет в качестве безработного, а также размер пособия по безработице и сроки его выполнения являются важными детерминантами, определяющими различия в сроках пребывания на учете в бирже труда [1].

Один из показателей здоровья экономики страны - это уровень занятости населения. Основными направлениями регулирования занятости являются, кроме системы социальных гарантий: стимулирование спроса на труд, стимулирование предложения труда, согласование спроса и предложения на рынке труда.

Проблемы занятости, безработицы приобретают все большую актуальность на современном этапе. Прогнозирование занятости населения и ее структуры занимает важное место в деятельности федеральных и региональных органов управления [3]. Решение задач прогнозирования занятости населения позволит определить зависимости от основных социально-экономических параметров развития, демографических факторов, в т. ч. миграционных процессов.

Формализация теории может быть завершена разработкой комплекса взаимосвязанных математических и компьютерных моделей, позволяющих

гибко изменять политику государства в сфере занятости и безработицы с целью согласования эффективного развития экономики и социальной защищенности безработных.

Отечественной наукой накоплен определенный опыт составления математических моделей, описывающих процессы, происходящие на рынке труда [13, 47, 65, 76, 100, 101]. Для прогноза ситуации в сфере занятости и безработицы, в основном, использовались балансовые модели и статистические методы корреляционного анализа. Известно, что регрессионные методы дают хорошие результаты в тех случаях, когда не происходит резких структурных изменений социально-экономического развития общества. Поэтому ни один прогноз, составленный при помощи этих методов, не смог предсказать обострение ситуации на рынке труда в 1998 г.

Выбор математических методов для решения проблемы самоорганизации рынка труда обусловлен следующими аспектами [5, 21, 39, 52, 85, 87]:

1. Совершенствование системы сбора информации о сложном объекте (рынке труда). Математические методы позволяют упорядочить систему информации, выявлять недостатки в имеющейся информации и выработать требования для подготовки новой информации или ее корректировки. Разработка и применение математических моделей указывают пути совершенствования системы сбора и анализа информации, ориентированной на решение определенных задач планирования и управления. Прогресс в информационном обеспечении планирования и управления опирается на бурно развивающиеся технические и программные средства информатики.

2. Интенсификация и повышение точности технических и экономических расчетов. Формализация технических и экономических задач и применение ЭВМ многократно ускоряют типовые, массовые расчеты, повышают точность и сокращают трудоемкость, позволяют проводить многовариантные технические и экономические обоснования сложных мероприятий, недоступные при «ручной» технологии.

3. Углубление количественного анализа проблем в технических,

экономических и других приложениях. Благодаря применению метода моделирования рынка труда значительно усиливаются возможности конкретного количественного анализа: изучение многих факторов, оказывающих влияние на процессы, количественная оценка последствий изменения условий развития объектов и т. п.

4. Решение принципиально новых научных и практических задач в любой сфере приложений. Посредством математического моделирования рынка труда удастся решать такие задачи, которые иными средствами решить невозможно, например: нахождение оптимального варианта структуры биржи труда, создание объекта с заранее заданными свойствами, автоматизации контроля за функционированием рынка труда и т. п.

1.2. Обзор инструментальных средств имитационного моделирования рынка труда

Имитационное моделирование является сегодня мощным и перспективным инструментом конструирования и последующего исследования сложных экономических процессов и систем, в которых велико число переменных, трудоемок математический анализ зависимостей, высок уровень неопределенности имитируемых ситуаций.

Имитационное моделирование позволяет объединять математические методы с практическим и теоретическим опытом специалистов-практиков [43, 54, 67].

Имитационное (компьютерное) моделирование экономических процессов применяется в двух случаях [34]:

- для управления сложным бизнес-процессом, когда имитационная модель управляемого экономического объекта используется в качестве инструментального средства в контуре адаптивной системы управления, создаваемой на основе информационных (компьютерных) технологий;
- при проведении экспериментов с дискретно-непрерывными моделями

сложных экономических объектов для получения и отслеживания их динамики в экстренных ситуациях, связанных с рисками, натурное моделирование которых нежелательно или невозможно.

В [34] выделены различные типовые задачи, решаемые средствами имитационного моделирования при управлении экономическими объектами:

- моделирование процессов логистики для определения временных и стоимостных параметров;
- управление процессом реализации инвестиционного проекта на различных этапах его жизненного цикла с учетом возможных рисков и тактики выделения денежных сумм;
- анализ клиринговых процессов в работе сети кредитных организаций;
- прогнозирование финансовых результатов деятельности предприятия на конкретный период времени;
- бизнес-реинжиниринг несостоятельного предприятия;
- анализ адаптивных свойств и живучести компьютерной региональной банковской информационной системы;
- оценка параметров надежности и задержек в централизованной экономической информационной системе с коллективным доступом;
- анализ эксплуатационных параметров распределенной многоуровневой ведомственной информационной управляющей системы с учетом неоднородной структуры, пропускной способности каналов связи и несовершенства физической организации распределенной базы данных в региональных центрах;
- моделирование действий курьерской (фельдъегерской) вертолетной группы в регионе, пострадавшем в результате природной катастрофы или крупной промышленной аварии;
- анализ, сетевой модели PERT (Program Evaluation and Review Technique) для проектов замены и наладки производственного оборудования с учетом возникновения неисправностей;
- анализ работы автотранспортного предприятия, занимающегося

коммерческими перевозками грузов, с учетом специфики товарных и денежных потоков в регионе;

- расчет параметров надежности и задержек обработки информации в банковской информационной системе.

Применение имитационного моделирования не имеет видимых ограничений [56]. Имитационное моделирование рынка труда позволяет установить характер экономических взаимоотношений между работниками и работодателями. Инструментом подобных исследований является имитационная многоагентная модель. Объектом моделирования является биржа труда как основной элемент функционально - организационной структуры рынка труда.

Имитационная модель биржи труда позволяет:

- отображать ход событий на бирже труда при соответствующей формализации поведения и взаимодействия ее объектов;

- рассчитывать широкий класс обобщенных показателей моделируемого процесса;

- прогнозировать на будущее поведение и взаимодействие объектов биржи труда.

Система имитационного моделирования, обеспечивающая создание моделей для решения перечисленных задач, должна обладать следующими свойствами [34]:

- возможностью применения имитационных программ совместно со специальными экономико-математическими моделями и методами, основанными на теории управления;

- инструментальными методами проведения структурного анализа сложного экономического процесса;

- способностью моделирования материальных, денежных и информационных процессов и потоков в рамках единой модели, в общем модельном времени;

- возможностью введения режима постоянного уточнения при получении

выходных данных и проведении экстремального эксперимента.

В настоящее время наиболее распространены следующие пакеты систем имитационного моделирования [5, 11, 55, 70, 71]:

- GPSS World (General Purpose Simulation System, компания «Minuteman Software», США);
- Process Charter-1.0.2 (компания «Scitor», Менло-Парк, Калифорния, США);
- Powersim-2.01 (компания «Modell Data» AS, Берген, Норвегия),
- Ithink-3.0.61 (компания «High Performance Systems», Ганновер, Нью-Хэмпшир, США);
- Extend+BPR-3.1 (компания «Imagine That!», Сан-Хосе, Калифорния, США);
- ReThink (фирма «Gensym», Кембридж, Массачусетс, США);
- Micro Saint (фирма «Calspan Advanced Technology Center», Colorado, США);
- Pilgrim (Россия).

В процессе диссертационного исследования имитационное моделирование проводилось с использованием пакетов GPSS World [9, 68, 93], Micro Saint [46], Pilgrim [34]. Выбор вышеперечисленных пакетов был обусловлен их функциональными характеристиками.

Система GPSS World, разработанная компанией Minuteman Software (США), – это мощная среда компьютерного моделирования общего назначения, разработанная для профессионалов в области моделирования. Это комплексный моделирующий инструмент, охватывающий области как дискретного, так и непрерывного компьютерного моделирования, обладающий высочайшим уровнем интерактивности и визуального представления информации.

Использование GPSS World дает возможность оценить эффект конструкторских решений в чрезвычайно сложных системах реального мира.

GPSS является объектно-ориентированным языком. Его возможности визуального представления информации позволяют наблюдать и фиксировать

внутренние механизмы функционирования моделей. Его интерактивность позволяет одновременно исследовать и управлять процессами моделирования. С помощью встроенных средств анализа данных можно легко вычислить доверительные интервалы и проводить дисперсионный анализ, автоматически создавать и выполнять сложные отсеивающие и оптимизирующие эксперименты.

Система GPSS World была разработана, чтобы полностью использовать возможности вычислительной системы. Использование механизма виртуальной памяти позволяет моделям реально достигать размера миллиарда байт. Вытесняющая многозадачность и многопоточность обеспечивают высокую скорость реакции на управляющие воздействия и дают возможность GPSS World одновременно выполнять множество задач.

Последняя версия GPSS World 4.3.2. (от 8 ноября 2001 года) включает в себя массу нововведений, позволяющих проводить более эффективные исследования и сделать работу с системой максимально простой и удобной для пользователя.

Функциональное назначение пакета Micro Saint - фундаментальное переосмысление и радикальное перепроектирование деловых процессов для достижения резких, скачкообразных улучшений в деятельности фирмы, т.е. в стоимости, качестве, сервисе и темпах развития. Пакет Micro Saint обладает большой мощностью, гибкостью, быстродействием.

Программное обеспечение Micro Saint - гибкий дискретно-имитационный пакет программ для имитационного моделирования всех типов процессов. Используя Micro Saint можно смоделировать любой процесс, который может быть представлен блок-схемой.

Пакет Pilgrim обладает широким спектром возможностей имитации временной, пространственной и финансовой динамики моделируемых объектов. С его помощью можно создавать дискретно-непрерывные модели. Разрабатываемые модели имеют свойство коллективного управления процессом моделирования. В текст модели можно вставлять любые блоки с

помощью стандартного языка C++ [50]. Различные версии этой системы работают на IBM-совместимых и DEC-совместимых компьютерах, оснащенных Unix или Windows. Пакет Pilgrim обладает свойством мобильности, т.е. переноса на любую другую платформу при наличии компилятора C++. Модели в системе Pilgrim компилируются и поэтому имеют высокое быстродействие, что очень важно для отработки управленческих решений и адаптивного выбора вариантов в сверхускоренном масштабе времени. Полученный после компиляции объектный код можно встраивать в разрабатываемые программные комплексы или передавать (продавать) заказчику, так как при эксплуатации моделей инструментальные средства пакета Pilgrim не используются. Система имеет сравнительно невысокую стоимость.

Использование имитационных моделей рынка труда открывает новые возможности по концептуальному анализу проблем функционирования рынка труда, сокращению сроков разработки перспективных проектов биржи труда, организации ее эффективной работы.

1.3. Особенности процесса самоорганизации рынка труда

Самоорганизация является сверхкритическим явлением процесса (системы) [53]. Многие экономические процессы обладают свойствами самоорганизации, а экономические объекты являются примерами сложных самоорганизующихся систем. Функционирование таких объектов обусловлено тем, что они обладают определенной устойчивостью и приспособляемостью к внешним условиям. Знание основных закономерностей самоорганизации позволяет перейти к целенаправленному конструированию искусственных активных сред, процессы самоорганизации в которых приводили бы к образованию нужных структур (стационарных или меняющихся со временем).

Например, если на рынке труда будет повышен спрос на квалифицированный труд, появится стремление к росту квалификации, образования, что приведет к появлению новых образовательных услуг,

качественно новых форм повышения квалификации. Развитие фирмы, появление сети филиалов может привести к новым организационным формам, в частности, к компьютеризованному офису, более того, - к высшей стадии развития автоматизированного офиса - виртуальному офису или же виртуальной корпорации.

В [43] свойство самоорганизации «сводится к умению того или иного объекта менять поведение или структуру в зависимости от окружающей обстановки в направлении, отвечающем интересам этого объекта». В [75] отмечается, что возникновение структуры есть следствие самоорганизации. Поведение системы упорядоченно и периодически в определенном диапазоне значений ее параметра, т.е. она со временем воспроизводится [75].

Процесс самоорганизации в [29] определяется как «процесс перехода от неупорядоченности к порядку».

В формализованном представлении свойство самоорганизации в [43] описано следующим образом. Пусть имеется некоторая система А, которая может быть представлена в форме модели сложной системы с дополнительными управляющими входами $G = g_1, g_2, \dots, g_p$ (рис. 1.1). Имеется также система Б, модель которой вырабатывает значения поступающих сигналов g_1, g_2, \dots, g_p в зависимости от значения показателя качества управления системой W , т. е. $G = \Psi(W, \lambda)$,

где G – множество управляющих входных сигналов, способных корректировать значение результатов управления W в зависимости от набора заданных правил λ ;

Ψ – функционал, увязывающий заданную зависимость между W и λ .

Наборы правил λ и взаимосвязь их с качеством управления W , формирующие управляющий входной сигнал G , задаются экспертами.

Управляющий сигнал G корректирует значение показателя качества управления системы $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ в желаемом направлении. При этом корректировка качества управления может быть связана и с изменением структуры данной системы, т. е. всей совокупности ее атрибутов.

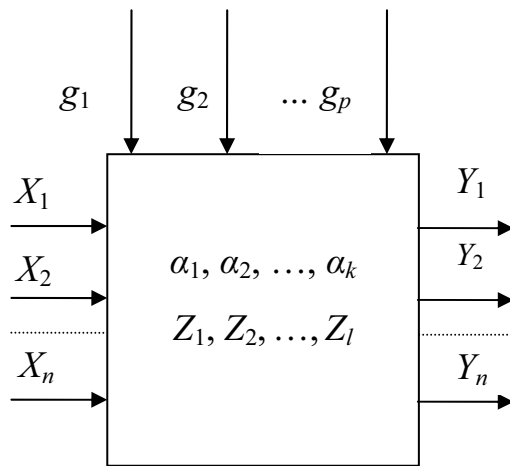


Рисунок 1.1 - Модель системы с корректируемыми целями

На рис. 1.2 представлена модель объекта в виде модели сложной системы, обладающей свойством самоорганизации.

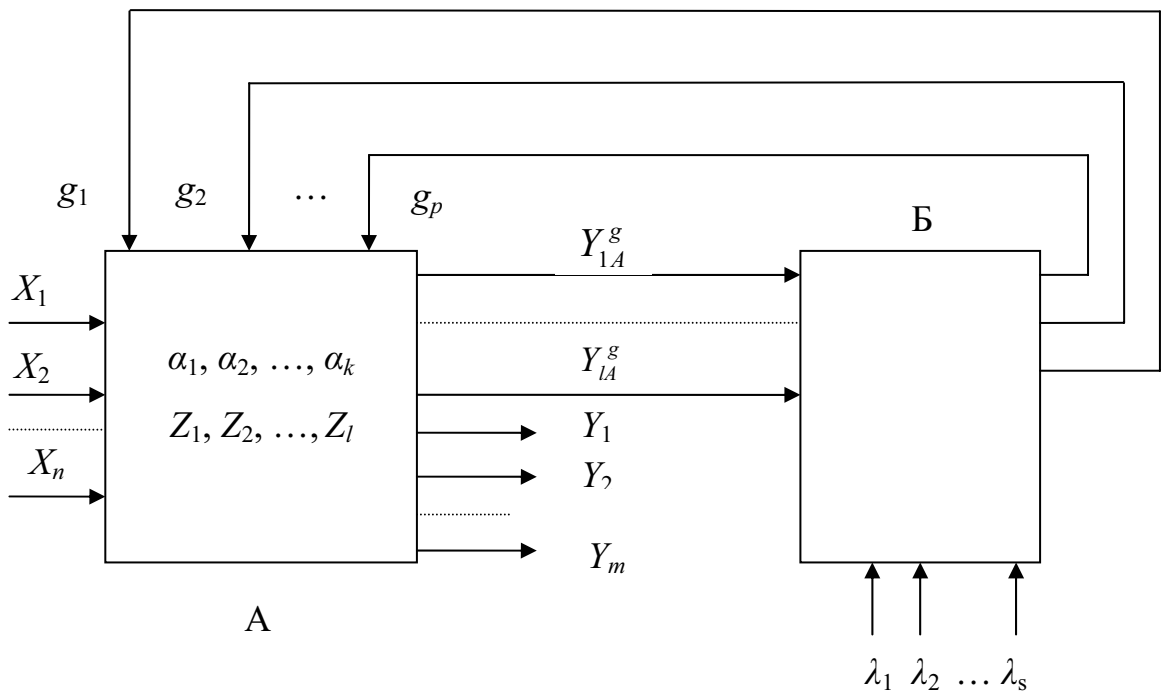


Рисунок 1.2 - Модель самоорганизующегося объекта

Моделирование самоорганизующихся систем не представляет особых теоретических проблем, если применяется имитационная модель, позволяющая ввести любой набор правил $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$, корректирующих качество управления W . Входы, выходы и состояние этой модели (соответственно X, Y и Z) работают в имитационной модели в обычном режиме и описывают объект или процесс.

Выходы системы с индексом «g», т. е. Y^g , отображают параметры качества управления W . Они поступают в систему Б, где анализируются в соответствии с имеющимся набором правил $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$ и формируют управляющие сигналы G .

Рынок труда представляет собой гомеостатическую систему, для которой характер поддерживает свое состояние в заданных границах [43].

1.4. Анализ модели самоорганизации рынка труда отдельной отрасли

Теоретическое исследование различных экономических систем, основанное на использовании идей теории самоорганизации (синергетики), является принципиально новым подходом в экономике.

Основным положением такого подхода А.Н. Васильев [12] считает достаточно общие представления о саморегуляции сложных систем, а в качестве базового математического аппарата берет нелинейные дифференциальные уравнения. В [12] предложена модель самоорганизации рынка рабочей силы отдельной отрасли, позволяющую проанализировать эффективность принятия тех или иных управленческих решений и спрогнозировать вероятность развития событий на рынке.

А.Н. Васильев [12] считает, что за данный период число работающих изменится на величину

$$dN_1(t) = (N_2(t)W_1(t) - N_1(t)W_2(t))dt, \quad (1.1)$$

где $N_1(t)$ – общее число специалистов, занятых в отрасли на данный момент; $N_2(t)$ – число потенциальных рабочих, которые могут быть привлечены для работы в рассматриваемой отрасли и которые на данный момент являются безработными; $N^l = N_1(t) + N_2(t) = const$ – емкость рынка рабочей силы отрасли; $W_1(t)dt$ – вероятность того, что безработный специалист может найти работу по специальности за период времени с t до $t + dt$; $W_2(t)dt$ – вероятность увольнения работающего специалиста за период с t до $t + dt$.

¹ Емкость рынка – показатель, определяющий количество необходимых работников или величину необходимой трудоемкости в определенный период времени для данных отраслей экономики.

Автор исходит из предположения, что в отрасли есть возможности для предоставления рабочих мест всем потенциальным рабочим. С экономической точки зрения данное предположение вполне приемлемо. Так как отрасль выходит на оптимальные показатели, когда количество занятых равно N , то $N_1(t)$ определяет степень «загруженности» отрасли, а $N_2(t)$ – число свободных рабочих мест. Вероятности $W_1(t)$ и $W_2(t)$, при других неизменных условиях, зависят от времени, так как во времени меняются величины $N_1(t)$ и $N_2(t)$, т. е. $W_1(t) = W_1(N_1(t), N_2(t))$ и $W_2(t) = W_2(N_1(t), N_2(t))$. Вероятность найти работу в первую очередь зависит от наличия рабочих мест, значит $W_1(t) = W_1(N_2(t))$. Функции $W_1(N_2)$ и $W_2(N_1, N_2)$ можно разложить в ряд по соответствующим аргументам, т. е. $W_1 \approx k_1 N_2(t) = k_1(N - N_1(t))$ и $W_2 \approx k_2 N_1(t) + k_3 N_2(t) = k_2 N_1(t) + k_3(N - N_1(t))$, где k_i ($i = 1, 2, 3$) – коэффициенты, которые явно не зависят от времени t . Уравнение (1.1) может быть записано следующим образом:

$$\frac{dN_1(t)}{dt} = k_1(N - N_1(t))^2 - k_2 N^2(t) - k_3(N - N_1(t))N_1(t). \quad (1.2)$$

Разделив уравнение (1.2) на N , обозначив $x(t) = N_1(t)/N$ и введя новые коэффициенты $v_i = k_i N$, $i = 1, 2, 3$, уравнение (1.2) примет вид:

$$\frac{dx(t)}{dt} = (v_1 + v_3 - v_2)x^2(t) - (2v_1 + v_3)x(t) + v_1. \quad (1.3)$$

Для нахождения стационарных точек уравнения (1.3) автор полагает

$$\frac{dx(t)}{dt} = 0. \text{ Решениями полученного уравнения будут } x_1 = \frac{2v_1 + v_3 - \sqrt{v_3^2 + 4v_1v_2}}{2(v_1 + v_3 - v_2)}$$

и $x_2 = \frac{2v_1 + v_3 + \sqrt{v_3^2 + 4v_1v_2}}{2(v_1 + v_3 - v_2)}$ - стационарные точки. Точное решение уравнения

(1.3) выражено через стационарные решения:

$$x(t) = x_2 + \frac{x_2 - x_1}{\frac{x_1 - x_0}{x_2 - x_0} \exp(-\alpha t) - 1}, \quad (1.4)$$

где $\alpha = \sqrt{v_3^2 + 4v_1v_2}$, а x_0 – уровень занятости в начальный момент времени.

Автор исследует полученные стационарные решения на устойчивость.

Для этого рассматривает возмущение $\delta x(t)$ – незначительное отклонение от стационарного состояния. Из (1.3) следует:

$$\frac{d\delta x(t)}{dt} = (2(v_1 + v_3 - v_2)x_c - 2v_1 - v_3)\delta x(t), \quad (1.5)$$

где x_c – стационарная точка. Решением (1.5) являются $\delta x(t) = \text{const}e^{\alpha t}$ при $\alpha = 2(v_1 + v_3 - v_2)x_c - 2v_1 - v_3$.

Если $x_c = x_1$, то $\alpha = 2(v_1 + v_3 - v_2)x_1 - 2v_1 - v_3 = -\sqrt{v_3^2 + 4v_1v_2} < 0$ – решение устойчивое.

В случае $x_c = x_2$, то $\alpha = 2(v_1 + v_3 - v_2)x_2 - 2v_1 - v_3 = \sqrt{v_3^2 + 4v_1v_2} > 0$ – решение неустойчивое.

Следовательно, из двух стационарных решений устойчивым является только одно. Устойчивое стационарное решение $x_1 < 1$, а неустойчивое стационарное решение $x_2 > 1$. С экономической точки зрения это означает, что в состоянии с уровнем занятости при небольших отклонениях от этого уровня занятости система с течением времени снова возвратится к начальному состоянию. Отсюда следует, что уровень занятости x_1 является равновесным состоянием системы. В отличие от состояния равновесия, состояние с уровнем занятости x_2 неравновесное, поскольку даже небольшое отклонение от этого уровня приведет к переходу системы в другое стационарное состояние, т. е. в состояние x_1 . Данный результат полностью подтверждается и экономическими соображениями, так как решение x_2 отвечает режиму функционирования отрасли с использованием дополнительных рабочих ресурсов.

На основании проведенных рассуждений А.Н. Васильев [12] делает следующие выводы:

- несмотря на то, что предложенная им модель является достаточно упрощенной, она дает возможность проследить определенные тенденции функционирования рынка рабочей силы,
- использование синергетических представлений о характере протекания процессов саморегулирования рынка труда позволяет установить

особенности эволюции системы и исследовать рынок на предмет его устойчивости,

- равновесное состояние системы может и не соответствовать условиям оптимального функционирования. Наличие второго неустойчивого состояния может приводить к достаточно сложным переходным процессам и существенно влиять на динамику уровня занятости,

- входящие в рассмотренную модель феноменологические параметры открывают возможности для исследования влияния на макроэкономические процессы ряда субъективных факторов, что в свою очередь позволяет расширить исследовательскую базу и способствует синтезу взглядов различных экономических школ и теорий.

Рисунок 1.3 иллюстрирует динамику занятости с течением времени [12].

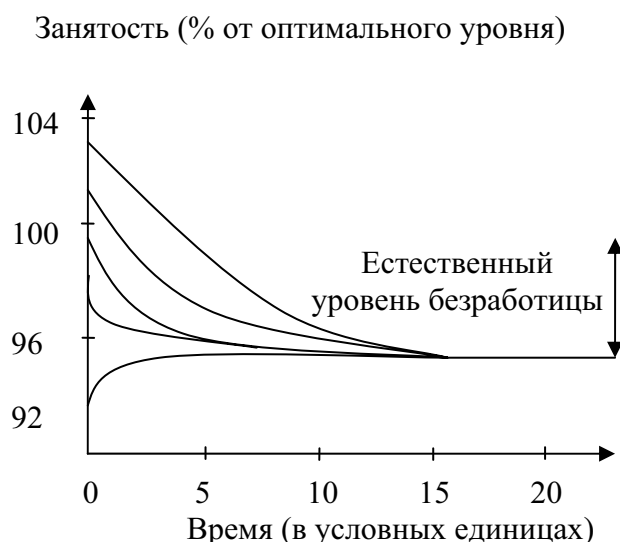


Рисунок 1.3 - Динамика уровня занятости в зависимости от начального состояния системы (при $t=0$)

Находясь в окрестности неустойчивой точки, система в какой то момент времени перейдет в устойчивое состояние. И хотя время и темпы такого перехода зависят от начального состояния рынка труда, конечный результат остается неизменным. Величину $n=(1-\lambda_1)100\%$ при этом можно интерпретировать как естественный уровень безработицы [74].

Экономика является сложной структурой, состоящей из многих отраслей.

Задача данной работы – обобщить начатое в этом направлении исследование [12] по аналитическому моделированию рынка труда, построить математическую модель самоорганизации рынка труда для нескольких отраслей экономики. Эти обобщения приведены в главе 2.

Исследования в этой области велись по следующим направлениям:

- 1) разработка аналитической модели самоорганизации рынка труда для многоотраслевой экономики,
- 2) исследование на устойчивость построенной аналитической модели многоотраслевой экономики (глава 2),
- 3) разработка вероятностной модели рынка труда с помощью методов теории массового обслуживания, позволяющей определять основные характеристики его функционирования (глава 3),
- 4) разработка имитационной модели биржи труда как основной части функционально-организационной структуры рынка труда (глава 3).

Приведем теоретические сведения, которые нам потребуются для проводимых исследований.

1.5. Некоторые результаты исследования устойчивости линейных стационарных систем

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \quad x \in R_n. \quad (1.6)$$

Предположим сначала, что матрица A имеет только простые собственные значения λ_i и собственные векторы h_i , т.е. $Ah_i = \lambda_i h_i$ ($i=1, \dots, n$) [6]. Общее решение уравнения (1.6) имеет вид

$$x(t) = \sum_{i=1}^n C_i h_i e^{\lambda_i t},$$

где C_i – произвольные постоянные.

Приведем матрицу A к жордановой форме для построения общего решения уравнения (1.6) при наличии кратных собственных значений.

Существуют различные способы приведения квадратной матрицы A размерности n к жордановой форме. Приведем способ [20], который можно представить следующим алгоритмом:

1. Для каждого k ($k=0, \dots, n$) находят наибольший общий делитель $D_k(\lambda)$ всех миноров k характеристической матрицы $\lambda I - A$. Старшие коэффициенты у всех полиномов $D_k(\lambda)$ берут равными единице. При этом

$$D_n(\lambda) = \det(\lambda I - A), D_0(\lambda) = 0.$$

2. Находят инвариантные многочлены $L_k(\lambda)$ по формулам

$$L_1(\lambda) = \frac{D_n(\lambda)}{D_{n-1}(\lambda)}, L_2(\lambda) = \frac{D_{n-1}(\lambda)}{D_{n-2}(\lambda)}, \dots, L_n(\lambda) = \frac{D_1(\lambda)}{D_0(\lambda)} = D_1(\lambda).$$

3. Каждый инвариантный многочлен раскладывают на элементарные делители характеристической матрицы $\lambda I - A$ или просто матрицы A . Элементарный делитель представляют в виде степени одной из разностей $(\lambda - \lambda_j)$, где λ_j – собственные значения матрицы A . Значит, $L_k(\lambda)$ имеет вид

$$L_k(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{k_1} (\lambda - \lambda_2)^{k_2} \dots (\lambda - \lambda_j)^{k_j}.$$

Произведение всех элементарных делителей равно произведению всех инвариантных множителей и равно $D_n(\lambda)$.

4. Каждому элементарному делителю $(\lambda - \lambda_j)^{k_j}$ сопоставляют клеточку Жордана порядка k_j с числом λ_j на главной диагонали. Клеточно-диагональная матрица – жорданова форма матрицы A . Жорданова форма матрицы единственна с точностью до порядка расположения ее клеток Жордана на главной диагонали.

Рассмотрим общее решение уравнения (1.6) в случае кратных корней. Пусть λ_i – r -кратное собственное значение матрицы A . Ему соответствует некоторое количество собственных векторов. Степень вырождения собственного значения λ_i равна максимальному числу $m(i)$, которое в свою очередь равно также числу клеток Жордана, соответствующих λ_i . Обозначив

через B_j одну из этих клеток, и учитывая, что размерность клетки Жордана B_j есть $s(j)$, будем иметь

$$s(1) + s(2) + \dots + s(m(i)) = r.$$

Каждой клетке Жордана B_j соответствует серия векторов $h_l, l=1, \dots, s(j)$ таких, что

$$h_l \neq 0, Ah_l = \lambda_i h_l, Ah_2 = \lambda_i h_2 + h_1, \dots, Ah_{s(j)} = \lambda_i h_{s(j)} + h_{s(j)-1}.$$

Векторы h_l , где $l=1, \dots, s(j)$, каждой серии линейно независимы между собой. Подпространство, натянутое на все векторы h_l , соответствующие клетке B_j , является инвариантным, циклическим и имеет размерность, равную размерности серии, т. е. равную $s(j)$. В базисе, составленном из векторов всех серий, матрица A имеет жорданову форму.

Решениями уравнения (1.6) являются функции вида

$$x_{iq}(t) = \omega_q(t) e^{\lambda_i t},$$

$$\omega_q(t) = \frac{t^{q-1}}{(q-1)!} h_1 + \frac{t^{q-2}}{(q-2)!} h_2 + \dots + h_q, q=1, \dots, s(j), \quad (1.7)$$

$$s(1) + s(2) + \dots + s(m(i)) = r, r_1 + r_2 + \dots + r_k = n.$$

При этом количество линейно независимых решений вида (1.7) равно n . Общее решение уравнения (1.6) есть линейная комбинация из частных решений вида (1.7).

Теорема 1.1. [6] Для устойчивости тривиального решения уравнения (1.6) необходимо и достаточно, чтобы все собственные значения λ_i матрицы A удовлетворяли условию $Re \lambda_i \leq 0$, причем собственные значения λ_j такие, что $Re \lambda_j = 0$, имеют простые элементарные делители (т. е. в формуле (1.7) все $s(j)=1$). Для асимптотической устойчивости уравнения (1.6) необходимо и достаточно, чтобы $Re \lambda_i < 0$.

Следовательно, устойчивость (асимптотическая устойчивость или неустойчивость) уравнения (1.6) определяется расположением относительно мнимой оси корней характеристического уравнения матрицы A :

$$\det(\lambda I - A) = 0, \quad (1.8)$$

где I – единичная матрица ($n \times n$) матрица. Раскрывая определитель, уравнение (1.8) примет вид

$$P_n(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + \dots + a_n\lambda^n = 0, a_n = 1. \quad (1.9)$$

Многочлен $P_n(\lambda)$ является устойчивым многочленом (многочленом Гурвица), если все его корни λ_j имеют отрицательную вещественную часть, т. е.

$$Re\lambda_j < 0. \quad (1.10)$$

Если выполняется условие (1.10), то матрицу A называют устойчивой.

Теорема 1.2 (А. Стодола) [6]. Все коэффициенты устойчивого многочлена положительны.

Положительность коэффициентов есть необходимое, но не достаточное условие для выполнения неравенств (1.10).

Матрицей Гурвица M_{P_n} многочлена (1.9) называют матрицу вида

$$M_{P_n} = \begin{pmatrix} a_1 & a_0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{2n-1} & a_{2n-2} & \dots & a_n \end{pmatrix}. \quad (1.11)$$

В матрице (1.11) все $a_s=0$ при $s<0$ и $s>n$.

Критерий Рауса-Гурвица (необходимый и достаточный признак устойчивости) [6]. Для того чтобы многочлен $P_n(\lambda)$ с $a_j>0$ и $a_n\neq 0$ был устойчивым, необходимо и достаточно, чтобы были положительны все главные диагональные миноры

$$\Delta_1 = a_1, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix}, \dots, \Delta_n = a_n \Delta_{n-1} \quad (1.12)$$

его матрицы Гурвица M_{P_n} .

Критерий Льенара-Шипара [6]. Для того чтобы многочлен с положительными коэффициентами был устойчивым, необходимо и достаточно выполнение одного из двух условий: а) $\Delta_1>0, \Delta_3>0, \dots$, б) $\Delta_2>0, \Delta_4>0, \dots$

Если степень полинома $P_n(\lambda)$ сравнительно большая, то применение

критерия Гурвица становится затруднительным. В этом случае для определения расположения корней полинома $P_n(\lambda)$ на комплексной плоскости иногда оказывается более удобным использование частотного критерия Михайлова.

Определение 1.1. Пусть $P_n(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + \dots + a_n\lambda^n$, где $a_0 > 0$, $a_n \neq 0$, $a_i \in \mathbf{R}$, $\lambda = i\omega$ ($i^2 = -1$), $\lambda \in C$. Кривая $w = P_n(i\omega)$, $\omega \geq 0$, называется годографом Михайлова функции $P_n(\lambda)$.

Критерий Михайлова [6]. Для того чтобы полином $P_n(\lambda)$, не имеющий чисто мнимых корней, являлся полиномом Гурвица, необходимо и достаточно, чтобы угол поворота в положительном направлении вектора $P_n(i\omega)$ при $0 \leq \omega < \infty$ был бы равен $\frac{\pi}{2}n$.

Замечание. Если полином $P_n(\lambda)$ есть полином Гурвица степени n , то вектор $f(i\omega)$ монотонно поворачивается в положительном направлении на угол $\frac{\pi}{2}n$, то есть годограф Михайлова, выходя из точки a_0 положительной полуоси $\text{Re } \lambda > 0$, последовательно пересекает полуоси $\text{Im } \lambda > 0$, $\text{Re } \lambda < 0$, $\text{Im } \lambda < 0$, ..., проходя n квадрантов.

Исследование на устойчивость многочлена $P_n(\lambda)$ можно проводить, используя пакеты прикладных программ. Использование пакетов прикладных программ позволяет избежать трудоемких вычислений для определения устойчивости многочлена $P_n(\lambda)$ ($a_j > 0$, $a_n \neq 0$) любой степени.

1.6. Некоторые необходимые сведения из теории массового обслуживания

1.6.1. Уравнения Колмогорова для вероятностей состояний

Обозначим через S_k^t случайное событие, состоящее в том, что в момент времени $t \in T = [a, b]$ система S находится в состоянии S_k ; $p_k(t) \triangleq P[S_k^t]$, $t \in T$ - вероятность реализации этого события, где поведение системы S с множеством

возможных состояний $\{S_k\}_{k=1}^n$ представляет собой марковский процесс с дискретными состояниями, тогда вектор вероятностей состояний

$$P(t) = (p_1(t)p_2(t) \dots p_n(t))^T$$

определяет вероятности состояний системы S в момент времени $t \in T$. Так как в любой фиксированный момент времени t совокупность случайных событий $\{S_k^t\}_{k=1}^n$ - полная группа, то

$$Ip(t) = \sum_{k=1}^n p_k(t) = 1, t \in T, \quad (1.13)$$

где $I = (1 \dots 1) \in M_{1n}(R)$.

Определение 1.2. [19] Пусть S – некоторая система с возможным дискретными состояниями $\{S_k\}_{k=1}^n$. Под плотностью вероятности перехода этой системы из состояния S_i в состояние S_j в момент времени t понимают число

$$\lambda_{ij}(t) \triangleq \lim_{\Delta t \rightarrow +0} \frac{P_{ij}(t; \Delta t)}{\Delta t},$$

где $P_{ij}(t; \Delta t)$ – вероятность того, что система S , находящаяся в момент времени t в состоянии S_i , за время $\Delta t > 0$ перейдет в состояние S_j .

Плотности вероятностей перехода системы из одного возможного состояния в другое обладают обычными свойствами условных вероятностей и, в частности, являются неотрицательными.

Определение 1.3. [19] Скалярный Марковский процесс с дискретными состояниями, описывающий поведение системы S , называют однородным, если для любых $i, j = \overline{1, n}$

$$\lambda_{ij}(t) \equiv \lambda_{ij} = const, \quad t \in T.$$

В противном случае называют неоднородным.

Теорема 1.3. [19] Пусть система S имеет множество возможных состояний $\{S_k\}_{k=1}^n$, а процесс изменения состояний этой системы представляет собой Марковский процесс, причем для всех пар возможных состояний S_i и S_j определены плотности вероятностей переходов $\lambda_{ij}(t)$ и $\lambda_{ji}(t)$. Тогда вероятности состояний системы $P_k(t)$ удовлетворяют системе уравнений Колмогорова:

$$\frac{dp_k(t)}{dt} = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n \lambda_{ik}(t)p_i(t) - \left(\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n \lambda_{ki}(t) \right) p_k(t), \quad k = \overline{1, n}, \quad t \in T. \quad (1.14)$$

Система уравнений Колмогорова (1.14) не является линейно независимой, т. е. она является избыточной, что следует из равенства (1.13).

Компоненты $p_k(t)$ вектора вероятностей состояний системы S не могут быть отрицательными, т. е.

$$p_k(t) \geq 0, \quad k = \overline{1, n}, \quad t \in T = [a, b]. \quad (1.15)$$

Условия (1.15) накладывают вполне определенные ограничения на плотности вероятностей переходов системы S из одного состояния в другое. Эти ограничения имеют важное значение при изучении так называемых предельных режимов однородных Марковских случайных процессов с дискретными состояниями, играющих существенную роль в различных приложениях.

Определение 1.4. [19] Пусть $\{S_k\}_{k=1}^n$ - множество возможных состояний системы S , а процесс ее перехода из одного возможного состояния в другое представляет собой однородный марковский процесс с дискретными состояниями, определенный на множестве $T = [a, \infty)$. Если $p(t) = (p_1(t) \dots p_n(t))^T$ - вектор вероятностей состояния системы S в момент времени $t \in T$ и существует предел $\lim_{t \rightarrow \infty} p(t)$, то вектор p называют вектором предельных вероятностей состояния системы.

Существование вектора предельных вероятностей состояний означает, что с течением времени в системе S наступает некоторый стационарный режим. Он состоит в том, что система случайным образом меняет свои состояния, но вероятность каждого из них уже не зависит от времени. Каждое из состояний реализуется с некоторой постоянной вероятностью, интерпретация которой может быть связана со средним относительным временем пребывания системы S в данном состоянии.

Вектор p предельных вероятностей состояний системы S представляет собой асимптотически устойчивую точку покоя для нормальной однородной

системы обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами $p'(t) = \lambda p(t)$, имеющую неотрицательные координаты расположенную на гиперплоскости $p_1 + \dots + p_n = 1$. Следовательно, вектор p удовлетворяет матричной системе [19]

$$\begin{cases} \lambda p = 0, \\ Ip = 1. \end{cases} \quad (1.16)$$

Пусть $\{S_i\}_{i=0}^n$ - множество состояний системы обслуживания. Обозначим $a_i (i = \overline{0, n})$ - случайное событие, заключающееся в том, что в момент времени $t \geq 0$ система находится в состоянии S_i , $P_i(t)$ - вероятность его реализации, $\{a_i\}_{i=1}^n$ - полная группа событий, так как система в любой момент времени может находиться лишь в одном из возможных состояний, следовательно [19],

$$\sum_{i=0}^n p_i(t) \equiv 1. \quad (1.17)$$

В начале после включения системы в работу, протекающий в ней процесс еще не будет стационарным, спустя некоторое время система перейдет в стационарный режим. В стационарном режиме функционирования изучаемая система также меняет свое состояние случайным образом, но вероятности состояний уже не зависят от текущего времени. Каждая из них, являясь постоянной величиной, характеризует относительное время пребывания системы в данном состоянии. Математическая модель стационарного режима функционирования любой системы обслуживания, в предположении его существования, формально является предельным ($t \rightarrow \infty$) случаем ее общей математической модели.

1.6.2. Простейший поток требований

Определение 1.5. [24] Потоком однородных событий называется конечная или счетная последовательность $\{\tau_n\}$ случайных величин, определенных на одном и том же вероятностном пространстве, при условии, что в любой

фиксированный интервал времени (a, b) с вероятностью 1 попадает конечное число этих величин.

Если данное t совпадает с r элементами последовательности $\{\tau_n\}$, то в момент t происходит r событий потока. Если τ_n упорядочены так, что $\tau_n < a \leq \tau_{n+1} \leq \tau_{n+2} \leq \dots \leq \tau_{n+k} < b \leq \tau_{n+k+1}$, то τ_{n+i} называется моментом наступления i -го события потока однородных событий в полуинтервале $[a, b)$.

Поток однородных событий, удовлетворяющих условиям стационарности, отсутствия последействия и ординарности потока однородных событий называется простейшим потоком.

Стационарность потока означает, что для любой группы из конечного числа непересекающихся отрезков времени вероятность появления в них соответственно k_1, k_2, \dots, k_n требований зависит только от этих чисел и от длин указанных промежутков времени, но не зависит от их расположения на оси времени, т. е. среднее число требований в единицу времени постоянно.

Отсутствие последействия состоит в том, что вероятность поступления в течение промежутка времени $(T, T + t)$ не зависит от того, сколько требований и как поступали до этого промежутка. Таким образом, это предложение означает, что условная вероятность поступления k требований за промежуток $(T, T + t)$, вычисленная при произвольном предложении о поступлениях требований до этого промежутка времени, совпадает с безусловной вероятностью того же события, т. е. число требований, поступающих в некоторый промежуток времени, не зависит от того, сколько требований уже поступило в систему.

Ординарность потока требований выражает собой условие практической невозможности появления двух или нескольких требований в один и тот же момент времени. Условие ординарности потока состоит в том, что при $h \rightarrow 0$

$$\frac{P_{>1}(h)}{h} \rightarrow 0,$$

или,

$$P_{>1}(h) = o(h), \quad (1.18)$$

где $P_{>1}(h)$ вероятность появления в промежутке длины h двух или более

требований.

Простейший случай потоков, когда вероятность поступления в промежуток времени t ровно k требований задается формулой

$$P_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}, \quad (1.19)$$

где $\lambda > 0$ – постоянное число. При этом поступающий поток считается таким, что для любой конечной группы непересекающихся отрезков времени числа появившихся на их протяжении требований представляют собой взаимно независимые случайные величины.

Так как параметр λ представляет собой среднее число заявок, поступающих в единицу времени, поэтому его называют интенсивностью, или плотностью простейшего потока.

Непосредственная проверка наличия трех перечисленных условий – стационарности, отсутствия последствия и ординарности – нередко трудно выполнима, поэтому очень важно найти иные условия, которые позволили бы из иных оснований делать вывод о том, что поток событий окажется простейшим или близким к простейшему.

Теорема, доказанная в общей форме одним из создателей современной теории вероятностей А. Я. Хинчиным [26], представляет принципиальное значение для приложений. Из предположения, что данный поток является суммой очень большого числа независимых между собой стационарных потоков, каждый из которых лишь мало влияет на сумму, следует, что суммированный поток при дополнительном ограничении арифметического характера, гарантирующем ординарность суммарного потока, оказывается близким к простейшему.

Название «простейший» связано с тем, что математическое описание событий, связанных с простейшими потоками, оказывается наиболее простым. Самый простой, на первый взгляд, регулярный поток со строго постоянными интервалами между событиями отнюдь не является «простейшим» в вышеназванном смысле слова: он обладает ярко выраженным последствием,

так как моменты появления событий связаны между собой жесткой функциональной зависимостью.

Простейший поток в теории массового обслуживания играет такую же роль, как нормальный закон распределения случайных величин в теории вероятностей: при сложении нескольких независимых, ординарных, стационарных случайных потоков образуется суммарный поток, приближающийся по своим свойствам к простейшему [59].

Поток требований от безработных на биржу труда можно рассматривать как простейший, т. к. имеет место стационарность процесса, существует также отсутствие последействия, когда количество требований поступивших в конце месяца не зависит от их удовлетворения в начале месяца. Наблюдается и явление однородности.

Пусть $P_k(t)$ вероятность того, что в течение промежутка времени длительности t к обслуживанию будут предъявлены k требований. В силу стационарности потока эта вероятность не зависит ни от выбора начала отсчета, ни от всей его предыстории. Условия, определяющие простейший поток, позволяют однозначно, с точностью до одного параметра, найти формулы для вероятностей $P_k(t)$.

Формула полной вероятности учитывая, что в течение промежутка времени $t + h$ поступит ровно k требований при учете отсутствия последствий имеет вид:

$$P_k(t + h) = \sum_{j=0}^k P_j(t)P_{k-j}(h).$$

Согласно условию ординарности потока, получим равенство

$$P_k(t + h) = P_k(t)P_0(h) + P_{k-1}(t)P_1(h) + 0(h). \quad (1.20)$$

В равенстве (1.20) заменим $P_1(h)$ на $\lambda h + 0(h)$ согласно (1.17).

Если предел правой части существует, то существует и предел левой части последнего равенства. Тогда при $h \rightarrow 0$, получим:

$$\frac{dP_k(t)}{dt} = -\lambda P_k(t) + \lambda P_{k-1}(t). \quad (1.21)$$

Уравнение (1.21) представляет собой бесконечную систему дифференциально-разностных уравнений.

Уравнение для определения $P_0(t)$ имеет вид:

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda P_0(t). \quad (1.22)$$

Уравнение (1.22) имеет решение

$$P_0(t) = Ce^{-\lambda t}. \quad (1.23)$$

Таким образом, вероятность $P_k(t)$ с произвольными индексами при любом $k \geq 0$ определяется по формуле (1.19).

Теорема 1.4. [19] Дискретная случайная величина τ_n , принимающая значения 0, 1, 2, ... и характеризующая при простейшем входном потоке число заявок, поступающих в систему обслуживания на временном интервале длительности t , распределена по закону Пуассона с параметром λt .

Следствие 1.1. [19] Если входной поток является простейшим, то среднее число заявок, поступающих в систему обслуживания на временном интервале длительности t , равно λt .

Следствие 1.2. [19] Если входной поток заявок является простейшим, то дисперсия скалярной случайной величины τ_n , характеризующая рассеивание числа заявок, поступающих в систему массового обслуживания на временном интервале длительности t , относительно их среднего значения, равно λt .

Для простейшего потока среднее число требований, поступающих за время t , равно

$$M\mu(t) = \sum_{k=1}^{\infty} kP_k(t) = e^{-\lambda t} \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{(\lambda t)^k}{k!} = \lambda t,$$

где $\mu(t)$ - истинное число требований, поступивших за промежуток времени t .

Математическое ожидание числа требований, поступающих за единицу времени, называется интенсивностью потока. Обозначим интенсивность буквой μ . Для простейшего потока

$$\mu = \lambda.$$

Таким образом, у случайной величины, распределенной по закону

Пуассона, математическое ожидание и дисперсия совпадают.

Теорема 1.5. [19] В случае простейшего входного потока с интенсивностью λ длительность $t(n)$ временного интервала между двумя последовательными заявками имеет экспоненциальное распределение с параметром λ .

Следствие 1.3. [19] В случае простейшего входного потока с интенсивностью λ длительность $t(n)$ временного интервала между двумя последовательно поступающими заявками является случайной величиной с плотностью распределения (вероятностей)

$$f_i(T) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda T}, & T > 0; \\ 0, & T \leq 0, \end{cases}$$

математическое ожидание и дисперсия которой определяются равенствами

$$M[t(n)] = \frac{1}{\lambda}, \quad (1.24)$$

$$M[t(n)] = \frac{1}{\lambda^2}. \quad (1.25)$$

1.6.3. Системы массового обслуживания

Под системой массового обслуживания (СМО) понимают динамическую систему, предназначенную для эффективного обслуживания потока требований на обслуживание при ограничениях на ресурсы системы.

В теории СМО обслуживаемый объект называют требованием. В общем случае под требованием обычно понимают запрос на удовлетворение некоторой потребности, например, требование от безработного. Средства, обслуживающие требования, называются обслуживающими устройствами или каналами обслуживания. Например, для биржи труда каналами обслуживания являются специалисты того или иного отдела биржи.

Основными элементами СМО являются: входящий поток требований, очередь требований, обслуживающие устройства (каналы) и выходящий поток требований (рис. 1.4).

Очереди требований и каналы обслуживания образуют обслуживающую систему.

Источники требований в систему не включаются. Возможны системы, в которых очереди отсутствуют.

Входящий поток характеризуется числом требований, поступающих в систему за единицу времени. Требования могут поступать равномерно и неравномерно. Примером входящего потока на рынке или бирже труда является поток требований от безработных.

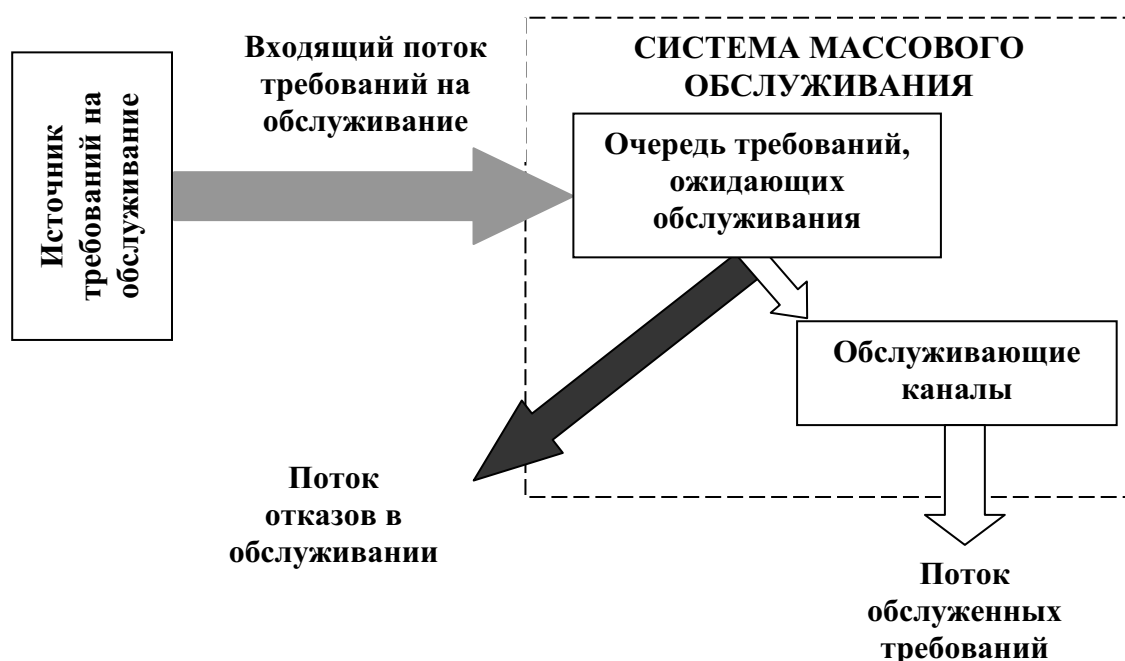


Рисунок 1.4 - Основные элементы системы массового обслуживания

В каждой системе обслуживания имеются обслуживающие элементы, их называют каналами обслуживания. Ими могут быть работники биржи труда, удовлетворяющие запрос на обслуживание, или технические устройства.

Выходящий поток - это поток требований, покидающих систему.

Распределение требований в выходящем потоке по времени зависит от плотности входящего потока и характеристик работы каналов обслуживания системы. В некоторых случаях выходящий поток служит входящим потоком для других каналов обслуживания. Так, например, на бирже труда требование

от безработного, пройдя обслуживание в отделе первичного приема, попадает в отдел вторичного приема для дальнейшего обслуживания.

Для объективной оценки качества работы систем обслуживания важно правильно выбрать показатели эффективности её работы. Основным показателем работы обслуживающей системы является её пропускная способность. Кроме того, работа систем часто характеризуется такими показателями, как средний процент отказов, среднее время простоя каналов, средняя длина очереди, среднее время ожидания в очереди и т. д.

Каждой из систем массового обслуживания свойственна определённая организация. В соответствие с этой организацией определяется и характер задач массового обслуживания.

Число требований, поступающих в единицу времени, рассматривается как случайная величина. Её полной характеристикой служит закон распределения. Статистические исследования многократно повторяющихся процессов позволяют установить определённые закономерности наблюдаемых явлений, в частности, выявить закон распределения случайных величин [27, 92]. Законы распределения случайной положительной величины определяются в зависимости от коэффициента вариации [7].

В частности, поступление требований от безработных на бирже труда подчинено экспоненциальному закону, а обслуживание требований от безработных специалистами отделов биржи труда распределено равномерно. Равномерным является распределение вероятностей непрерывной случайной величины X , которому принадлежат все возможные значения X на интервале (a, b) , а плотность сохраняет постоянное значение, т. е. $f(x) = \frac{1}{b-a}$; вне этого интервала $f(x)=0$ [23].

Одной из важнейших характеристик обслуживающих устройств, которая определяет пропускную способность всей системы, является время обслуживания [45].

Время обслуживания (время пребывания одного требования в канале

обслуживания) является случайной величиной, распределенной по экспоненциальному закону с плотностью распределения (вероятностей) [19]

$$g(t) = \begin{cases} \mu e^{-\mu t}, & t > 0; \\ 0, & t \leq 0. \end{cases} \quad (1.26)$$

Величину μ называют интенсивностью обслуживания.

Значение $G(t)$ функции распределения времени обслуживания

$$G(t) = \int_{-\infty}^t g(x) dx = \begin{cases} 1 - e^{-\mu t}, & t > 0; \\ 0, & t \leq 0, \end{cases} \quad (1.27)$$

равно вероятности того, что к моменту времени t обслуживание требования будет завершено (канал обслуживания освободится).

Время обслуживания одного требования - случайная величина, которая может изменяться в большом диапазоне. Она зависит как от стабильности работы самих обслуживающих устройств, так и от различных параметров, поступающих в систему, требований.

Время ожидания (время пребывания требования в очереди, если последняя существует) считают случайной величиной, распределенной по экспоненциальному закону с плотностью распределения (вероятностей) [19]

$$h(t) = \begin{cases} \nu e^{-\nu t}, & t > 0; \\ 0, & t \leq 0. \end{cases} \quad (1.28)$$

где ν - величина, обратная среднему времени ожидания.

Значение $H(t)$ функции распределения времени ожидания

$$H(t) = \int_{-\infty}^t h(x) dx = \begin{cases} 1 - e^{-\nu t}, & t > 0; \\ 0, & t \leq 0, \end{cases} \quad (1.29)$$

равно вероятности того, что в момент времени t начнется обслуживание требования.

При $\nu \rightarrow \infty$ система массового обслуживания с ожиданием превращается в чистую систему с отказами, а при $\nu \rightarrow 0$ система массового обслуживания с ожиданием представляет собой чистую систему с ожиданием.

В качестве характеристик эффективности функционирования СМО можно, выбрать три основные группы (обычно средних) показателей:

1. Показатели эффективности использования СМО

- Абсолютная пропускная способность СМО — среднее число требований, которые может обслужить СМО в единицу времени.
- Относительная пропускная способность СМО — отношение среднего числа требований, обслуживаемых СМО в единицу времени, к среднему числу поступивших требований за это же время.
- Средняя продолжительность периода занятости СМО.
- Коэффициент использования СМО — средняя доля времени, в течение которого СМО занята обслуживанием требований, и т.п.

2. Показатели качества обслуживания требований

- Среднее время ожидания требования в очереди.
- Среднее время пребывания требования в СМО.
- Вероятность отказа требованию в обслуживании без ожидания.
- Вероятность того, что поступившее требование немедленно будет принято к обслуживанию.
- Закон распределения времени ожидания требования в очереди.
- Закон распределения времени пребывания требования в СМО.
- Среднее число требований, находящихся в очереди.
- Среднее число требований, находящихся в СМО, и т.п.

3. Показатели эффективности функционирования пары «СМО - потребитель», где под потребителем понимают всю совокупность требований или некий их источник (например, средний доход, приносимый СМО в единицу времени, и т.п.)

Третья группа показателей оказывается полезной в тех случаях, когда некоторый доход, получаемый от обслуживания требований, и затраты на обслуживание измеряются в одних и тех же единицах. Эти показатели обычно носят вполне конкретный характер и определяются спецификой СМО, обслуживаемых требований и дисциплиной обслуживания.

Для решения задач теории массового обслуживания необходимо этот случайный процесс изучить, т. е. построить и проанализировать его

математическую модель.

СМО можно разделить на типы или классы по ряду признаков (рис. 1.5).



Рисунок 1.5 - Классификация систем массового обслуживания

В СМО с очередью требование, пришедшее в момент времени, когда все каналы обслуживания заняты, не уходит не обслуженной, а становится в очередь и ожидает возможности быть обслуженной. В практической деятельности наиболее распространены СМО с очередями. В частности, биржу труда можно рассматривать как СМО с очередью.

В зависимости от организации очереди - ограничена она или не ограничена - СМО с очередью подразделяются на разные виды. Ограничения могут быть по длине очереди или по времени ожидания.

СМО классифицируются также по дисциплине обслуживания – требования могут обслуживаться без приоритетов в порядке поступления, либо в случайном порядке. Часто встречается обслуживание с приоритетами, при котором порядок обслуживания требований зависит как от времени их

поступления, так и от их категории.

Приоритет может быть как абсолютным, так и относительным. При абсолютных приоритетах требований в случаях, когда для немедленного обслуживания поступившего требования высокого приоритета нет свободного обслуживающего канала происходит освобождение одного из каналов СМО, занятых обслуживанием требования более низкого приоритета, и этот канал предоставляется поступившему требованию с более высоким приоритетом. Прервавшееся обслуживание требования низкого приоритета после освобождения одного из обслуживающих каналов СМО может быть начато с начала или с того места, на котором прервалось ее обслуживание. Суть относительных приоритетов состоит в том, что поступившему требованию, у которого приоритет выше, чем у требований уже находящихся в очереди, предоставляется первое место в очереди перед требованиями более низкого приоритета и принудительного освобождения обслуживающего канала для немедленного обслуживания пришедшего требования высокой категории не делается. При относительных приоритетах обслуживание всякого требования после его начала всегда доводится до конца без прерывания.

Системы массового обслуживания можно классифицировать по логической структуре процесса обслуживания (число приборов, порядок приоритетов, возможность ожидания и т. п.), а также по аналитическим предпосылкам относительно входящего потока требований и распределения времени обслуживания. Общепринятой является классификация классических систем массового обслуживания, предложенная Д. Кендаллом [24].

1.7. Выводы

В данной главе:

1. Проведен анализ модели самоорганизации рынка труда для одной отрасли, в качестве базового математического аппарата которой выступают нелинейные дифференциальные уравнения.

2. Обоснована необходимость построения модели самоорганизации рынка труда для нескольких отраслей экономики, позволяющей оценить ситуацию на рынке труда на устойчивость, с помощью которой можно будет определить тенденции развития рынка рабочей силы.

3. Приведены необходимые теоретические сведения из теории моделирования, теории устойчивости, теории массового обслуживания.

ГЛАВА 2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ САМООРГАНИЗАЦИИ РЫНКА ТРУДА

2.1. Математическая модель самоорганизации рынка труда для нескольких отраслей экономики

Предложенная А.Н. Васильевым [12] модель самоорганизации рынка рабочей силы отдельной отрасли позволяет проанализировать эффективность принятия тех или иных управленческих решений и спрогнозировать вероятность развития событий на рынке для отдельной отрасли экономики. Входящие в данную модель феноменологические параметры открывают возможности для исследования влияния на макроэкономические процессы ряда субъективных факторов.

Обобщим результаты [12] на случай n различных отраслей экономики [38, 83, 84].

Обозначим $N_1^{(i)}(t)$ - общее число специалистов, занятых в i -ой отрасли экономики в момент времени t ; $N_2^{(i)}(t)$ - число потенциальных рабочих, которые могут быть привлечены для работы в i -ой отрасли и которые в момент времени t являются безработными; $\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^2 N_k^{(i)} = N = const$ - емкость рынка рабочей силы n отраслей; $W_1^{(i,j)}$ - вероятность того, что безработный специалист i -ой отрасли может найти работу по специальности в j -ой отрасли за период времени с t до $t + dt$; $W_2^{(i)}$ - вероятность увольнения работающего специалиста i -ой отрасли за период времени с t до $t + dt$; $i, j = 1, \dots, n$, $t \in [0; \infty)$.

Заметим, что в общем случае $\sum_{i=1}^n W_1^{(i,j)} \neq 1$, $i, j = 1, \dots, n$.

Предположим, что в начальный момент времени $t=0$ число специалистов, занятых в i -ой отрасли экономики, равно $N_{10}^{(i)}$, а число потенциальных рабочих,

которые могут быть привлечены для работы в j -ой отрасли и которые в момент времени t являются безработными равно $N_{20}^{(j)}$,

$$\text{т. е.} \quad N_1^{(i)}(0) = N_{10}^{(i)}, \quad N_2^{(j)}(0) = N_{20}^{(j)}, \quad i, j = 1, \dots, n. \quad (2.1)$$

В соответствии с введенными выше обозначениями получим систему дифференциальных уравнений с заданными начальными условиями (2.1), описывающую динамику перераспределения рабочей силы в n различных отраслях экономики:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dN_1^{(1)}(t)}{dt} = -N_1^{(1)}(t)W_2^{(1)} + \sum_{i=2}^n N_1^{(i)}(t)W_2^{(i)} - N_2^{(1)}(t)W_1^{(1,1)} + \sum_{i=2}^n N_2^{(i)}(t)W_1^{(i,1)}, \\ \frac{dN_1^{(2)}(t)}{dt} = N_1^{(1)}(t)W_2^{(1)} - N_1^{(2)}(t)W_2^{(2)} + \sum_{i=3}^n N_1^{(i)}(t)W_2^{(i)} + N_2^{(1)}(t)W_1^{(1,2)} - N_2^{(2)}(t)W_1^{(2,2)} + \sum_{i=3}^n N_2^{(i)}(t)W_1^{(i,2)}, \\ \dots, \\ \frac{dN_1^{(n)}(t)}{dt} = \sum_{i=1}^{n-1} N_1^{(i)}(t)W_2^{(i)} - N_1^{(n)}(t)W_2^{(n)} + \sum_{i=1}^{n-1} N_2^{(i)}(t)W_1^{(i,n)} - N_2^{(n)}(t)W_1^{(n,n)}, \\ \frac{dN_2^{(1)}(t)}{dt} = \sum_{i=1}^n N_1^{(i)}(t)W_2^{(i)} - N_2^{(1)}(t) \sum_{i=1}^n W_1^{(1,i)} + \sum_{i=2}^n N_2^{(i)}(t)W_1^{(i,1)}, \\ \frac{dN_2^{(2)}(t)}{dt} = \sum_{i=1}^n N_1^{(i)}(t)W_2^{(i)} + N_2^{(1)}(t)W_1^{(1,2)} - N_2^{(2)}(t) \sum_{i=1}^n W_1^{(2,i)} + \sum_{i=3}^n N_2^{(i)}(t)W_1^{(i,2)}, \\ \dots, \\ \frac{dN_2^{(n)}(t)}{dt} = \sum_{i=1}^n N_1^{(i)}(t)W_2^{(i)} + \sum_{i=1}^{n-1} N_2^{(i)}(t)W_1^{(i,n)} - \sum_{i=1}^n N_2^{(n)}(t)W_1^{(n,i)}. \end{array} \right. \quad (2.2)$$

Будем считать вероятности $W_2^{(i)}$, $W_1^{(i,j)}$ постоянными величинами, $i, j = 1, \dots, n$.

Учитывая, что вероятности $W_2^{(k)}$ принимают нулевые значения во всех случаях, кроме k -ого за период времени с t до $t + dt$ для дифференциальных уравнений, характеризующих изменения $N_1^{(i)}(t)$ ($i, k = 1, \dots, n$); а вероятности $W_1^{(i,j)}$ принимают нулевые значения во всех случаях, кроме $i = j$ за период времени с t до $t + dt$ для дифференциальных уравнений, характеризующих изменения $N_2^{(i)}(t)$ ($i, j, k = 1, \dots, n$) система (2.2) примет вид:

$$\left\{ \begin{aligned}
\frac{dN_1^{(1)}(t)}{dt} &= -N_1^{(1)}(t)W_2^{(1)} - N_2^{(1)}(t)W_1^{(1,1)} + \sum_{i=2}^n N_2^{(i)}(t)W_1^{(i,1)}, \\
\frac{dN_1^{(2)}(t)}{dt} &= -N_1^{(2)}(t)W_2^{(2)} + N_2^{(1)}(t)W_1^{(1,2)} - N_2^{(2)}(t)W_1^{(2,2)} + \sum_{i=3}^n N_2^{(i)}(t)W_1^{(i,2)}, \\
&\dots\dots\dots, \\
\frac{dN_1^{(n)}(t)}{dt} &= -N_1^{(n)}(t)W_2^{(n)} + \sum_{i=1}^{n-1} N_2^{(i)}(t)W_1^{(i,n)} - N_2^{(n)}(t)W_1^{(n,n)}, \\
\frac{dN_2^{(1)}(t)}{dt} &= \sum_{i=1}^n N_1^{(i)}(t)W_2^{(i)} - N_2^{(1)}(t)\sum_{i=1}^n W_1^{(1,i)}, \\
\frac{dN_2^{(2)}(t)}{dt} &= \sum_{i=1}^n N_1^{(i)}(t)W_2^{(i)} - N_2^{(2)}(t)\sum_{i=1}^n W_1^{(2,i)}, \\
&\dots\dots\dots, \\
\frac{dN_2^{(n)}(t)}{dt} &= \sum_{i=1}^n N_1^{(i)}(t)W_2^{(i)} - \sum_{i=1}^n N_2^{(n)}(t)W_1^{(n,i)}.
\end{aligned} \right. \tag{2.2a}$$

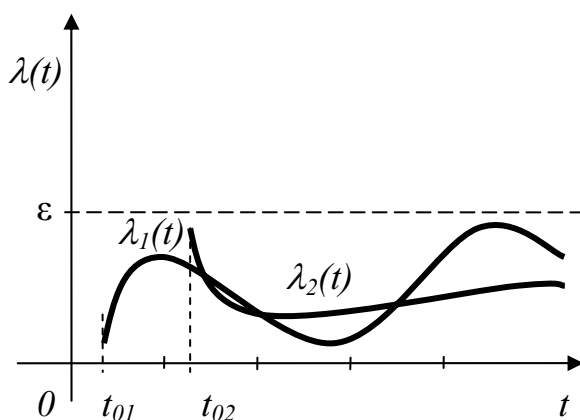
Так как любая математическая модель заведомо несет в себе погрешность (нельзя учесть все условия работы), то исследование устойчивости является одной из важных процедур в моделировании.

Устойчивость (асимптотическая устойчивость или неустойчивость) системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами (2.2) определяется расположением относительно мнимой оси корней характеристического уравнения матрицы коэффициентов системы (2.2).

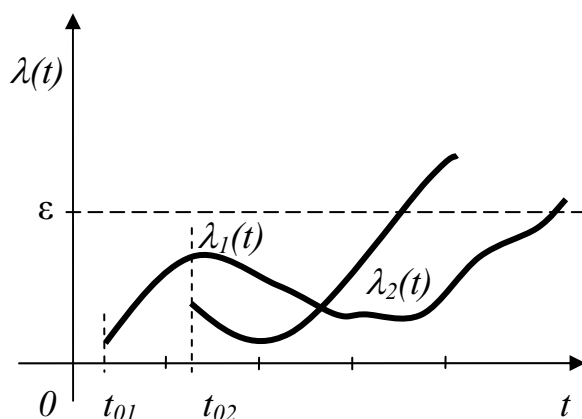
Согласно терминологии [6] характеристический многочлен матрицы коэффициентов системы (2.2) является устойчивым тогда и только тогда, когда его корни λ_j ($j = 1, \dots, n$) имеют отрицательную вещественную часть, т. е. удовлетворяют условию $Re\lambda_j < 0$, (а значит только тогда, когда (2.1), (2.2) асимптотически устойчива).

Непосредственное вычисление собственных значений характеристического уравнения матрицы коэффициентов системы (2.2) для больших степеней многочлена весьма трудоемкий процесс, требующий значительных затрат времени. При этом увеличивается погрешность полученных результатов.

На рисунке 2.1 представлена геометрическая интерпретация состояния системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.



a)



б)

Рисунок 2.1 - Фазовые состояния системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами:
 а) устойчивое состояние, б) неустойчивое состояние

2.2. Методика исследования на устойчивость математической модели самоорганизации рынка труда для нескольких отраслей экономики

Укажем условия устойчивости задачи (2.1), (2.2). Предположение, что вероятности $W_2^{(i)}$, $W_1^{(i,j)}$ являются постоянными величинами, $i, j = 1, \dots, n$, вполне приемлемо с экономической точки зрения [49].

Обозначим через W – матрицу коэффициентов системы (2.2).

Матрица коэффициентов W имеет вид:

$$W = \begin{pmatrix} -W_2^{(1)} & 0 & \dots & 0 & -W_1^{(1,1)} & W_1^{(2,1)} & \dots & W_1^{(n,1)} \\ 0 & -W_2^{(2)} & \dots & 0 & W_1^{(1,2)} & -W_1^{(2,2)} & \dots & W_1^{(n,2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -W_2^{(n)} & W_1^{(1,n)} & W_1^{(2,n)} & \dots & -W_1^{(n,n)} \\ W_2^{(1)} & W_2^{(2)} & \dots & W_2^{(n)} & -W_1^{(1,1)} - \dots - W_1^{(1,n)} & 0 & \dots & 0 \\ W_2^{(1)} & W_2^{(2)} & \dots & W_2^{(n)} & 0 & -W_1^{(2,1)} - \dots - W_1^{(2,n)} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ W_2^{(1)} & W_2^{(2)} & \dots & W_2^{(n)} & 0 & 0 & \dots & -W_1^{(n,1)} - \dots - W_1^{(n,n)} \end{pmatrix}. \quad (2.3)$$

Составим характеристическое уравнение для матрицы W :

$$\det (W - \lambda I) = 0, \quad (2.4)$$

где I – единичная матрица размера $n \times n$. Уравнение (2.4) эквивалентно уравнению [6]

$$P_n(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + \dots + a_n\lambda^n = 0, \quad a_n = 1. \quad (2.5)$$

Для получения приближенных значений коэффициентов при вычислении полиномов достаточно высоких порядков может потребоваться громадный запас знаков в значениях функции, что на практике трудно обеспечить. Неосторожное округление в процессе их вычисления может нарушить их взаимную связанность и привести затем к неправильным значениям собственных чисел. Устойчивость характеристического многочлена матрицы W можно определить, не вычисляя его собственных значений.

Зная коэффициенты характеристического уравнения для матрицы W на основании теоремы А. Стодола (см. п. 1.5), можно сделать вывод об устойчивости многочлена. Положительность коэффициентов есть необходимое, но не достаточное условие устойчивости.

Для устойчивости (2.5) необходимо и достаточно (критерий Рауса-Гурвица (см. п. 1.5)), чтобы были выполнены условия:

$$\Delta_1 = a_1 > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} > 0, \quad \dots, \quad \Delta_n = a_n \Delta_{n-1} > 0.$$

Этот критерий используется для изучения асимптотической устойчивости

(2.1), (2.2).

С экономической точки зрения устойчивость (2.1), (2.2) означает, что в состоянии с уровнем занятости (2.1) при небольших отклонениях от (2.2) система с течением времени снова возвратится к начальному состоянию [74]. Если же задача (2.1), (2.2) является неустойчивой, то даже небольшие отклонения (2.1) обязательно приведут к другому соотношению числа безработных и занятых на производстве в нескольких отраслях экономики.

На рис. 2.2 показаны фазовые траектории характеристического уравнения для матрицы W . В соответствии с заданными начальными условиями фазовые траектории позволяют показать устойчивые состояния на рынке труда для n различных отраслей экономики.

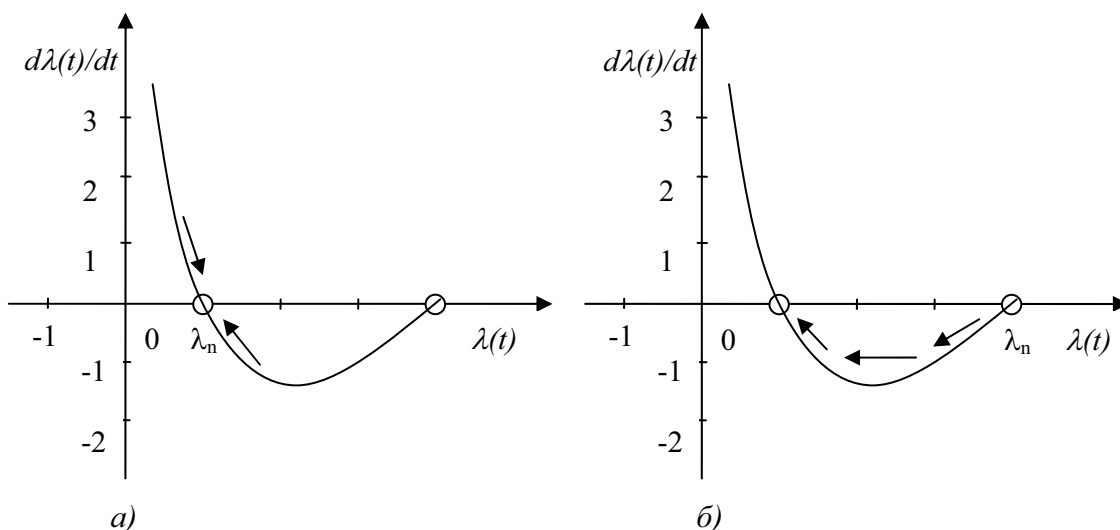


Рисунок 2.2 - Фазовые траектории характеристического уравнения для матрицы W : а) равновесное состояние, б) неравновесное состояние

Если система находится в окрестности устойчивой стационарной точки, то имеет место снижение темпов роста безработицы. В противном случае – темпы роста безработицы прогрессируют.

Проанализировав полученные сведения об устойчивых и неустойчивых состояниях рынка труда для n различных отраслей экономики вполне возможно составить прогноз. Полученный прогноз позволит избежать

кризисных состояний на рынке труда.

2.3. Примеры исследования на устойчивость математической модели самоорганизации рынка труда для двух и трех отраслей экономики

Рассмотрим применение математической модели самоорганизации рынка труда на случай двух различных отраслей экономики [81, 82].

Обозначим $N_1^{(i)}(t)$ - общее число специалистов, занятых в i -ой отрасли экономики в момент времени t ; $N_2^{(i)}(t)$ - число потенциальных рабочих, которые могут быть привлечены для работы в i -ой отрасли и которые в момент времени t являются безработными; $\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 N_j^{(i)} = N = const$ - емкость рынка рабочей силы двух отраслей; $W_1^{(i,j)}$ - вероятность того, что безработный специалист i -ой отрасли может найти работу по специальности в j -ой отрасли за период времени с t до $t + dt$; $W_2^{(k)}$ - вероятность увольнения работающего специалиста k -ой отрасли за период времени с t до $t + dt$; $i, j, k = 1, 2$, $t \in [0; \infty)$.

Заметим, что в общем случае $\sum_{i=1}^2 W_1^{(i,j)} \neq 1$, $j = 1, 2$.

Также как в п. 2.1 будем предполагать, что в начальный момент времени $t=0$ число специалистов, занятых в i -ой отрасли экономики, равно $N_{10}^{(i)}$, а число потенциальных рабочих, которые могут быть привлечены для работы в i -ой отрасли и которые в момент времени t являются безработными равно $N_{20}^{(i)}$,

$$\text{т. е.} \quad N_1^{(i)}(0) = N_{10}^{(i)}, \quad N_2^{(i)}(0) = N_{20}^{(i)}, \quad i=1, 2 \quad (2.6)$$

В соответствии с введенными выше обозначениями после несложных рассуждений получим систему дифференциальных уравнений с заданными начальными условиями (2.6), описывающую динамику перераспределения рабочей силы в двух различных отраслях экономики:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dN_1^{(1)}(t)}{dt} = -N_1^{(1)}(t)W_2^{(1)} + N_1^{(2)}(t)W_2^{(2)} - N_2^{(1)}(t)W_1^{(1,1)} + N_2^{(2)}(t)W_1^{(2,1)}, \\ \frac{dN_1^{(2)}(t)}{dt} = N_1^{(1)}(t)W_2^{(1)} - N_1^{(2)}(t)W_2^{(2)} + N_2^{(1)}(t)W_1^{(1,2)} - N_2^{(2)}(t)W_1^{(2,2)}, \\ \frac{dN_2^{(1)}(t)}{dt} = N_1^{(1)}(t)W_2^{(1)} + N_1^{(2)}(t)W_2^{(2)} - N_2^{(1)}(t)(W_1^{(1,1)} + W_1^{(1,2)}) + N_2^{(2)}(t)W_1^{(2,1)}, \\ \frac{dN_2^{(2)}(t)}{dt} = N_1^{(1)}(t)W_2^{(1)} + N_1^{(2)}(t)W_2^{(2)} + N_2^{(1)}(t)W_1^{(1,2)} - N_2^{(2)}(t)(W_1^{(2,1)} + W_1^{(2,2)}). \end{array} \right. \quad (2.7)$$

Будем считать, что вероятности $W_2^{(i)}$, $W_1^{(i,j)}$ являются постоянными величинами, $i,j=1,2$. Такое допущение вполне приемлемо с экономической точки зрения.

Учитывая, что безработный i -ой отрасли может претендовать на место работающего специалиста данной отрасли при условии освобождения рабочего места, т. е. увольнения рабочего i -ой отрасли, система дифференциальных уравнений (2.7) примет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dN_1^{(1)}(t)}{dt} = -N_1^{(1)}(t)W_2^{(1)} - N_2^{(1)}(t)W_1^{(1,1)} + N_2^{(2)}(t)W_1^{(2,1)}, \\ \frac{dN_1^{(2)}(t)}{dt} = -N_1^{(2)}(t)W_2^{(2)} + N_2^{(1)}(t)W_1^{(1,2)} - N_2^{(2)}(t)W_1^{(2,2)}, \\ \frac{dN_2^{(1)}(t)}{dt} = N_1^{(1)}(t)W_2^{(1)} + N_1^{(2)}(t)W_2^{(2)} - N_2^{(1)}(t)(W_1^{(1,1)} + W_1^{(1,2)}), \\ \frac{dN_2^{(2)}(t)}{dt} = N_1^{(1)}(t)W_2^{(1)} + N_1^{(2)}(t)W_2^{(2)} - N_2^{(2)}(t)(W_1^{(2,1)} + W_1^{(2,2)}). \end{array} \right. \quad (2.8)$$

Обозначим

$$W = \begin{pmatrix} -W_2^{(1)} & 0 & -W_1^{(1,1)} & W_1^{(2,1)} \\ 0 & -W_2^{(2)} & W_1^{(1,2)} & -W_1^{(2,2)} \\ W_2^{(1)} & W_2^{(2)} & -W_1^{(1,1)} - W_1^{(1,2)} & 0 \\ W_2^{(1)} & W_2^{(2)} & 0 & -W_1^{(2,1)} - W_1^{(2,2)} \end{pmatrix}. \quad (2.9)$$

Из [99] известно, что важным аспектом любой экономической системы является ее устойчивость. Система является устойчивой, если она сохраняет тенденцию стремления к тому состоянию, которая наиболее соответствует целям системы, целям сохранения качества без изменения структуры или не

приводящим к сильным изменениям структуры системы на некотором заданном множестве ресурсов (например, на временном интервале). Понятие “сильное изменение” каждый раз должно быть конкретизировано, детерминировано.

Из п. 2.3 известно, что с экономической точки зрения устойчивость (2.7) означает, что в состоянии с уровнем занятости (2.6) при небольших отклонениях от (2.6) система с течением времени снова возвратится к начальному состоянию. Если же задача (2.6), (2.7) является неустойчивой, то даже небольшие отклонения (2.6) обязательно приведут к другому соотношению числа безработных и занятых на производстве в двух отраслях экономики.

Исследуем задачу (2.6), (2.7) на устойчивость [6]. Рассмотрим характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} -W_2^{(1)} - \lambda & 0 & -W_1^{(1,1)} & W_1^{(2,1)} \\ 0 & -W_2^{(2)} - \lambda & W_1^{(1,2)} & -W_1^{(2,2)} \\ W_2^{(1)} & W_2^{(2)} & -W_1^{(1,1)} - W_1^{(1,2)} - \lambda & 0 \\ W_2^{(1)} & W_2^{(2)} & 0 & -W_1^{(2,1)} - W_1^{(2,2)} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (2.10)$$

Обозначим

$$\begin{aligned} & W_2^{(1)} W_2^{(2)} W_1^{(1,2)} W_1^{(2,2)} + 3W_2^{(1)} W_2^{(2)} W_1^{(1,2)} W_1^{(2,1)} + W_2^{(1)} W_2^{(2)} W_1^{(1,1)} W_1^{(2,1)} - \\ & - W_2^{(1)} W_2^{(2)} W_1^{(1,1)} W_1^{(2,2)} = a_0, \\ & W_2^{(1)} W_1^{(1,2)} W_1^{(2,2)} + W_2^{(2)} W_1^{(1,2)} W_1^{(2,2)} + 2W_2^{(2)} W_1^{(1,2)} W_1^{(2,1)} + W_2^{(2)} W_1^{(1,1)} W_1^{(2,1)} + \\ & + 2W_2^{(1)} W_1^{(1,2)} W_1^{(2,1)} + W_2^{(1)} W_1^{(1,1)} W_1^{(2,1)} + 2W_2^{(1)} W_2^{(2)} W_1^{(2,1)} + 2W_2^{(1)} W_2^{(2)} W_1^{(1,2)} = a_1, \\ & W_1^{(1,1)} W_1^{(2,2)} + W_1^{(1,2)} W_1^{(2,2)} + W_1^{(1,2)} W_1^{(2,1)} + W_2^{(1)} W_2^{(2)} + W_2^{(1)} W_1^{(1,2)} + W_2^{(2)} W_1^{(2,1)} + \\ & + W_1^{(1,1)} W_1^{(2,1)} + W_2^{(2)} W_1^{(1,2)} + W_2^{(2)} W_1^{(1,1)} + W_2^{(1)} W_1^{(2,2)} + 2W_2^{(1)} W_1^{(2,1)} = a_2, \\ & W_2^{(1)} + W_2^{(2)} + W_1^{(1,1)} + W_1^{(1,2)} + W_1^{(2,1)} + W_1^{(2,2)} = a_3. \end{aligned}$$

Тогда (2.10) примет вид:

$$P_4(\lambda) = \lambda^4 + a_3 \lambda^3 + a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0, \quad a_4 = 1.$$

Запишем матрицу Гурвица:

$$M_{p_4} = \begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ 0 & 1 & a_3 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

Согласно критерию Рауса-Гурвица многочлен $P_4(\lambda)$ устойчив (а значит и задача (2.6), (2.7) асимптотически устойчива) только тогда, когда все главные

диагональные миноры $\Delta_1 = a_1$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix}$, $\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ 0 & 1 & a_3 \end{vmatrix}$ матрицы

Гурвица M_{p_4} удовлетворяют условиям [6]:

$$\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 > 0, \text{ т. е. } a_1 > 0, a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0, a_1 a_2 a_3 - a_1^2 - a_0 a_3^2 > 0,$$

или

$$\begin{aligned} & W_2^{(1)} W_1^{(1,2)} W_1^{(2,2)} + W_2^{(2)} W_1^{(1,2)} W_1^{(2,2)} + 2W_2^{(2)} W_1^{(1,2)} W_1^{(2,1)} + W_2^{(2)} W_1^{(1,1)} W_1^{(2,1)} + \\ & + 2W_2^{(1)} W_1^{(1,2)} W_1^{(2,1)} + W_2^{(1)} W_1^{(1,1)} W_1^{(2,1)} + 2W_2^{(1)} W_2^{(2)} W_1^{(2,1)} + 2W_2^{(1)} W_2^{(2)} W_1^{(1,2)} > 0, \\ & (W_2^{(1)} W_1^{(1,2)} W_1^{(2,2)} + W_2^{(2)} W_1^{(1,2)} W_1^{(2,2)} + 2W_2^{(2)} W_1^{(1,2)} W_1^{(2,1)} + W_2^{(2)} W_1^{(1,1)} W_1^{(2,1)} + \\ & + 2W_2^{(1)} W_1^{(1,2)} W_1^{(2,1)} + W_2^{(1)} W_1^{(1,1)} W_1^{(2,1)} + 2W_2^{(1)} W_2^{(2)} W_1^{(2,1)} + 2W_2^{(1)} W_2^{(2)} W_1^{(1,2)}) * \\ & * (W_1^{(1,1)} W_1^{(2,2)} + W_1^{(1,2)} W_1^{(2,2)} + W_1^{(1,2)} W_1^{(2,1)} + W_2^{(1)} W_2^{(2)} + W_2^{(1)} W_1^{(1,2)} + W_2^{(2)} W_1^{(2,1)} + \\ & + W_1^{(1,1)} W_1^{(2,1)} + W_2^{(2)} W_1^{(1,2)} + W_2^{(2)} W_1^{(1,1)} + W_2^{(1)} W_1^{(2,2)} + 2W_2^{(1)} W_1^{(2,1)}) - \\ & - (W_2^{(1)} + W_2^{(2)} + W_1^{(1,1)} + W_1^{(1,2)} + W_1^{(2,1)} + W_1^{(2,2)}) * (W_2^{(1)} W_2^{(2)} W_1^{(1,2)} W_1^{(2,2)} + \\ & + 3W_2^{(1)} W_2^{(2)} W_1^{(1,2)} W_1^{(2,1)} + W_2^{(1)} W_2^{(2)} W_1^{(1,1)} W_1^{(2,1)} - W_2^{(1)} W_2^{(2)} W_1^{(1,1)} W_1^{(2,2)}) > 0, \\ & (W_2^{(1)} W_1^{(1,2)} W_1^{(2,2)} + W_2^{(2)} W_1^{(1,2)} W_1^{(2,2)} + 2W_2^{(2)} W_1^{(1,2)} W_1^{(2,1)} + W_2^{(2)} W_1^{(1,1)} W_1^{(2,1)} + \\ & + 2W_2^{(1)} W_1^{(1,2)} W_1^{(2,1)} + W_2^{(1)} W_1^{(1,1)} W_1^{(2,1)} + 2W_2^{(1)} W_2^{(2)} W_1^{(2,1)} + 2W_2^{(1)} W_2^{(2)} W_1^{(1,2)}) * \\ & * (W_1^{(1,1)} W_1^{(2,2)} + W_1^{(1,2)} W_1^{(2,2)} + W_1^{(1,2)} W_1^{(2,1)} + W_2^{(1)} W_2^{(2)} + W_2^{(1)} W_1^{(1,2)} + W_2^{(2)} W_1^{(2,1)} + \\ & + W_1^{(1,1)} W_1^{(2,1)} + W_2^{(2)} W_1^{(1,2)} + W_2^{(2)} W_1^{(1,1)} + W_2^{(1)} W_1^{(2,2)} + 2W_2^{(1)} W_1^{(2,1)}) * \\ & * (W_2^{(1)} + W_2^{(2)} + W_1^{(1,1)} + W_1^{(1,2)} + W_1^{(2,1)} + W_1^{(2,2)}) - (W_2^{(1)} W_1^{(1,2)} W_1^{(2,2)} + \\ & + W_2^{(2)} W_1^{(1,2)} W_1^{(2,2)} + 2W_2^{(2)} W_1^{(1,2)} W_1^{(2,1)} + W_2^{(2)} W_1^{(1,1)} W_1^{(2,1)} + 2W_2^{(1)} W_1^{(1,2)} W_1^{(2,1)} + \\ & + W_2^{(1)} W_1^{(1,1)} W_1^{(2,1)} + 2W_2^{(1)} W_2^{(2)} W_1^{(2,1)} + 2W_2^{(1)} W_2^{(2)} W_1^{(1,2)})^2 - \\ & - (W_2^{(1)} + W_2^{(2)} + W_1^{(1,1)} + W_1^{(1,2)} + W_1^{(2,1)} + W_1^{(2,2)})^2 * (W_2^{(1)} W_2^{(2)} W_1^{(1,2)} W_1^{(2,2)} + \\ & + 3W_2^{(1)} W_2^{(2)} W_1^{(1,2)} W_1^{(2,1)} + W_2^{(1)} W_2^{(2)} W_1^{(1,1)} W_1^{(2,1)} - W_2^{(1)} W_2^{(2)} W_1^{(1,1)} W_1^{(2,2)}) > 0, \end{aligned} \quad (2.12)$$

Пусть в системе (2.6), (2.7) $W_2^{(1)} = 0.8$, $W_2^{(2)} = 0.2$, $W_1^{(1,1)} = 0.3$, $W_1^{(1,2)} = 0.2$, $W_1^{(2,1)} = 0.4$, $W_1^{(2,2)} = 0.1$. Тогда $\Delta_1 = 0.328 > 0$, $\Delta_2 = 0.382 > 0$, $\Delta_3 = 0.656 > 0$.

Следовательно, при данных вероятностях многочлен $P_4(\lambda)$ является устойчивым. А значит, задача (2.6), (2.7) асимптотически устойчива, т. е. для данных значений вероятностей система будет возвращаться к равновесному состоянию при t стремящемся к бесконечности из любого неравновесного состояния.

Пусть в системе (2.6), (2.7) $W_2^{(1)} = W_2^{(2)} = W_1^{(1,1)} = W_1^{(1,2)} = W_1^{(2,1)} = W_1^{(2,2)} = 0.9$. Тогда $\Delta_1 = 41.69 > 0$, $\Delta_2 = 412.92 > 0$, $\Delta_3 = -2175 < 0$.

Следовательно, при данных вероятностях многочлен $P_4(\lambda)$ является неустойчивым, что в свою очередь означает, что задача (2.6), (2.7) асимптотически неустойчива.

Система дифференциальных уравнений с заданными начальными условиями (2.1), описывающая динамику перераспределения рабочей силы в 3 различных отраслях экономики, имеет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dN_1^{(1)}(t)}{dt} = -N_1^{(1)}(t)W_2^{(1)} + \sum_{i=2}^3 N_1^{(i)}(t)W_2^{(i)} - N_2^{(1)}(t)W_1^{(1,1)} + N_2^{(2)}(t)W_1^{(2,1)} + N_2^{(3)}(t)W_1^{(3,1)}, \\ \frac{dN_1^{(2)}(t)}{dt} = N_1^{(1)}(t)W_2^{(1)} - N_1^{(2)}(t)W_2^{(2)} + N_1^{(3)}(t)W_2^{(3)} + N_2^{(1)}(t)W_1^{(1,2)} - N_2^{(2)}(t)W_1^{(2,2)} + N_2^{(3)}(t)W_1^{(3,2)}, \\ \frac{dN_1^{(3)}(t)}{dt} = N_1^{(1)}(t)W_2^{(1)} + N_1^{(2)}(t)W_2^{(2)} - N_1^{(3)}(t)W_2^{(3)} + N_2^{(1)}(t)W_1^{(1,3)} + N_2^{(2)}(t)W_1^{(2,3)} - N_2^{(3)}(t)W_1^{(3,3)}, \\ \frac{dN_2^{(1)}(t)}{dt} = \sum_{i=1}^3 N_1^{(3)}(t)W_2^{(3)} - N_2^{(1)}(t) \sum_{i=1}^3 W_1^{(1,i)} + \sum_{i=2}^3 N_2^{(i)}(t)W_1^{(i,1)}, \\ \frac{dN_2^{(2)}(t)}{dt} = \sum_{i=1}^3 N_1^{(i)}(t)W_2^{(i)} + N_2^{(1)}(t)W_1^{(1,2)} - N_2^{(2)}(t) \sum_{i=1}^3 W_1^{(2,i)} + N_2^{(3)}(t)W_1^{(3,2)}, \\ \frac{dN_2^{(3)}(t)}{dt} = \sum_{i=1}^3 N_1^{(i)}(t)W_2^{(i)} + \sum_{i=1}^2 N_2^{(i)}(t)W_1^{(i,3)} - \sum_{i=1}^3 N_2^{(3)}(t)W_1^{(3,i)}. \end{array} \right.$$

Тогда W – матрица коэффициентов системы дифференциальных уравнений с учетом нулевых значений вероятностей $W_1^{(i,j)}$, $W_2^{(i)}$, $i, j = 1, \dots, 3$ будет иметь вид:

$$W = \begin{pmatrix} -W_2^{(1)} & 0 & 0 & -W_1^{(1,1)} & W_1^{(2,1)} & W_1^{(3,1)} \\ 0 & -W_2^{(2)} & 0 & W_1^{(1,2)} & -W_1^{(2,2)} & W_1^{(3,2)} \\ 0 & 0 & -W_2^{(3)} & W_1^{(1,3)} & W_1^{(2,3)} & -W_1^{(3,3)} \\ W_2^{(1)} & W_2^{(2)} & W_2^{(3)} & -W_1^{(1,1)} - W_1^{(1,2)} - W_1^{(1,3)} & 0 & 0 \\ W_2^{(1)} & W_2^{(2)} & W_2^{(3)} & 0 & -W_1^{(2,1)} - W_1^{(2,2)} - W_1^{(2,3)} & 0 \\ W_2^{(1)} & W_2^{(2)} & W_2^{(3)} & 0 & 0 & W_1^{(1,3)} - W_1^{(2,3)} - W_1^{(3,3)} \end{pmatrix}.$$

Пусть в системе (2.1), (2.2)

$$\begin{aligned} W_2^{(1)} &= 0.1, & W_2^{(2)} &= 0.2, & W_2^{(3)} &= 0.3, \\ W_1^{(1,1)} &= 0.3, & W_1^{(1,2)} &= 0.2, & W_1^{(1,3)} &= 0.1, \\ W_1^{(2,1)} &= 0.4, & W_1^{(2,2)} &= 0.1, & W_1^{(2,3)} &= 0.5, \\ W_1^{(3,1)} &= 0.6, & W_1^{(3,2)} &= 0.2, & W_1^{(3,3)} &= 0.3 \end{aligned}$$

Матрица коэффициентов системы дифференциальных уравнений W примет вид:

$$W = \begin{pmatrix} -0.1 & 0 & 0 & -0.3 & 0.4 & 0.6 \\ 0 & -0.2 & 0 & 0.2 & -0.1 & 0.2 \\ 0 & 0 & -0.3 & 0.1 & 0.5 & -0.3 \\ 0.1 & 0.2 & 0.3 & -0.6 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0.2 & 0.3 & 0 & -1 & 0 \\ 0.1 & 0.2 & 0.3 & 0 & 0 & -1.1 \end{pmatrix}.$$

Тогда характеристическое уравнение матрицы коэффициентов системы дифференциальных уравнений W примет вид:

$$\begin{vmatrix} -0.1 - \lambda & 0 & 0 & -0.3 & 0.4 & 0.6 \\ 0 & -0.2 - \lambda & 0 & 0.2 & -0.1 & 0.2 \\ 0 & 0 & -0.3 - \lambda & 0.1 & 0.5 & -0.3 \\ 0.1 & 0.2 & 0.3 & -0.6 - \lambda & 0 & 0 \\ 0.1 & 0.2 & 0.3 & 0 & -1 - \lambda & 0 \\ 0.1 & 0.2 & 0.3 & 0 & 0 & -1.1 - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Получим характеристический многочлен:

$$P_6(\lambda) = \lambda^6 + 3.3\lambda^5 + 3.87\lambda^4 + 1.904\lambda^3 + 0.354\lambda^2 + 0.014\lambda - 0.001 = 0, \quad a_6 = 1.$$

Запишем матрицу Гурвица для полученного характеристического многочлена

$P_6(\lambda)$:

$$M_{P_6} = \begin{pmatrix} 0.014 & -0.001 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1.904 & 0.354 & 0.014 & -0.001 & 0 & 0 \\ 3.3 & 3.87 & 1.904 & 0.354 & 0.014 & -0.001 \\ 0 & 1 & 3.3 & 3.87 & 1.904 & 0.354 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3.3 & 3.87 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Вычислим главные диагональные миноры матрицы Гурвица M_{P_6} :

$$\Delta_1 = 0.014 > 0, \Delta_2 = 0.007 > 0, \Delta_3 = 0.012 > 0, \Delta_4 = 0.039 > 0, \Delta_5 = 0.106 > 0.$$

Следовательно, при данных вероятностях многочлен $P_6(\lambda)$ является устойчивым, а задача (2.1), (2.2) асимптотически устойчива.

Составление характеристического многочлена для данной матрицы W (также как и для случаев, когда $n > 3$) и исследование на устойчивость весьма трудоемкий процесс, требующий значительного количества времени. Поэтому для решения задач математического моделирования рынка труда можно использовать различные пакеты прикладных программ, например: электронные таблицы Excel, математическую систему MathCad, пакеты MapleV, Mathematica4, MatLab [2, 14, 30, 31, 32, 33, 73, 77].

2.4. Алгоритм исследования математической модели самоорганизации рынка труда

Порядок выполнения действий для исследования системы дифференциальных уравнений (2.2) с заданными начальными условиями (2.1) на устойчивость приведен на рисунке 2.3.

Приведем алгоритм исследования на устойчивость математической модели самоорганизации рынка труда для нескольких отраслей экономики представленной в п. 2.1.

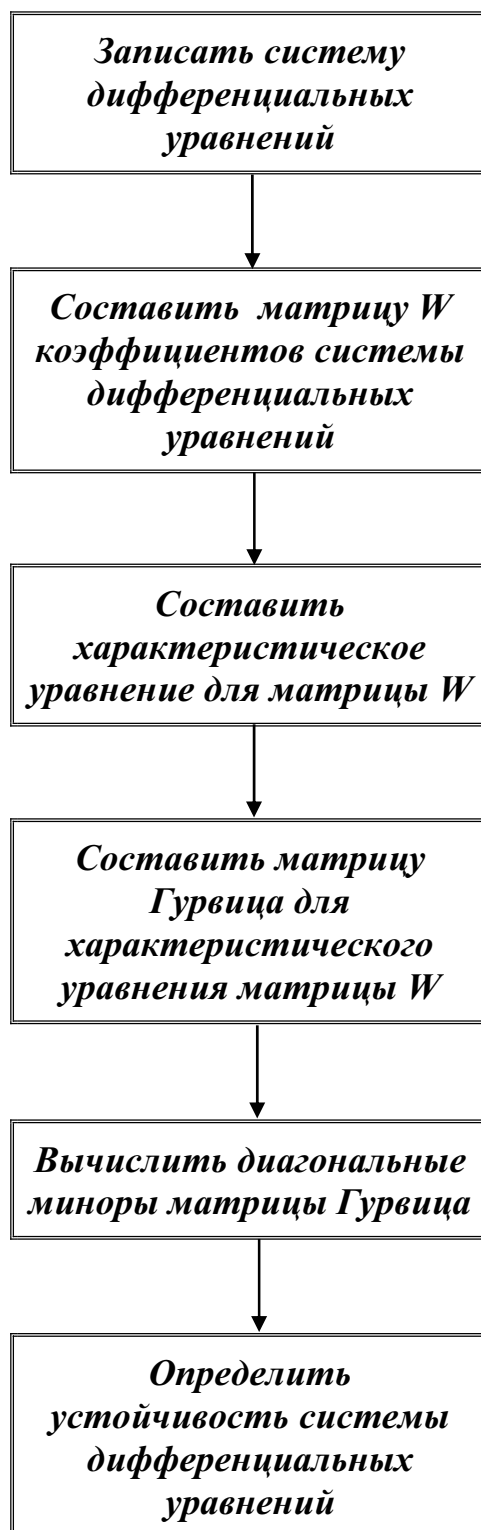


Рисунок 2.3 - Схема исследования системы дифференциальных уравнений на устойчивость

Для исследования на устойчивость системы дифференциальных уравнений (2.2) с заданными начальными условиями (2.1), описывающей динамику перераспределения рабочей силы в n различных отраслях экономики,

необходимо:

1) записать систему дифференциальных уравнений, описывающую динамику перераспределения рабочей силы для нескольких различных отраслей экономики;

2) составить матрицу W коэффициентов системы дифференциальных уравнений, введя конкретные значения вероятностей $W_1^{(i,j)}$, $W_2^{(i)}$, $i, j=1, \dots, n$;

3) составить характеристическое уравнение $\det (W-\lambda I) = 0$ для полученной матрицы коэффициентов W ;

4) составить матрицу Гурвица для характеристического уравнения матрицы коэффициентов W ;

5) вычислить диагональные миноры для полученной матрицы Гурвица;

6) сделать вывод об устойчивости системы дифференциальных уравнений.

На основании полученных сведений об устойчивости системы дифференциальных уравнений можно судить о состоянии рынка труда.

2.4.1. Построение характеристического многочлена математической модели

Непосредственное вычисление определителя матрицы коэффициентов W системы (2.2) для сколько-нибудь высокого порядка матрицы громоздко и весьма трудоемко. Непосредственное вычисление коэффициентов a_i требует огромного числа операций. Разработаны специальные методы разворачивания определителя характеристической матрицы, не требующие его непосредственного вычисления (методы А. Н. Крылова, А. М. Данилевского, Леверье, Д. К. Фаддеева, интерполяционный метод и др. [94]).

Пример 2.1. а) Метод А.Н. Крылова.

$$\text{Пусть } |W - \lambda E| = (-1)^n (\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n) \quad (2.13)$$

- характеристический многочлен матрицы W n -го порядка. Так как n - всегда

четное число, то многочлен матрицы W n -го порядка (2.13) примет вид

$$|W - \lambda E| = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n. \quad (2.13')$$

Метод основан на выполнении равенств

$$x^{(k)} = Wx^{(k-1)}, k = 1, 2, \dots, n, \quad (2.14)$$

которые удобно использовать для последовательного вычисления векторов $x^{(1)}$, $x^{(2)}$, ..., $x^{(n)}$, где $x^{(0)}$ - произвольный вектор.

Методом А.Н. Крылова найдем характеристический многочлен матрицы (2.3) для значений

$$W_2^{(1)} = 0.1, W_2^{(2)} = 0.2, W_1^{(1,1)} = 0.3, W_1^{(1,2)} = 0.4, W_1^{(2,1)} = 0.5, W_1^{(2,2)} = 0.6 \quad (2.15)$$

$$W = \begin{pmatrix} -0.1 & 0 & -0.3 & 0.5 \\ 0 & -0.2 & 0.4 & -0.6 \\ 0.1 & 0.2 & -0.7 & 0 \\ 0.1 & 0.2 & 0 & -1.1 \end{pmatrix}$$

Записав характеристический многочлен в виде

$$|W - \lambda E| = \lambda^4 + a_1 \lambda^3 + a_2 \lambda^2 + a_3 \lambda + a_4,$$

для определения коэффициентов a_1, a_2, a_3, a_4 выберем в качестве начального вектор $x^{(0)} = (1, 2, 3, 0)^T$ и по формулам (2.14) найдем векторы

$$x_1 = \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.2 \\ -1.6 \\ -0.7 \end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix} -0.25 \\ -0.5 \\ 1.14 \\ 0.75 \end{pmatrix}, x_3 = \begin{pmatrix} 0.214 \\ 0.478 \\ -0.923 \\ -0.65 \end{pmatrix}, x_4 = \begin{pmatrix} -0.179 \\ -0.41 \\ 0.773 \\ 0.535 \end{pmatrix}.$$

Далее, используя найденные векторы $x^{(i)}$, $i = 0, 1, 2, 3, 4$, запишем векторное уравнение (2.13):

$$\begin{pmatrix} -0.179 \\ -0.41 \\ 0.773 \\ 0.535 \end{pmatrix} + a_1 \begin{pmatrix} 0.214 \\ 0.478 \\ -0.923 \\ -0.65 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} -0.25 \\ -0.5 \\ 1.14 \\ 0.75 \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.2 \\ -1.6 \\ -0.7 \end{pmatrix} + a_4 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Это равенство является векторной формой записи системы линейных уравнений, имеющей единственное решение $a_1 = 2.1$, $a_2 = 1.35$, $a_3 = 0.261$, $a_4 = 0.015$. Поэтому характеристический многочлен матрицы W имеет вид:

$$|W - \lambda E| = \lambda^4 + 2.1 \lambda^3 + 1.35 \lambda^2 + 0.261 \lambda + 0.015.$$

В пакете MathCad составим матрицу W коэффициентов системы (2.2) для заданных значений $W_2^{(i)}$, $W_1^{(i,j)}$, $i,j=1,2$.

Зададим вектор $x^{(0)}$ и определим все векторы $x^{(1)}$, $x^{(2)}$, $x^{(3)}$, $x^{(4)}$:

$$\begin{aligned}
 x0fn(x, y) &:= \text{if}(x < \text{size} - 1, x + 1, 0) \\
 x(n) &:= \begin{cases} \text{matrix}(\text{size}, 1, x0fn) \\ \left((x(n-1))^T \cdot W \right)^T \end{cases} \quad \text{if } n \neq 0 \\
 ra &:= -1 \cdot x(\text{size})
 \end{aligned}$$

Составим матрицу векторов $x^{(0)}$, $x^{(1)}$, $x^{(2)}$, $x^{(3)}$, $x^{(4)}$:

$$\begin{aligned}
 lslq(ly, lx) &:= x(\text{size} - lx - 1)_ly \\
 Mslq &:= \text{matrix}(\text{size}, \text{size}, lslq)
 \end{aligned}$$

Определим коэффициенты характеристического многочлена матрицы W :

$$a := \text{lolve}(Mslq, ra) \qquad a = \begin{pmatrix} 2.1 \\ 1.35 \\ 0.261 \\ 0.015 \end{pmatrix}$$

Фрагмент рабочего документа MathCad с вычислениями коэффициентов определителя характеристического многочлена матрицы W , используя метод А.Н. Крылова, приведен на рис. 2.4.

б) Интерполяционный метод [94].

Для вычисления характеристического многочлена (2.13') выберем n различных значений $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ переменного λ и поочередно подставим в обе части равенства (2.13). В результате получим систему линейных уравнений

$$\begin{cases} \lambda_1^n + a_1 \lambda_1^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda_1 + a_n = |W - \lambda_1 E|, \\ \lambda_2^n + a_1 \lambda_2^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda_2 + a_n = |W - \lambda_2 E|, \\ \dots \dots \dots \\ \lambda_n^n + a_1 \lambda_n^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda_n + a_n = |W - \lambda_n E| \end{cases} \quad (2.16)$$

относительно неизвестных a_1, a_2, \dots, a_n . Система (2.16) имеет единственное решение, определяющее коэффициенты характеристического многочлена.

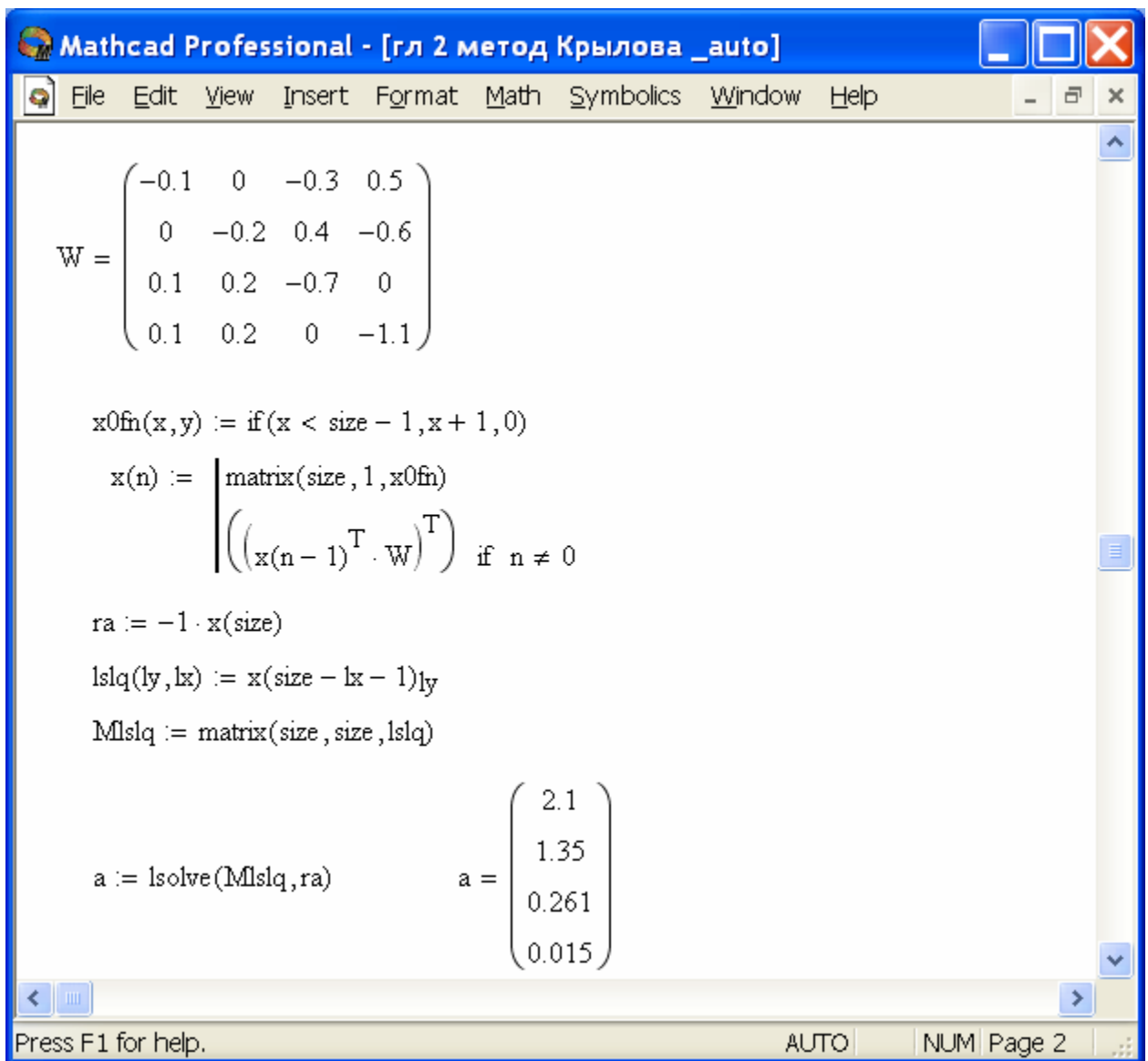


Рисунок 2.4 - Вычисление коэффициентов характеристического полинома в среде MathCad с использованием метода А.Н. Крылова

Интерполяционным методом найдем характеристический многочлен матрицы (2.3) для значений (2.15).

Для определения коэффициентов a_1, a_2, a_3, a_4 характеристического многочлена $|W - \lambda E| = \lambda^4 + a_1\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_3\lambda + a_4$ выберем 4 различных значения $\lambda_1=1, \lambda_2=2, \lambda_3=3, \lambda_4=4$ и для каждого из них вычислим соответствующий определитель:

$$|W - \lambda_1 E| = |W - E| = 3.726,$$

$$|W - \lambda_2 E| = |W - 2E| = 22.737,$$

$$|W - \lambda_3 E| = |W - 3E| = 69.648,$$

$$|W - \lambda_4 E| = |W - 4E| = 157.059.$$

Подставляя значения $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ и вычисленные определители в (2.16), получим систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 1 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 3.726, \\ 16 + 8a_1 + 4a_2 + 2a_3 + a_4 = 22.737, \\ 81 + 27a_1 + 9a_2 + 3a_3 + a_4 = 69.648, \\ 256 + 64a_1 + 16a_2 + 4a_3 + a_4 = 157.059, \end{cases}$$

имеющую единственное решение $a_1 = 2.1, a_2 = 1.35, a_3 = 0.261, a_4 = 0.015$.

Следовательно, характеристический многочлен матрицы W имеет вид:

$$|W - \lambda E| = \lambda^4 + 2.1\lambda^3 + 1.35\lambda^2 + 0.261\lambda + 0.015.$$

В пакете MathCad составим матрицу коэффициентов и свободных членов системы линейных уравнений (2.16) для значений (2.15):

$$W\lambda(n) := W - E \cdot n$$

$$\text{leq}_r(a, b) := |W\lambda(a + 1)| - (a + 1)^{\text{size}}$$

$$\text{Mleq}_r := \text{matrix}(\text{size}, 1, \text{leq}_r)$$

$$\text{Mleq}_r = \begin{pmatrix} 3.726 \\ 22.737 \\ 69.648 \\ 157.059 \end{pmatrix}$$

$$\text{leq}_l(a, b) := (a + 1)^{\text{size}-1-b}$$

$$\text{Mleq}_l := \text{matrix}(\text{size}, \text{size}, \text{leq}_l)$$

$$\text{Mleq}_l = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 8 & 4 & 2 & 1 \\ 27 & 9 & 3 & 1 \\ 64 & 16 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Определим коэффициенты характеристического многочлена матрицы W :

$$a := \text{lsolve}(\text{Mleq}_l, \text{Mleq}_r) \quad a = \begin{pmatrix} 2.1 \\ 1.35 \\ 0.261 \\ 0.015 \end{pmatrix}$$

На рис. 2.5 показан фрагмент рабочего документа MathCad с

вычислениями коэффициентов определителя характеристической матрицы W , используя интерполяционный метод.

в) Метод Д. К. Фаддеева [94].

Метод Д. К. Фаддеева для вычисления характеристического многочлена (2.13) матрицы W состоит в проведении следующих вычислений:

$$W_i = B_{i-1}W, a_i = \frac{SpW_i}{i}, B_i = W_i - a_iE, i = 1, 2, \dots, n, \quad (2.17)$$

где $B_0 = E$ (т. е. $W_1 = W$), а SpW_i – след матрицы W_i , по определению равной сумме ее диагональных элементов.

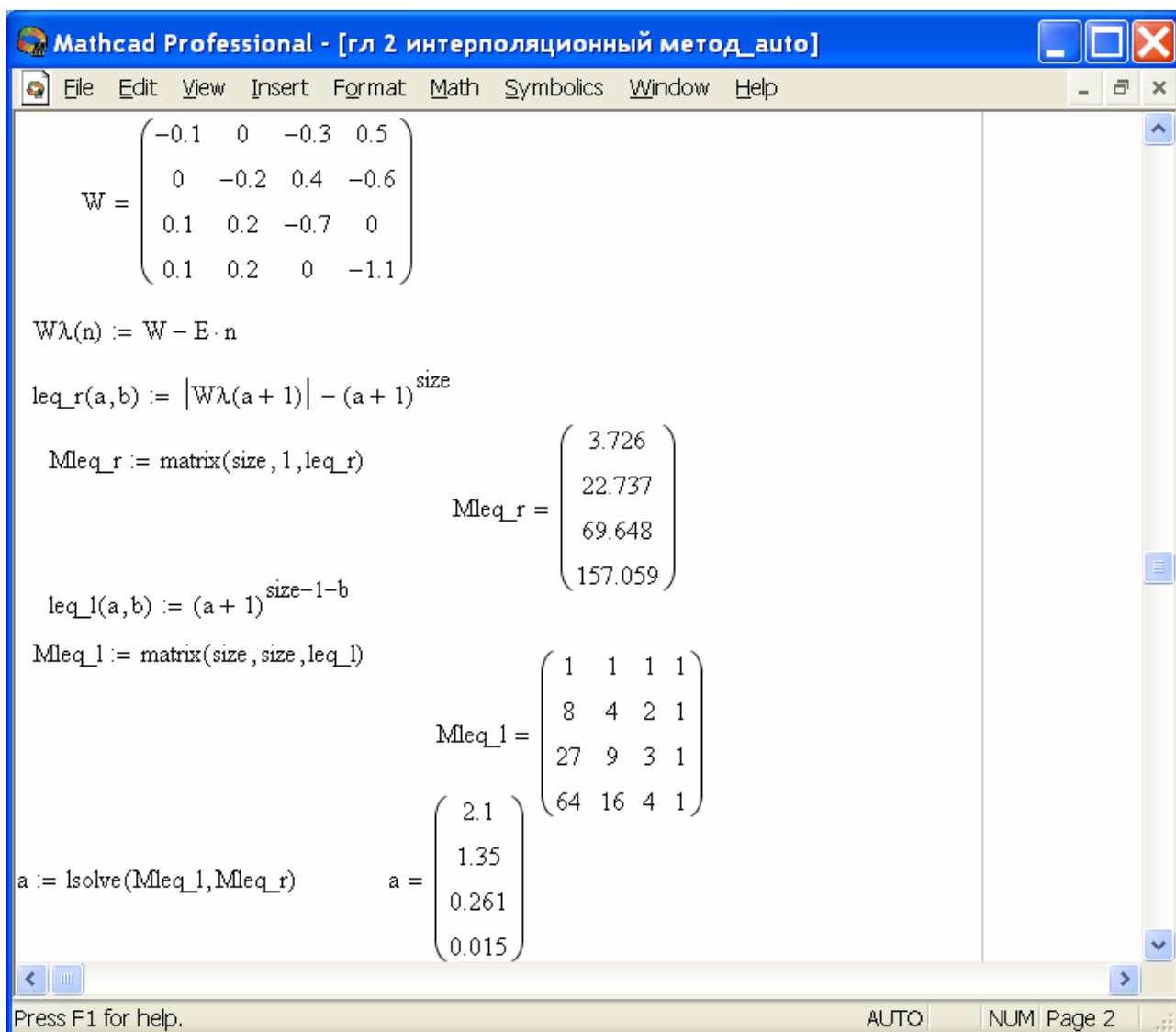


Рисунок 2.5 - Вычисление коэффициентов характеристического полинома с использованием интерполяционного метода в пакете MathCad

Методом Д.К. Фаддеева вычислим характеристический многочлен матрицы (2.3) для значений (2.15).

$$W_1 = W = \begin{pmatrix} -0.1 & 0 & -0.3 & 0.5 \\ 0 & -0.2 & 0.4 & -0.6 \\ 0.1 & 0.2 & -0.7 & 0 \\ 0.1 & 0.2 & 0 & -1.1 \end{pmatrix}, \quad a_1 = \frac{SpW_1}{1} = -2.1,$$

$$B_1 = W_1 - a_1 E = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -0.3 & 0.5 \\ 0 & 1.9 & 0.4 & -0.6 \\ 0.1 & 0.2 & 1.4 & 0 \\ 0.1 & 0.2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Далее по аналогии определяем $a_2 = \frac{SpW_2}{2} = -1.35$, $a_3 = \frac{SpW_3}{3} = -0.261$.

Окончательно на четвертом шаге вычислений получим:

$$W_4 = W B_3 = \begin{pmatrix} -0.015 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.015 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.015 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.015 \end{pmatrix}, \quad a_4 = \frac{SpW_4}{4} = -0.015,$$

$$B_4 = W_4 - a_4 E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, $|W - \lambda E| = \lambda^4 + 2.1\lambda^3 + 1.35\lambda^2 + 0.261\lambda + 0.015$.

В пакете MathCad вычислим SpW_i – след матрицы W_i , $i=1, \dots, 4$:

$$mW(i) := \begin{cases} W & \text{if } i < 2 \\ \left(mW(i-1) - \frac{\text{tr}(mW(i-1))}{i-1} \cdot E \right) \cdot W & \text{if } i \geq 2 \end{cases}$$

$$fa(i, x) := \frac{-\text{tr}(mW(i+1))}{i+1}$$

Определим коэффициенты характеристического многочлена матрицы W :

$$a := \text{matrix}(\text{size}, 1, fa) \quad a = \begin{pmatrix} 2.1 \\ 1.35 \\ 0.261 \\ 0.015 \end{pmatrix}$$

На рис. 2.6 показан фрагмент рабочего документа MathCad с вычислениями коэффициентов определителя характеристической матрицы W с использованием метода Д.К. Фаддеева.

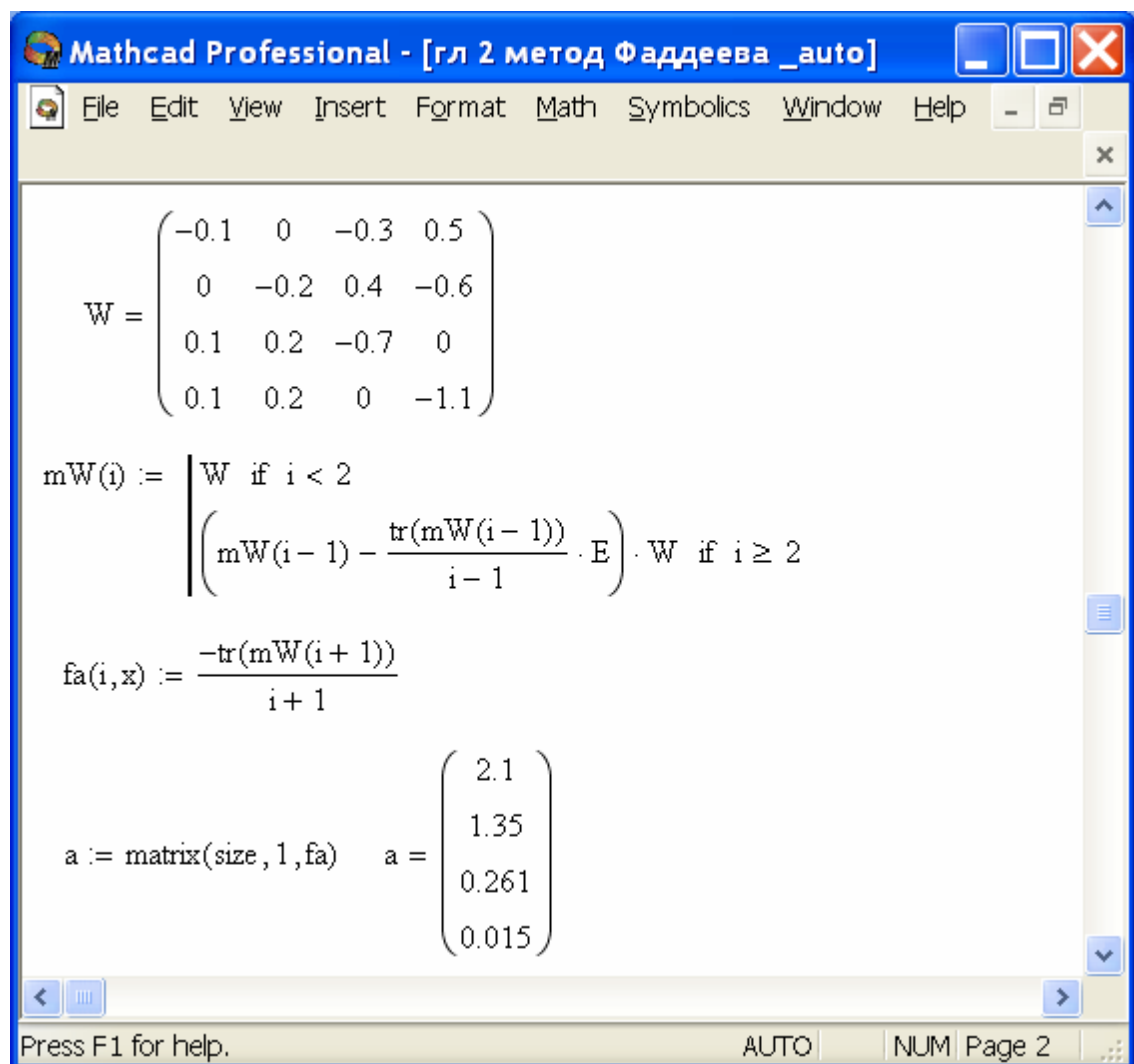


Рисунок 2.6 - Вычисление коэффициентов характеристического полинома с использованием метода Д. К. Фаддеева в пакете MathCad

Таким образом, использование пакета прикладных программ MathCad для определения коэффициентов характеристического полинома не требует

огромного числа операций. Коэффициенты характеристического полинома, полученные в результате непосредственного вычисления интерполяционным методом, методами А. Н. Крылова, Д. К. Фаддеева и с использованием пакета прикладных программ MathCad имеют нулевую погрешность.

2.4.2. Особенности вычисления собственных значений характеристического многочлена математической модели

После вычисления коэффициентов характеристического полинома собственные значения вычисляются затем по какому-либо методу для приближенного вычисления корней полинома. Одним из лучших способов приближенного вычисления корней полинома $\varphi(t) = a_0t^n + a_1t^{n-1} + \dots + a_{n-1}t + a_n$ является способ Ньютона [17, 41, 57, 97].

Пусть функция $f(x)$ дважды дифференцируема на отрезке $[a; b]$, содержащем корень ξ уравнения

$$f(x)=0, \tag{2.18}$$

где $f: R_I \rightarrow R_I$ – алгебраическая или трансцендентная функция.

Итерационный процесс Ньютона определяется линейным уравнением

$$f(x_k) + f'(x_k)(x_{k+1} - x_k) = 0 \tag{2.19}$$

или в явном виде формулой

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \tag{2.20}$$

где $k = 0, 1, 2, \dots$, и предполагается, что по крайней мере на элементах последовательности x_k первая производная данной функции в нуль не обращается.

Пример 2.2. Найти все собственные значения характеристического полинома матрицы (2.3) для значений (2.15) $P_n(\lambda) = \lambda^4 + 2.1\lambda^3 + 1.35\lambda^2 + 0.261\lambda + 0.015$ с погрешностью 0,001.

Для вычисления собственных значений воспользуемся способом Ньютона [97].

Используя формулу (2.20) проведем итерационный процесс. Результаты вычислений приведены в таблице 2.1.

Для окончания итерационного процесса может быть использовано или условие $|f(x_i)| < \varepsilon$, или условие близости 2^x последовательных приближений $|x_i - x_{i-1}| < \varepsilon$.

Таблица 2.1 - Результаты итерационного процесса

i	λ_n	λ_{n+1}	$ \lambda_{n+1} - \lambda_n $
0	0	-0.401	
1	-0.401	-1.959	0.442
2	-1.959	-1.638	0.321
3	-1.638	-1.414	0.224
4	-1.414	-1.269	0.145
5	-1.269	-1.194	0.075
6	-1.194	-1.171	0.023
7	-1.171	-1.169	0.002
8	-1.169	0	
9	0		

Проведя 9 итераций, в результате получим $\lambda_1 \approx -1.169$.

Проводя аналогичные вычисления на отрезках $[-0.5; -0]$, $[-0.4; 0]$, $[-0.3; 0]$, получим соответственно $\lambda_1 \approx -0.6$, $\lambda_1 \approx -0.231$, $\lambda_1 \approx -0.1$.

В математической системе MathCad организация итерационных вычислений по методу Ньютона реализуется с помощью функции *until(a,z)* [63], которая возвращает z , пока выражение a не становится отрицательным; a должно содержать дискретный аргумент. Имеет место следующая запись:

$$\lambda_{i+1} := \text{until}\left(\left|\lambda_i - \lambda_{i-1}\right| - \varepsilon, \lambda_i - \frac{f(\lambda_i)}{f'(\lambda_i)}\right).$$

Использование математической системы MathCad для организации

итерационных вычислений по методу позволяет достаточно быстро и точно получить результат.

Обычно собственные векторы матрицы можно определить, используя промежуточные результаты вычислений, проведенных для определения коэффициентов характеристического полинома. Для определения собственного вектора, принадлежащего тому или другому собственному значению, это собственное значение должно быть уже вычислено. Такие методы являются точными, т. е. если их осуществлять для матриц, элементы которых заданы точно (рациональными числами) и вычисления проводить точно (по правилам действий над обыкновенными дробями), то в результате будет получено точное значение коэффициентов характеристического полинома, и компоненты собственных векторов окажутся выраженными точными формулами через собственные значения.

Также имеются итерационные методы, в которых собственные значения получаются как пределы некоторых числовых последовательностей, так же как и компоненты принадлежащих им собственных векторов. Как правило, в итерационных методах, собственные значения вычисляются непосредственно, без предварительного вычисления коэффициентов характеристического полинома, что значительно упрощает задачу, так как вычисление корней полинома, коэффициенты которого известны, трудоемкий процесс.

Математическая система MathCad позволяет находить собственные значения характеристического многочлена без трудоемких вычислений. На рис. 2.7 показан фрагмент рабочего документа вычислений собственных значений матрицы (2.3) для значений (2.15).

В системе MathCad функция *eigenvals* [61] позволяет вычислить все собственные значения характеристического многочлена, а с помощью функции *eigenvecs* можно получить все собственные векторы.

2.4.3. Анализ устойчивости математической модели с использованием математической системы MathCad

Зная все собственные значения характеристического многочлена, можно определить его устойчивость. Если все корни λ_j характеристического многочлена имеют отрицательную вещественную часть, т. е. $Re\lambda_j < 0$, то он является устойчивым (см. п. 1.5).

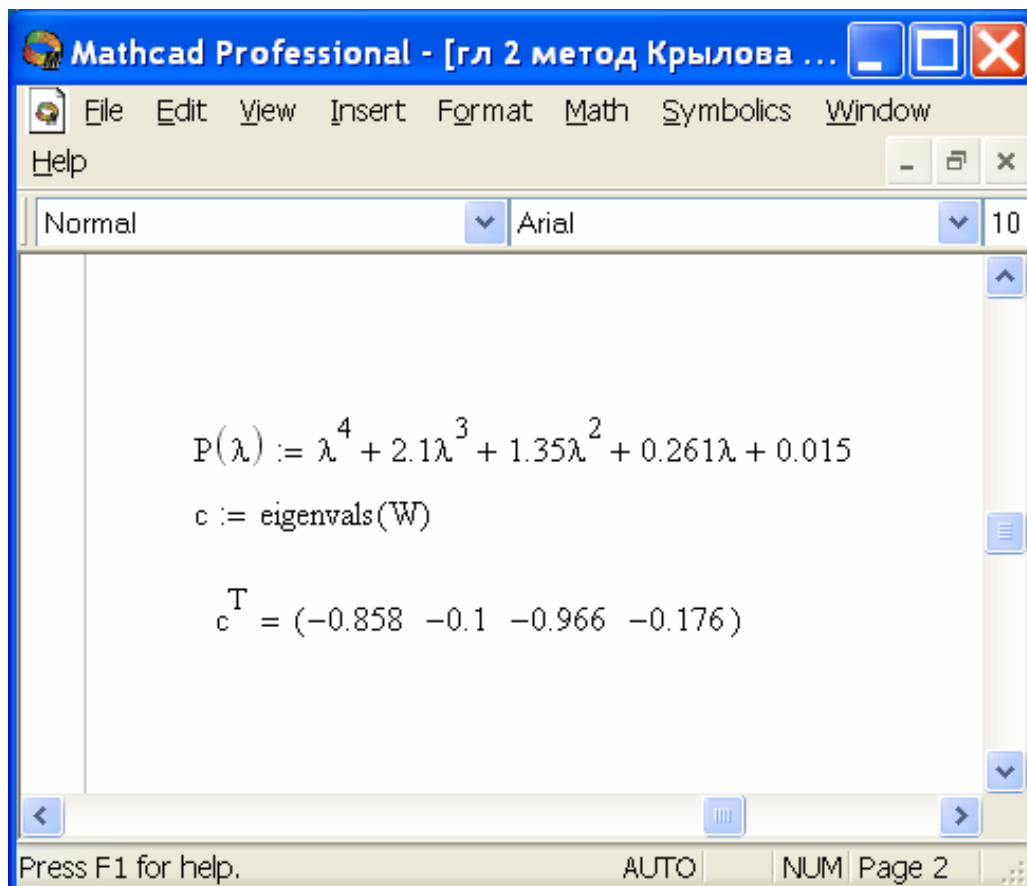


Рисунок 2.7 - Вычисление собственных значений характеристического многочлена в системе MathCad

Если вычисление всех собственных значений характеристического многочлена (2.5) вызывает затруднения или не представляется возможным, то устойчивость можно определить, применив критерий Рауса-Гурвица.

Согласно теореме 1.2 (А. Стодола) (см. п. 1.5) устойчивость многочлена (2.5), а значит и матрицы (2.3), можно определить, вычислив коэффициенты характеристического полинома (см. п. 2.4.1). Все коэффициенты устойчивого

многочлена положительны.

Но положительность коэффициентов есть необходимое, но не достаточное условие для выполнения неравенств (2.21). Для устойчивости многочлена (2.5) необходимо и достаточно выполнения критерия Рауса-Гурвица (см. п. 1.5).

Пример 2.3. Исследовать на устойчивость систему дифференциальных уравнений (2.2) с заданными начальными условиями (2.1), описывающую динамику перераспределения рабочей силы в 3 различных отраслях экономики, если

$$\begin{aligned}W_2^{(1)} &= 0.1, \quad W_2^{(2)} = 0.2, \quad W_2^{(3)} = 0.3, \\W_1^{(1,1)} &= 0.3, \quad W_1^{(1,2)} = 0.2, \quad W_1^{(1,3)} = 0.1, \\W_1^{(2,1)} &= 0.4, \quad W_1^{(2,2)} = 0.1, \quad W_1^{(2,3)} = 0.5, \\W_1^{(3,1)} &= 0.6, \quad W_1^{(3,2)} = 0.2, \quad W_1^{(3,3)} = 0.3.\end{aligned}$$

Решим пример в математической системе MathCad.

Для анализа устойчивости системы дифференциальных уравнений, описывающей динамику перераспределения рабочей силы для трех различных отраслей экономики составим матрицу W коэффициентов системы дифференциальных уравнений, введя конкретные значения вероятностей $W_1^{(i,j)}$, $W_2^{(i)}$ ($i, j=1, \dots, n$); затем составим матрицу Гурвица для характеристического уравнения матрицы коэффициентов W . На основании вычисленных диагональных миноров полученной матрицы Гурвица сделаем вывод об устойчивости системы дифференциальных уравнений.

На рис. 2.8 показан фрагмент рабочего документа математической системы MathCad с решением примера 2.3. Для нахождения коэффициентов характеристического многочлена был использован метод Д.К. Фаддеева.

В приложениях 1, 2 представлены решения примера 2.3 в математической системе MathCad с использованием интерполяционного метода и метода А. Н. Крылова для вычисления коэффициентов характеристического полинома.

```

N_otr := rows (P0)                                size := N_otr * 2
P := | 0
      | P if cols (P0) = rows (P0) = N_otr ^ rows (P1) = N_otr
fnW_R_U (a, b) := | 0
                   | (P0)_{a, b-N_otr} if b ≥ N_otr ^ a < N_otr
                   | [-(P0)_{a, b-N_otr}] if a = b - N_otr
i := 0 .. N_otr
fnW (a, b) := | 0
               | if a ≥ N_otr ^ b ≥ N_otr
               | | 0
                 | - (∑_i |fnW_R_U (i, b)|) if a = b
                 | fnW_R_U (a, b) if (a < N_otr) ^ (b ≥ N_otr)
                 | (P1)_b if a ≥ N_otr ^ b < N_otr
                 | if a < N_otr ^ b < N_otr
                 | | 0
                   | [-(P1)]_a if a = b
W := matrix (size, size, fnW)                      E := identity (size)
mW (i) := | W if i < 2
           | (mW (i-1) - (tr(mW (i-1)) / (i-1)) * E) * W if i ≥ 2
fa (i, x) := -tr(mW (i+1)) / (i+1)
a := matrix (size, 1, fa)
ka (i) := | 1 if i = size
           | a_{size-i-1} if i ≠ size
MPf (i, j) := | if (i < N_otr)
               | | r_e ← i * 2 + 1
                 | 0
                 | ka (r_e - j) if j ≤ r_e
               | if i ≥ N_otr
               | | l_e ← (i - N_otr) * 2 + 1
                 | 0
                 | ka (l_e - j + size) if j ≥ l_e
MP := matrix (size, size, MPf)
stability := | s ← 0
              | for i ∈ 0 .. size - 1
              | s ← s + 1 if |submatrix (MP, 0, i, 0, i)| > 0

```

stability matrix: yes -1, no - 0.

Рисунок 2.8 - Определение устойчивости системы дифференциальных уравнений в пакете MathCad

Составим матрицу коэффициентов системы дифференциальных уравнений (2.2) для данных значений $W_1^{(i,j)}$, $W_2^{(i)}$, $i, j = 1, \dots, 3$ (рис. 2.9):

```

N_otr := rows(P0)                                size := N_otr * 2
P := | 0
      | P if cols(P0) = rows(P0) = N_otr ^ rows(P1) = N_otr
fnW_R_U(a,b) := | 0
                 | (P0)_{a,b-N_otr} if b ≥ N_otr ^ a < N_otr
                 | [-(P0)_{a,b-N_otr}] if a = b - N_otr
i := 0..N_otr
fnW(a,b) := | 0
             | if a ≥ N_otr ^ b ≥ N_otr
             | 0
             | - (∑_i |fnW_R_U(i,b)|) if a = b
             | fnW_R_U(a,b) if (a < N_otr) ^ (b ≥ N_otr)
             | (P1)_b if a ≥ N_otr ^ b < N_otr
             | if a < N_otr ^ b < N_otr
             | 0
             | [-(P1)]_a if a = b
W := matrix(size, size, fnW)                      E := identity(size)

W = ( -0.1  0   0  -0.3  0.4  0.6
      0   -0.2  0   0.2  -0.1  0.2
      0   0   -0.3  0.1  0.5  -0.3
      0.1  0.2  0.3 -0.6  0   0
      0.1  0.2  0.3  0   -1   0
      0.1  0.2  0.3  0   0   -1.1 )

```

Рисунок 2.9 - Матрица коэффициентов W системы дифференциальных уравнений в системе MathCad

Вычислим коэффициенты характеристического многочлена матрицы W (рис. 2.10):

$$\begin{aligned}
mW(i) &:= \begin{cases} W & \text{if } i < 2 \\ \left(mW(i-1) - \frac{\text{tr}(mW(i-1))}{i-1} \cdot E \right) \cdot W & \text{if } i \geq 2 \end{cases} \\
fa(i, x) &:= \frac{-\text{tr}(mW(i+1))}{i+1} \\
a &:= \text{matrix}(\text{size}, 1, fa)
\end{aligned}
\qquad
a = \begin{pmatrix} 3.3 \\ 3.87 \\ 1.904 \\ 0.353 \\ 0.014 \\ -1.008 \times 10^{-3} \end{pmatrix}$$

Рисунок 2.10 - Вычисление коэффициентов характеристического многочлена матрицы W в системе *MathCad*

Для характеристического многочлена матрицы W составим матрицу Гурвица (рис. 2.11):

$$\begin{aligned}
ka(i) &:= \begin{cases} 1 & \text{if } i = \text{size} \\ a_{\text{size}-i-1} & \text{if } i \neq \text{size} \end{cases} \\
MPf(i, j) &:= \begin{cases} \text{if } (i < N_{\text{otr}}) \\ \begin{cases} r_e \leftarrow i \cdot 2 + 1 \\ 0 \\ ka(r_e - j) & \text{if } j \leq r_e \end{cases} \\ \text{if } i \geq N_{\text{otr}} \\ \begin{cases} l_e \leftarrow (i - N_{\text{otr}}) \cdot 2 + 1 \\ 0 \\ ka(l_e - j + \text{size}) & \text{if } j \geq l_e \end{cases} \end{cases} \\
MP &:= \text{matrix}(\text{size}, \text{size}, MPf) \\
MP &= \begin{pmatrix} 0.014 & -1.008 \times 10^{-3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1.904 & 0.353 & 0.014 & -1.008 \times 10^{-3} & 0 & 0 \\ 3.3 & 3.87 & 1.904 & 0.353 & 0.014 & -1.008 \times 10^{-3} \\ 0 & 1 & 3.3 & 3.87 & 1.904 & 0.353 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3.3 & 3.87 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Рисунок 2.11 - Составление матрицы Гурвица для матрицы W в системе *MathCad*

На основании необходимого и достаточного признака устойчивости (критерий Рауса-Гурвица) сделаем вывод об устойчивости системы дифференциальных уравнений (2.2) с заданными начальными условиями (2.1), где 1 – означает устойчивое состояние (рис. 2.12):

```

stability := | s ← 0
              | for i ∈ 0 .. size - 1
              |   s ← s + 1 if |submatrix (MP , 0 , i , 0 , i)| > 0

```

stability matrix: yes -1, no - 0.

Рисунок 2.12 - Определение устойчивости в системе MathCad

Из рисунка 2.12 видно, что полученная система дифференциальных уравнений при заданных вероятностях будет устойчива, а это означает, что и рынок труда будет находиться в состоянии равновесия, для значений $W_1^{(i,j)}$, $W_2^{(i)}$ ($i, j = 1, \dots, 3$) и начальных условий (2.1).

С экономической точки зрения устойчивость (2.1), (2.2) в данном примере означает, что в состоянии с уровнем занятости (2.2) при небольших отклонениях от (2.2) система с течением времени снова возвратится к начальному состоянию.

2.5. Выводы

Обобщая материал, изложенный во второй части диссертационного исследования, сделаем краткие выводы:

1. Разработана математическая модель самоорганизации рынка труда для нескольких различных отраслей экономики, позволяющая проанализировать определенные тенденции функционирования рынка рабочей силы.
2. Предложена методика определения устойчивого состояния и динамики рынка труда при перераспределении на нем рабочей силы.
3. Указанная методика реализована в виде программного продукта (с

использованием пакета прикладных программ MathCad).

С помощью разработанной модели самоорганизации рынка труда для нескольких отраслей экономики можно проанализировать только устойчивость рынка труда, проследить определенные тенденции функционирования рынка рабочей силы. Возникает необходимость построения такой математической модели, которая будет учитывать и другие параметры функционирования рынка труда. Для этого можно использовать аппарат теории массового обслуживания.

ГЛАВА 3. ВЕРОЯТНОСТНАЯ МОДЕЛЬ БИРЖИ ТРУДА КАК МЕТОДИКА ВЫЧИСЛЕНИЯ ОСНОВНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК РЫНКА ТРУДА

3.1. Обоснование вероятностного подхода к описанию работы биржи труда

На современном этапе государственного развития в условиях перманентной экономической неустойчивости и риска являются плодотворными подходы и методы имитационного моделирования. Предложенная в главе 2 математическая модель (2.8) дает возможность проследить определенные тенденции функционирования рынка рабочей силы и исследовать рынок на предмет его устойчивости. Неустойчивое состояние рынка труда в условиях становления рыночной экономики может приводить к достаточно сложным переходным процессам и существенно влиять на динамику уровня занятости. Полученные сведения о динамике уровня занятости могут быть использованы для улучшения работы биржи труда, которая является одной из составных частей функционально - организационной структуры рынка труда.

Биржа труда является катализатором состояния рынка труда. Устойчивость или неустойчивость рынка труда повлечет за собой изменения в работе биржи труда, связанные с обслуживанием потоков от безработных с различной интенсивностью. Применение теории массового обслуживания позволяет описать процессы, протекающие на бирже труда.

С точки зрения теории массового обслуживания биржу труда можно рассматривать как систему массового обслуживания, согласующей такие процессы как спрос и предложение на рабочую силу [80]. При этом поток требований от безработных представляет собой простейший. Интенсивностью системы является интенсивность поступления требований от безработных. Моделирование биржи труда позволяет оценить спрос на труд, предложения

труда, а также согласование спроса и предложения на рынке труда.

На основании полученных в процессе моделирования данных можно прогнозировать занятость населения. В свою очередь решение задач прогнозирования занятости населения позволит определить зависимости от основных социально-экономических параметров развития.

Создание моделей биржи труда обеспечит выбор стратегии в сфере занятости, учитывая при этом экономические, политические, социальные аспекты.

Основной задачей моделирования биржи труда является изучение режима функционирования обслуживающей системы и исследование явлений, возникающих в процессе обслуживания. Любое описание системы в математических терминах неизбежно упрощает практическую ситуацию вследствие того, что используются идеализированные понятия [10]. При этом возникают задачи оптимизации: каким образом достичь определенного уровня обслуживания (максимального сокращения очереди или потерь требований) при минимальных затратах, связанных с простоем обслуживающих устройств.

Оптимизацию работы биржи труда можно проводить с двух точек зрения: с точки зрения работодателя или с точки зрения безработных, получающих обслуживание. Построение математических моделей биржи труда позволит решить оптимизационную задачу выбора рациональной структуры системы массового обслуживания с учетом всех обстоятельств и особенностей условий функционирования.

3.2. Разработка вероятностной модели биржи труда

Биржу труда можно интерпретировать как некоторую систему массового обслуживания (СМО) с ожиданием (очередью): отделы биржи – каналы СМО, поток требований от безработных – поток требований в СМО, очередь на бирже – очередь требований в СМО и т.д. [16, 23, 24, 25].

Поток требований в такой СМО обладает свойствами стационарности,

ординарности, без последствия интенсивности λ , а следовательно, является простейшим. Время обслуживания одного требования $T_{об}$ — показательное, с параметром $\mu = const$ определяемым для рассматриваемой системы выражением (1.21), где μ - величина, обратная среднему времени обслуживания одного требования:

$$\mu = \frac{1}{m_{t_{об}}},$$

$$m_{t_{об}} = M[T_{об}].$$

Требование от безработного становится в очередь и ожидает обслуживания. Время ожидания ограничено некоторым сроком $T_{ожс}$; если до истечения этого срока требование не будет принято к обслуживанию, то оно покидает очередь. Срок ожидания $T_{ожс}$ будем считать случайным и распределенным так же по показательному закону, с параметром $\nu = const$, определяемым для рассматриваемой системы выражением (1.23), где параметр ν — величина, обратная среднему времени ожидания в очереди:

$$\nu = \frac{1}{m_{t_{ожс}}},$$

$$m_{t_{ожс}} = M[T_{ожс}].$$

Так как количество безработных, стоящих в очереди на биржу труда, значительно, то в первом приближении будем считать его бесконечно большим.

При показательном законе распределения срока ожидания пропускная способность биржи труда не зависит от того, в каком порядке обслуживаются требования.

Предполагаем, что биржа труда может находиться в следующих состояниях [78]:

- x_0 - ни один отдел не занят (очереди нет),
- x_1 - занят ровно один отдел (очереди нет),
-
- x_k - занято ровно k отделов (очереди нет),

.....

x_n - заняты все n отделов (очереди нет),

x_{n+1} - заняты все n отделов, одно требование стоит в очереди,

.....

x_{n+s} - заняты все n отделов, s требований стоят в очереди,

.....

Обозначим через $p_k(t)$ ($k=0, 1, \dots, n, \dots$) вероятность того, что в момент времени t биржа труда будет находиться в состоянии x_k .

Вероятности $p_k(t)$ удовлетворяют системе бесконечного числа дифференциальных уравнений Колмогорова (1.14) и равенства (1.17):

$$\left. \begin{aligned} \frac{dp_0(t)}{dt} &= -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t), \\ \frac{dp_1(t)}{dt} &= \lambda p_0(t) - (\lambda + \mu)p_1(t) + 2\mu p_2(t), \\ &..... \\ \frac{dp_k(t)}{dt} &= \lambda p_{k-1}(t) - (\lambda + k\mu)p_k(t) + (k+1)\mu p_{k+1}(t), \quad (1 \leq k \leq n-1), \\ &..... \\ \frac{dp_n(t)}{dt} &= \lambda p_{n-1}(t) - (\lambda + k\mu)p_n(t) + (n\mu + \nu)p_{n+1}(t), \\ &..... \\ \frac{dp_{n+s}(t)}{dt} &= \lambda p_{n+s-1}(t) - (\lambda + n\mu + s\nu)p_{n+s}(t) + [n\mu + (s+1)\nu]p_{n+s+1}(t), \\ &..... \\ \sum_{k=0}^{\infty} p_k &= 1. \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

Следует учитывать, что на практике вероятности $p_{n+s}(t)$ становятся значительно малыми при возрастании s , а значит, соответствующие уравнения могут быть отброшены.

В стационарном режиме система (3.1) имеет вид:

$$\left. \begin{aligned}
& -\lambda p_0 + \mu p_1 = 0, \\
& \lambda p_0 - (\lambda + \mu)p_1 + 2\mu p_2 = 0, \\
& \dots\dots\dots \\
& \lambda p_{k-1} - (\lambda + k\mu)p_k + (k+1)\mu p_{k+1} = 0, \quad (1 \leq k \leq n-1), \\
& \dots\dots\dots \\
& \lambda p_{n-1} - (\lambda + n\mu)p_n + (n\mu + \nu)p_{n+1} = 0, \\
& \dots\dots\dots \\
& \lambda p_{n+s-1} - (\lambda + n\mu + s\nu)p_{n+s} + [n\mu + (s+1)\nu]p_{n+s+1} = 0, \\
& \dots\dots\dots \\
& \sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1
\end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

Из соотношений (3.2) можно найти вероятностные характеристики функционального состояния биржи труда [16]:

1) p_k - вероятность нахождения биржи труда в момент времени t в состоянии x_k (занято ровно k отделов, очереди нет):

$$\text{для любого } k < n \quad p_k = \frac{\lambda^k}{k! \mu^k} p_0, \quad (3.3)$$

2) p_n - вероятность нахождения биржи труда в момент времени t в состоянии x_n (занято ровно n отделов, очереди нет):

$$\text{для любого } k = n \quad p_n = \frac{\lambda^n}{k! \mu^n} p_0, \quad (3.4)$$

3) p_{n+s} - вероятность нахождения биржи труда в момент времени t в состоянии x_{n+s} (заняты все n отделов, s требований стоят в очереди):

$$\text{для } k > n \quad (k=n+s) \text{ при любом } s \geq 1 \quad p_{n+s} = \frac{\lambda^{n+s} p_0}{n! \mu^n \prod_{m=1}^s (n\mu + m\nu)}, \quad (3.5)$$

4) p_0 - вероятность нахождения биржи труда в момент времени t в состоянии x_0 (ни один отдел ни занят, очереди нет)

$$p_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^n \frac{\lambda^k}{k! \mu^k} + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\lambda^{n+s}}{n! \mu^n \prod_{m=1}^s (n\mu + m\nu)}}. \quad (3.6)$$

Обозначив $\left. \begin{array}{l} \frac{\lambda}{\mu} = \alpha \\ \frac{\nu}{\mu} = \beta \end{array} \right\}$, где параметр α - среднее число требований,

приходящееся на среднее время обслуживания одного требования, параметр β - среднее число уходов требования, стоящего в очереди, приходящееся на среднее время обслуживания одного требования, тогда формулы (3.3), (3.4), (3.5) и (3.6) примут вид:

1) p_k - вероятность нахождения биржи труда в момент времени t в состоянии x_k (занято ровно k отделов, очереди нет):

$$\text{для любого } 0 \leq k \leq n \quad p_k = \frac{\frac{\alpha^k}{k!}}{\sum_{k=0}^n \frac{\alpha^k}{k!} + \frac{\alpha^n}{n!} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\alpha^s}{\prod_{m=1}^s (n + m\beta)}}, \quad (3.7)$$

2) p_{n+s} - вероятность нахождения биржи труда в момент времени t в состоянии x_{n+s} (заняты все n отделов, s требований стоят в очереди):

для $k > n$ ($k = n + s$) при любом $s \geq 1$

$$p_{n+s} = \frac{\frac{\alpha^n}{n!} \frac{\alpha^s}{\prod_{m=1}^s (n + m\beta)}}{\sum_{k=0}^n \frac{\alpha^k}{k!} + \frac{\alpha^n}{n!} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\alpha^s}{\prod_{m=1}^s (n + m\beta)}}; \quad (3.8)$$

3) p_0 - вероятность нахождения биржи труда в момент времени t в состоянии x_0 (ни один отдел ни занят, очереди нет)

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^n \frac{\alpha^k}{k!} + \frac{\alpha^n}{n!} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\alpha^s}{\prod_{m=1}^s (n+m\beta)}}. \quad (3.9)$$

К вероятностным характеристикам функционального состояния биржи труда можно также отнести математическое ожидание числа требований, находящихся в очереди, m_s и вероятность того, что требование покинет биржу необслуженным P_H [91].

Математическое ожидание числа требований, находящихся в очереди, m_s , определяется из соотношения:

$$m_s = M[s] = \sum_{s=1}^{\infty} s p_{n+s} = \frac{\frac{\alpha^n}{n!} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{s \alpha^s}{\prod_{m=1}^s (n+m\beta)}}{\sum_{k=0}^n \frac{\alpha^k}{k!} + \frac{\alpha^n}{n!} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\alpha^s}{\prod_{m=1}^s (n+m\beta)}}. \quad (3.10)$$

Вероятность того, что требование покинет биржу необслуженным, P_H , определяется из соотношения:

$$P_H = \frac{\beta}{\alpha} \frac{\frac{\alpha^n}{n!} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{s \alpha^s}{\prod_{m=1}^s (n+m\beta)}}{\sum_{k=0}^n \frac{\alpha^k}{k!} + \frac{\alpha^n}{n!} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\alpha^s}{\prod_{m=1}^s (n+m\beta)}}. \quad (3.11)$$

Относительная пропускная способность биржи труда, q , определяется из соотношения:

$$q = 1 - P_H. \quad (3.12)$$

В случае неустойчивого состояния рынка труда биржу труда можно интерпретировать как чистую систему с ожиданием ($\beta \rightarrow 0$), так как увеличение количества требований от безработных повлечет за собой увеличение времени ожидания. Вероятность того, что требование покинет биржу труда необслуженным $P_H = 0$, т. е. безработный обязательно дождется обслуживания

своего требования. При $t \rightarrow \infty$ стационарный режим системы наступит, когда среднее число требований, поступающих за время обслуживания одного требования, не превысит количество обслуживающих каналов, т. е. $\alpha < n$, в противном случае очередь будет неограниченно возрастать.

Пусть $\alpha < n$, тогда при $\beta \rightarrow 0$ формулы (3.7), (3.8), (3.9) и (3.10) примут вид [16]:

1) p_k - вероятность нахождения биржи труда в момент времени t в состоянии x_k (занято ровно k отделов, очереди нет):

$$p_k = \frac{\frac{\alpha^k}{k!}}{\sum_{k=0}^n \frac{\alpha^k}{k!} + \frac{\alpha^{n+1}}{n!(n-\alpha)}} \quad (0 \leq k \leq n); \quad (3.13)$$

2) p_{n+s} - вероятность нахождения биржи труда в момент времени t в состоянии x_{n+s} (заняты все n отделов, s требований стоят в очереди):

$$p_{n+s} = \frac{\frac{\alpha^{n+s}}{n!n^s}}{\sum_{k=0}^n \frac{\alpha^k}{k!} + \frac{\alpha^{n+1}}{n!(n-\alpha)}} \quad (s \geq 0); \quad (3.14)$$

3) p_0 - вероятность нахождения биржи труда в момент времени t в состоянии x_0 (ни один отдел ни занят, очереди нет)

$$p_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^n \frac{\alpha^k}{k!} + \frac{\alpha^{n+1}}{n!(n-\alpha)}}; \quad (3.15)$$

4) m_s - математическое ожидание числа требований, находящихся в очереди:

$$m_s = \frac{\frac{\alpha^{n+1}}{n \cdot n!(1 - \frac{\alpha}{n})^2}}{\sum_{k=0}^n \frac{\alpha^k}{k!} + \frac{\alpha^{n+1}}{n!(n-\alpha)}}. \quad (3.16)$$

3.2.1. Примеры вычисления основных характеристик биржи труда

Пример 3.1. Определить вероятность того, что на бирже труда находится один или хотя бы один безработный, если среднее число безработных, находящихся в данном интервале времени на бирже труда, равно 5.

Решение

1. На основании (1.19) вероятность нахождения одного безработного на бирже труда следующая:

$$P(X = 1) = \frac{(\lambda t)^1}{1!} e^{-5} = 5e^{-5} = 0.034,$$

2. Вероятность того, что на бирже труда будет находиться хотя бы один безработный, равна вероятности того, что на бирже труда будет находиться не менее одного безработного:

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \frac{(\lambda t)^0}{0!} e^{-5} = 1 - e^{-5} = 0.993.$$

Пример 3.2. Определить необходимое количество каналов обслуживания для биржи труда, обладающей пропускной способностью, при которой вероятность получения безработным отказа в обслуживании не превосходило бы 0.01. Поток требований от безработных характеризуется плотностью $\lambda = 0.5$ требований в час, а средняя продолжительность обслуживания – 0.25 часа.

Решение

1. Исходные данные: $\lambda = 0.5$; $\mu = 1/m_{т об} = 4$; $P_{отк}$ должно быть не более 0.01.

2. Аналитические выражения, используемые для расчета (3.3), (3.6).

3. Определяется вероятность отказа для количества линий $k = 1, 2, 3, \dots$, пока $P_{отк}$ не станет меньше или равной 0.01.

Таблица 3.1 - Результаты экспериментов

Число каналов обслуживания	1	2	3	4
Вероятность отказа	0.37727	0.051095	0.01028	0.00273

Анализ таблицы 3.1 показывает, что для удовлетворения предъявляемым

требованиям биржа должна иметь 4 канала обслуживания, тогда $P_{обслуж} = 1 - P_{отк} = 0.99727$, т.е. 99% требований будет обслужено.

Пример 3.3. Для примера 3.2 добавим условие неограниченного времени ожидания. Найти вероятности p_0, p_1, p_2, p_3, p_4 , вероятность наличия очереди P_k и среднюю длину очереди m_s .

Решение.

1. Так как $\alpha < n$, то установившийся режим существует. По формуле (3.12) найдем p_0, p_1, p_2, p_3, p_4 :

$$p_0 \approx 0.882, p_1 \approx 0.110, p_2 \approx 0.007, p_3 \approx 0.0003, p_4 \approx 0.000009.$$

2. Вероятность наличия очереди $P_k = 1 - (p_0 + p_1 + p_2 + p_3 + p_4) = 0.00069$.

3. Среднюю длину очереди определим по формуле (3.14): $m_s \approx 0.0000003$.

Таким образом, полученные вероятности наличия очереди P_k и средняя длина очереди m_s свидетельствуют о том, что поступившее требование будет обслужено практически без задержки.

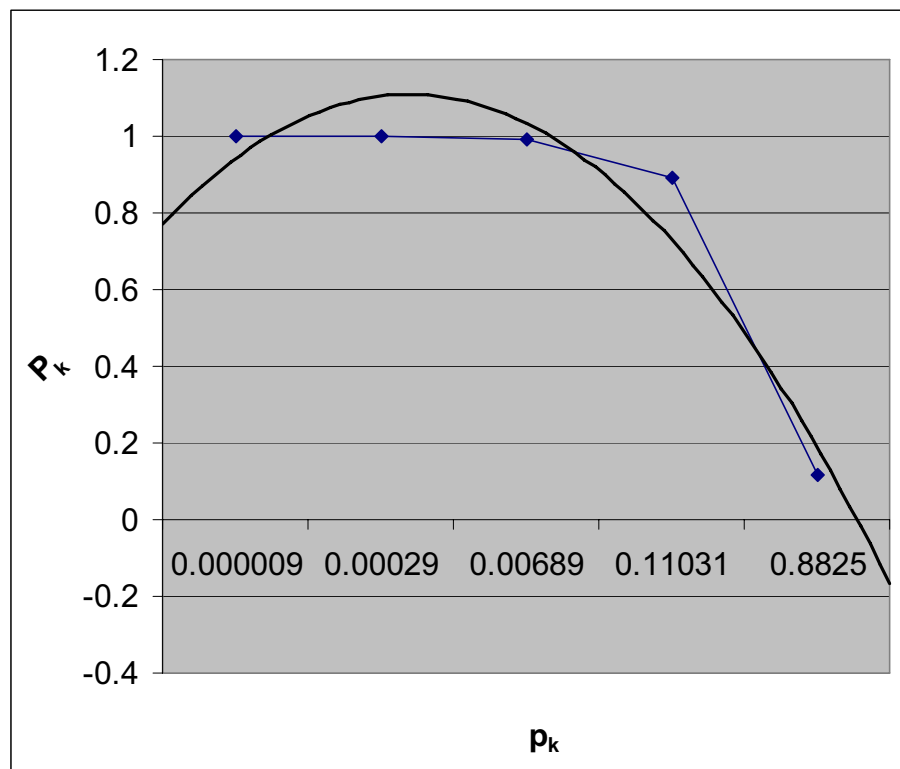


Рисунок 3.1 - Зависимость вероятности наличия очереди P_k от вероятности состояния p_k

На рисунке 3.1 показана зависимость вероятности наличия очереди P_k от

вероятности состояния p_k . Построенная линия тренда демонстрирует тенденцию уменьшения вероятности наличия очереди P_k при увеличении вероятности состояния p_k .

Результаты, полученные в примерах 3.2 и 3.3, свидетельствуют о том, что при заданных интенсивности поступления требований от безработных и средней продолжительности обслуживания среднее время, проведенное в очередях и вероятность занятости биржи труда достаточно малы. Но это не свидетельствует об эффективной работе биржи труда. Одной из характеристик биржи труда является время пребывания требования в очереди. Очевидно, что это время уменьшается за счет увеличения количества обслуживающих устройств. Однако каждое дополнительное устройство требует определенных материальных затрат, при этом увеличивается время бездействия обслуживающего устройства из-за отсутствия требований на обслуживание, что также является негативным явлением.

Непосредственное вычисление формул, в частности (3.7) - (3.11) и (3.13) – (3.16), весьма затруднительно, так как возникают вычислительные трудности суммирования дробей, у которых в знаменателе – факториалы натурального ряда чисел. Использование же эмпирического коэффициента «средней загрузки» 0,79 приводит к существенным погрешностям [72]. Для вычисления параметров $p_0, p_k, p_{n+s}, m_s, P_H$ можно применить методы имитационного моделирования.

3.3. Разработка имитационной модели биржи труда

3.3.1. Особенности реализации имитационной модели биржи труда

Используя аналитический метод, базирующийся на теории массового обслуживания, невозможно получить в явном виде искомые характеристики без упрощения модели. Поэтому будем ориентироваться на использование имитационного подхода [35, 36, 37].

Построение модели биржи труда позволяет значительно сократить материальные и временные ресурсы. Информационная модель позволяет обеспечить унификацию форм документации и внедрение других более рациональных носителей информации; рационализацию схемы документооборота; высвобождение квалифицированных специалистов от выполнения рутинной работы по обработке данных, перечень и содержание промежуточных массивов, исходя из комплексного решения задач комплексной информационной системы.

Биржа труда как составная часть рыночной экономики представляет собой перспективную, динамично развивающуюся систему экономики. Аналитическая разработка биржи труда на современном этапе не дает достаточно убедительных результатов. Экспериментальный же подход не всегда является приемлемым. Эксперимент требует значительных, не всегда оправданных, затрат времени.

Использование результатов экспериментов деятельности биржи труда, полученных в процессе имитационного моделирования, построенных на теоретической базе, дает возможность непосредственно рассматривать ход моделируемых процессов, протекающих на бирже труда. Преимущества подобного подхода связаны, главным образом, с возможностью свободно варьировать рассматриваемые механизмы без значительных затрат времени и финансовых ресурсов. В случае успеха анализ результатов проведенных экспериментов позволит не только рекомендовать разумные принципы организации механизмов работы биржи труда, но и будет способствовать развитию соответствующей теоретической базы [42]. Подобные результаты возможны лишь в том случае, если экономико-математическая модель отвечает определенным требованиям [28, 44, 96] .

Построенная имитационная модель биржи труда, в рамках которой можно адекватно отобразить основные факторы и экономические процессы, протекающие в ней, позволит отобразить ход системных событий при соответствующей формализации поведения и взаимодействия системных

объектов, а также получить обобщенные показатели моделируемого процесса. В результате работы имитационной модели биржи труда в ходе наблюдения за протекающими событиями можно получить статистические данные о наиболее важных характеристиках биржи труда.

В данной работе в качестве инструментального средства имитационного моделирования работы биржи труда выбрана система моделирования GPSS World [9, 90].

3.3.2. Постановка задачи имитационного моделирования биржи труда

Целью имитационного моделирования биржи труда является сбор и анализ основных характеристик процессов, протекающих в ней, а именно:

- времени обслуживания одного требования от безработного;
- времени ожидания обслуживания;
- пропускной способности биржи труда;
- эффективности функционирования биржи труда.

Исходя из этого, значения показателей могут быть получены:

- в отдельных отделах биржи труда;
- в комплексной модели.

В соответствии с целью имитационного моделирования биржи труда рассмотрим следующие варианты:

- расширение или сокращение ресурсов конкретных отделов биржи труда;
- создание новых отделов биржи труда;
- распределение функций между отделами биржи труда;
- использование в процессе работы биржи труда телекоммуникационных сетей.

На основе анализа для оптимизации моделируемых решений рассмотрим параметры:

- а) интенсивности обращения безработных на биржу труда;

б) количества и типов отделов биржи труда.

Исследуемые параметры будем варьировать, используя реальные данные из работы Ставропольского городского центра занятости, кадрового агентства НОУ «Бакалавр» (г. Ставрополь) и данные анализа [3, 66].

Построенная имитационная модель биржи труда способствует получению и анализу статистики использования ресурсов, на которые существенное влияние оказывают характеристики потоков поступления требований от безработных.

В исследуемой имитационной модели работы биржи труда введем следующие характеристики:

- интенсивность поступления требований безработных в различные отделы биржи труда;
- время ожидания обслуживания в отделах биржи труда;
- время обслуживания требования от безработного;
- распределение ресурсов между отделами биржи труда для выполнения соответствующих функций;
- взвешенное среднеквадратическое отклонение, характеризующее степень рассеяния случайной величины относительно своего среднего значения;
- коэффициент использования (доля времени моделирования) отделов биржи труда.

Полученные в результате имитационного моделирования экспериментальные данные представим в отчетах и графиках, характеризующих функционирование биржи труда.

3.3.3. Анализ функциональной структуры модели биржи труда

На биржу труда с несколькими каналами обслуживания поступают требования от безработных. Поступающие требования от безработных образуют простейший поток (см. п. 1.6.2). Интервалы времени поступления

требований от безработных распределены по экспоненциальному закону. Время обслуживания требования от безработного специалистами отделов первичного и повторного приема биржи труда также распределено по экспоненциальному закону, обслуживание требования от безработного специалистами других отделов распределено равномерно, т. к. время обслуживания регламентируется порядком работы, установленным на бирже труда. Обслуживание требований от безработных производится по мере поступления: первым пришел - первым обслужился. Под обслуживанием требования от безработного понимается прием безработного специалистом того или иного отдела биржи труда. Согласно [1] безработные регистрируются в службе занятости в соответствии с порядком, установленным законом, в следующей последовательности:

1. Первичная регистрация незанятых граждан.
2. Регистрация незанятых граждан в целях поиска подходящей работы.
3. Регистрация граждан в качестве безработных.
4. Перерегистрация безработных граждан.

Проанализировав функциональную структуру работы Ставропольского городского центра занятости за 2003 год (см. приложение 2), выделим следующие основные отделы биржи труда:

- отдел первичного приема;
- отдел вторичного приема;
- консультационный отдел;
- отдел переобучения;
- отдел предоставления работы.

При составлении модели следует иметь в виду, что требование от безработного последовательно поступает в отдел первичного приема, затем в отдел вторичного приема. Моделирование в консультационном отделе, отделе переобучения и отделе предоставления работы происходит параллельно. Под обслуживанием в консультационном отделе понимается консультирование различными специалистами, например, психологом, юристом и т. д. Функционирование модели имеет циклический характер, соответствующий

реальной последовательности этапов обслуживания безработного на бирже труда. Следовательно, модельные события протекают в дискретном времени. Единицей времени является модельный такт.

В процессе составления модели можно выделить три этапа обслуживания безработного на бирже труда.

На первом этапе (предварительном) безработный обращается на биржу труда за содействием в трудоустройстве и в десятидневный срок должен быть поставлен на учет как ищущий работу [1]. В противном случае обслуживание безработного на бирже труда прекращается.

На втором этапе (обслуживания) из поставленных на учет определяются те, которые признаются безработными с предоставлением полного социального пакета. Поступающие требования от безработных рассматриваются на различных уровнях, до её представления к утверждению. Замечания и комментарии специалистов предметной области включаются в модель и процесс валидации повторяется, до тех пор, пока не будет получен нужный результат, т. е. безработному предоставляется работа, отвечающая всем нормативным требованиям и запросам безработного.

На третьем этапе (исполнения) выполняются мероприятия по удовлетворению поступивших требований от безработных. Безработные снимаются с учета на бирже труда по истечению срока, установленного законодательством Российской Федерации.

Имитация обслуживания на указанных этапах регулируется государственными актами.

Существует три вида циклов информационного обмена, используемых в модели [40]:

- 1) цикл сбора данных;
- 2) проверки соответствия данных правилам и концепции сформированной модели;
- 3) цикл утверждения отобранных данных.

Каждый из трех циклов может многократно повторяться во время

информационного моделирования в каждом из определенных отделов биржи труда.

Цикл сбора данных начинается на первом этапе. Его цель заключается в установлении основы документирования, из которой извлекаются фундаментальные свойства информации, представленной в модели. Важность этого цикла заключается в том, что на последующих этапах приходится заново возвращаться к источникам этой документации для её коррекции и уточнения. Поэтому цикл сбора данных рассматривается как повторяющаяся, а не однократная функция.

Получение качественной первичной информации одно из важных условий плодотворной работы на всех этапах моделирования. На долю первичной информации обычно приходится до 60 - 70% общего объема учетной информации. Качество первичной информации существенно влияет на качество всего процесса функционирования биржи труда, а также статистического, бухгалтерского и оперативного учета. Учитывая, что до 80% ошибок человек допускает на начальной стадии учетного процесса, следует максимально снизить затраты ручного труда в процессе подготовки первичной информации, а также совершенствовать методологию первичного учета.

Сущность цикла валидации заключается в том, что этот процесс повторяется, до тех пор, пока не будет получен приемлемый результат [8].

Цикл утверждения отобранных данных заключается в оценке развернутой модели для определения её соответствия целям разработки. Здесь возможно, чтобы отдельные подсистемы модели были проверены на соответствие валидности построенной модели заново. Также может быть выявлено, что модель недостаточно полно позволяет оценить уровень (этап) разработки, и необходимо продолжить исследования и моделирование.

Цикл утверждения отобранных данных обычно повторяется более одного раза в процессе моделирования. Он обычно встречается в конце этапа, хотя редко применяется для каждого этапа. Окончательный цикл утверждения отобранных данных должен находиться в конце третьего этапа.

Источником данных для использования в процессе моделирования стала информация из карточек персонального учета Ставропольского городского центра занятости населения, а также статистика обращений безработных в кадровое агентство НОУ «Бакалавр» (г. Ставрополь).

Таблица 3.2. - Затраты на содержание ГУ Ставропольский городской центр занятости населения в 2003 году (тыс. руб.)

	2002 год	2003 год	2003г в % к 2002г
Затраты всего	6042,2	5373,5	88,9
в т.ч. на оплату труда	3048,0	3012,8	98,8
Затраты на 1-го работника	91,6	81,4	88,9
в т.ч. по фонду оплаты труда	46,2	45,7	98,9

Оценить экономическую эффективность функционирования биржи труда можно на основании данных аналитического отчета о деятельности Ставропольского городского центра занятости населения за 2003 год, учитывая численность работников центра и затраты на их содержание (см. табл. 3.2).

Численность работников, согласно штатному расписанию, в 2003 году составила 68 человек. Фактическая численность работников центра занятости по состоянию на 01.01.2004 составила 66 человек. По итогам 2003 года средняя стоимость обучения одного безработного составляет 3500 руб.

Промоделируем функционирование биржи труда в течение различных интервалов времени. По результатам компьютерного эксперимента с использованием системы моделирования GPSS World получим статистику введенных основных характеристик процессов протекающих на бирже труда. Оценим возможные показатели качества биржи труда и дадим рекомендации по ее совершенствованию и модернизации, а также оценим убытки, связанные с необходимостью повторной обработки требований от безработных, учитывая при этом затраты на доработку одного требования от безработного.

3.3.4. Разработка структуры модели биржи труда

Достаточно просто и наглядно представим процесс функционирования биржи труда в системе моделирования GPSS World с помощью Q-схемы (см. приложение 4) [50, 68, 88, 89, 93, 98].

Биржи труда представляет собой многоканальное устройство. Q-схема биржи труда состоит из источника И1, канала С1 и накопителя для хранения требований первой фазы Н1, источника И2, канала С2 и накопителя для хранения требований второй фазы Н2. Источник И1 имитирует первичное поступление требований от безработных, а источник И2 – повторное поступление требований от безработных. Также имеются накопители для хранения требований Н3, Н4, Н5, которые стоят в местах возникновения очереди. Канал С1 служит для предварительной обработки требований, поступающих от безработных, каналы С2, Р, К, Об, обслуживают требования от безработных в модели. Каналы Р, К, Об представляют собой параллельно работающие одноканальные устройства. Интенсивность входного потока требований от безработных равна λ_1 , повторного потока требований от безработных равна λ_2 , интенсивность обслуживания в каждом из отделов С1, С2, Р, К, Об соответственно равна $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5$.

Для того чтобы модель была стационарна, каждая система модели должна быть стационарна, т.е. должно выполняться следующее условие [15]:

$$\lambda_i / (k_i \cdot \mu_i) \leq 1, \quad i = 1 \dots N,$$

где N - количество систем,

λ_i - интенсивность входного потока требований в i -ю систему;

k_i - число каналов обслуживания в i -й системе;

μ_i - интенсивность обслуживания одного канала в i -й системе.

Если хотя бы для одной системы условие не выполняется, то модель не справится с потоком требований. В этом случае необходимо увеличивать число каналов обслуживания для соответствующей системы, либо перераспределить поток требований от безработных. Например, если создается очередь в тот или

иной отдел, то в целях разгрузки потока требований можно подключить к работе другой отдел.

Введем идентификаторы для построения модели:

- 1) Sp1 – отдел первичного приема требований от безработных с одним каналом обслуживания;
- 2) Sp2 – отдел вторичного приема требований от безработных с одним каналом обслуживания;
- 3) SpQ1 – очередь требований от безработных в отдел первичного приема;
- 4) SpQ2 – очередь требований от безработных в отдел вторичного приема;
- 5) Rab – отдел предоставления работы с одним каналом обслуживания;
- 6) RabQ – очередь требований от безработных в отдел предоставления работы;
- 7) Kon – консультационный отдел приема требований от безработных с одним каналом обслуживания;
- 8) KonQ – очередь требований от безработных в консультационный отдел;
- 9) Ob – отдел переобучения с одним каналом обслуживания;
- 10) ObQ – очередь требований в отдел переобучения;
- 11) VrSp1 – имя таблицы, в которой будет табулироваться время пребывания требования от безработного в отделе первичного приема;
- 12) VrSp2 – имя таблицы, в которой будет табулироваться время пребывания требования от безработного в отделе вторичного приема;
- 13) VrKon – имя таблицы, в которой будет табулироваться время пребывания требования от безработного в консультационном отделе;
- 14) VrOb – имя таблицы, в которой будет табулироваться время пребывания требования от безработного в отделе переобучения;
- 15) VrRab – имя таблицы, в которой будет табулироваться время

пребывания требования от безработного в отделе предоставления работы;

- 16) VerObrSp1 - вероятность обслуживания требования в отделе Sp1;
- 17) VerObrSp2 - вероятность обслуживания требования в отделе Sp2;
- 18) VerObrRab - вероятность обслуживания требования в отделе Rab;
- 19) VerObrKon - вероятность обслуживания требования в отделе Kon;
- 20) VerObrOb - вероятность обслуживания требования в отделе Ob;
- 21) VerBirga - вероятность обслуживания требования на бирже труда;
- 22) VOtk - вероятность отказа в обслуживании требования на бирже

труда.

По данным центра занятости г. Ставрополя в 2003 году за содействием в трудоустройстве обратилось 49,2 тыс. чел., поставлены на учет как ищущие работу - 13,24 тыс. чел., из поставленных на учет признаны безработными 4,9 тыс. чел.. Службой занятости трудоустроено с учетом переобучения 8,1 тыс. чел. За 2003 год на профессиональное обучение направлено 1,3 тыс. чел.

На основании этих данных плотность потока освобождений μ для отделов С2, Р, К, Об биржи труда будет соответственно равна 26.9 %, 37.0 %, 9.8 %, 61.2 %.

В соответствии с Q-схемой и введенными идентификаторами построим модель функционирования биржи труда в виде последовательности блоков, включая элементы, предназначенные для управления моделированием на языке GPSS World (см. приложение 4) [9].

Последовательность блоков в модели соответствует последовательности ситуаций, в которых оказывается безработный на бирже труда. Требования от безработных поступают в отделы биржи труда, если необходимо, то ждут очереди, затем обслуживаются специалистами первичного и вторичного приемов. Затем требование проходит параллельное обслуживание в отделах Р, К, Об.

При положительном решении вопроса, т. е. в случае, когда безработный принимает предложенный вариант работы, требование от безработного покидает систему, в противном случае возвращается в отдел вторичного приема

на дообслуживание.

3.3.5. Результаты имитационного моделирования биржи труда

Промоделируем в системе GPSS World функционирование биржи труда в течение одного рабочего дня (8 часов = 480 минут), десяти рабочих дней (8 часов x 10 дней = 4800 минут). Рассмотрим различные варианты модели, изменяя количество отделов биржи труда или перераспределяя их функции.

Проанализируем выходную статистику построенной модели, при заданных условиях моделирования [9].

Разброс результатов моделирования при варьировании числа моделируемых тактов от 50 до 10000 не превышает 1%.

3.3.5.1. Аналитический обзор результатов серии экспериментов

Подробное изложение результатов эксперимента приводится для одного набора базовых показателей участников биржи труда, представленных в табл. 3.3.

Анализ серии экспериментов позволил выявить ряд устойчивых тенденций в поведении требований от безработных (на примере Ставропольского городского центра занятости населения).

1. Рассматриваемая организация биржи труда дает заметный положительный результат, когда количество поступающих требований от безработных превышает определенный порог (для данной серии 3 мин). При количестве поступающих требований от безработных ниже этого порога взаимозависимость отделов биржи труда ослабевает, а эффект их организованности существенно снижается либо становится вообще незаметным.

2. Вероятность занятости моделируемой биржи труда для всех отделов наибольшего значения достигает при интенсивности поступления требований равной 6 мин.

3. Несмотря на то, что минимальными затраты будут при времени поступлении требований от безработных равном 8 мин., это решение не будет оптимальным. В этом случае будут малые вероятности занятости биржи труда, т.е. отделы биржи труда будут простаивать основную часть периода моделирования. При увеличении времени между поступлениями требований от безработных их количество уменьшается, но при этом и уменьшается время, проведенное в очередях.

Промоделируем в системе GPSS World функционирование биржи труда в течение одного рабочего дня (8 часов = 480 минут) (см. приложение 4).

Конкретные результаты рассматриваемой серии представлены на рисунках 3.2 - 3.6, в таблицах 3.3 - 3.4, приложениях 8 - 12.

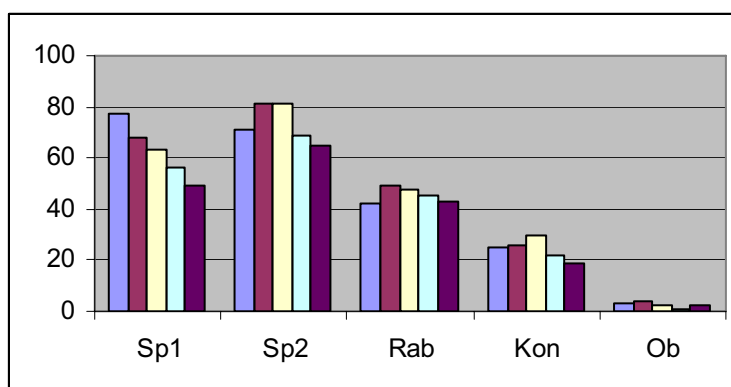


Рисунок 3.2 - Количество обслуженных требований по отделам

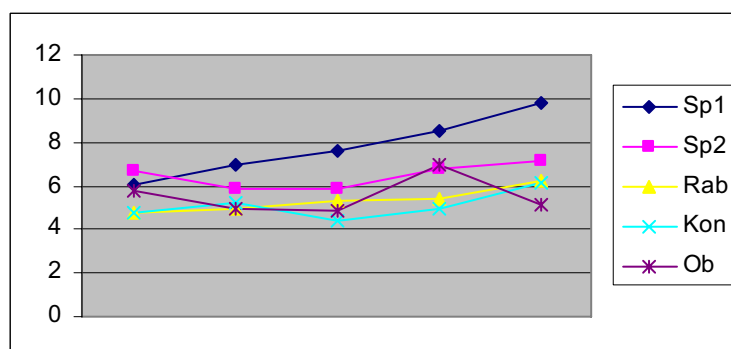


Рисунок 3.3 - Среднее время занятия отдела одним безработным

Результаты имитационных экспериментов представлены в таблице 3.3.

Таблица 3.3 - Результаты имитационных экспериментов по отделам

Содержание	№ эксперимента	Sp1	Sp2	Rab	Kon	Ob
Интенсивность обслуживания требований	1	5	7±3	5±3	5±3	5±3
	2	6	6±3	5±3	5±3	5±3
	3	7	6±3	5±3	5±3	5±3
	4	8	7±3	6±3	5±3	5±3
	5	9	7±3	6±3	6±3	5±3
Количество обслуженных требований	1	77	71	42	25	3
	2	68	81	49	26	4
	3	63	81	48	30	2
	4	56	69	45	22	1
	5	49	65	43	19	2
Коэффициент использования отдела	1	0.977	0.986	0.416	0.249	0.036
	2	0.982	0.984	0.501	0.280	0.041
	3	0.998	0.982	0.528	0.273	0.020
	4	0.998	0.972	0.511	0.229	0.014
	5	0.998	0.968	0.554	0.244	0.021
Среднее время занятия отдела одним безработным	1	6.091	6.667	4.751	4.787	5.804
	2	6.929	5.830	4.903	5.176	4.925
	3	7.603	5.822	5.279	4.362	4.885
	4	8.554	6.763	5.450	4.988	6.948
	5	9.776	7.145	6.189	6.153	5.143

Из таблицы 3.3 видно, что с увеличением интенсивности обслуживания требований в отделах биржи труда уменьшается количество обслуженных требований от безработных, так как данные величины являются обратно пропорциональными (рис. 3.2). Также увеличивается время на обслуживание безработного (рис. 3.3).

Высокий коэффициент использования отделов Sp1 и Sp2 свидетельствует о большой их загруженности (рис. 3.4). Оптимальным коэффициент

использования является в отделе Rab.

Вероятность занятости моделируемой биржи труда для всех отделов наибольшего значения достигает при интенсивности поступления требований равной 6 мин.

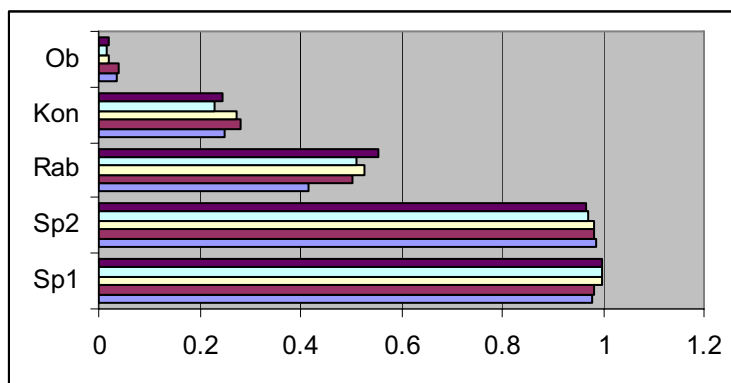


Рисунок 3.4 - Вероятность занятости отделов

Время, проведенное безработными в очереди в тот или иной отдел, представлено в таблице 3.4.

Таблица 3. 4 - Сведения об очередях по отделам

Содержание	№ эксперимента	Sp1	Sp2	Rab	Kon	Ob
1	2	3	4	5	6	7
Интенсивность обслуживания требований	1	5	7±3	5±3	5±3	5±3
	2	6	6±3	5±3	5±3	5±3
	3	7	6±3	5±3	5±3	5±3
	4	8	7±3	6±3	5±3	5±3
	5	9	7±3	6±3	6±3	5±3
Количество безработных, прошедших через очередь	1	132	123	42	25	3
	2	146	126	49	27	4
	3	154	120	48	30	2
	4	162	116	45	22	1
	5	152	99	43	19	2
Среднее время пребывания в очереди	1	106.13	114.87	0.17	0.14	0
	2	124.76	87.35	0.38	0.42	0
	3	144.44	87.36	1.05	0.04	0
	4	166.95	96.89	0.48	0.03	0
	5	166.82	95.49	0.65	0.21	0

Среднее время, проведенное в очередях с учетом всех входов, достигает максимального значения в отделе Sp1 при времени поступления требований равном 9 мин. и времени обслуживания 7 мин.

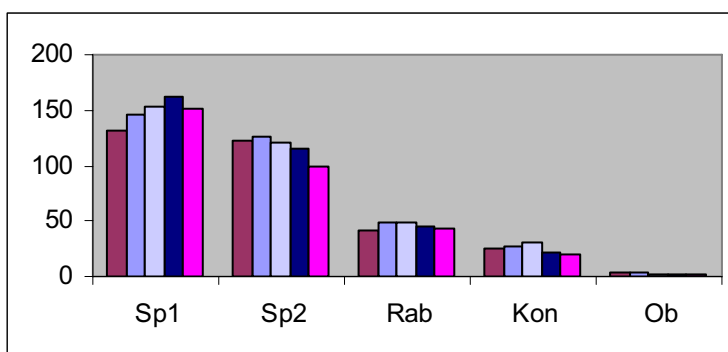


Рисунок 3.5 - Количество безработных по отделам, прошедших через очередь

Среднее время, проведенное в очереди, для биржи труда наименьшее значение принимает при интенсивности поступления требований равной 5 мин. (рис. 3.5, 3.6).

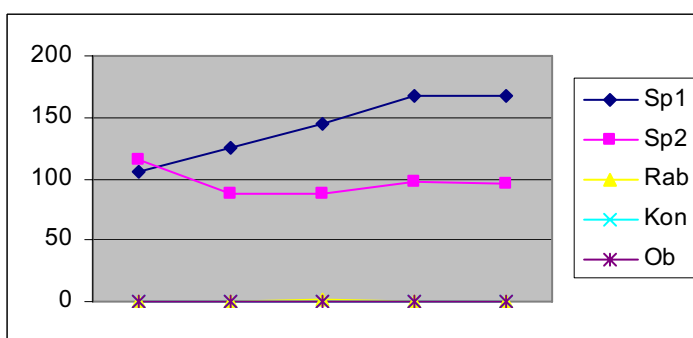


Рисунок 3.6 - Среднее время пребывания безработных в очереди

С увеличением интенсивности поступления требований от безработных в отделах Sp1 и Sp2 наблюдается устойчивая тенденция уменьшения вероятности их обслуживания, а для отделов Rab, Kon и Ob характерна стабильность в обслуживании (см. табл. 3.5, рис. 3.7).

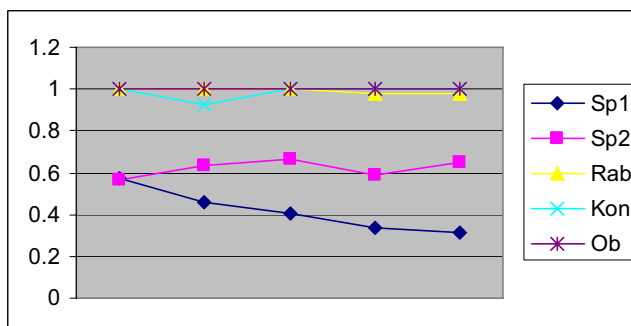


Рисунок 3.7 - Вероятность обслуживания безработных

В связи с необходимостью повторной обработки требований от безработных, затраты на обслуживание требования от безработного могут быть увеличены. В таблице 3.6 приведены максимальные убытки биржи труда за один день работы, исходя из того, что затраты на доработку одного требования составляют 135.67 руб. Таким образом, дополнительные расходы могут составить более 10 000 рублей в день (рис. 3.8.).

Таблица 3. 5 - Сведения по таблицам

Содержание	№ эксперимента	Sp1	Sp2	Rab	Kon	Ob
Интенсивность обслуживания требований	1	5	7±3	5±3	5±3	5±3
	2	6	6±3	5±3	5±3	5±3
	3	7	6±3	5±3	5±3	5±3
	4	8	7±3	6±3	5±3	5±3
	5	9	7±3	6±3	6±3	5±3
Средневзвешенное значение табулируемого аргумента	1	94.14	168.50	173.70	180.64	110.18
	2	119.16	145.89	147.79	147.15	141.77
	3	139.88	153.75	171.30	141.95	132.05
	4	168.48	164.71	167.59	179.13	71.40
	5	159.84	148.67	153.46	146.67	241.96
Взвешенное среднеквадратичное отклонение	1	68.38	107.42	112.77	103.71	47.94
	2	81.89	102.30	104.62	89.84	86.78
	3	94.12	95.78	104.69	81.27	96.65
	4	113.67	108.77	116.35	96.27	0
	5	116.55	92.29	98.96	92.28	111.99
Вероятность обслуживания	1	0.576	0.569	1.0	1.0	1.0
	2	0.459	0.635	1.0	0.926	1.0
	3	0.403	0.667	1.0	1.0	1.0
	4	0.340	0.586	0.978	1.0	1.0
	5	0.316	0.646	0.977	1.0	1.0

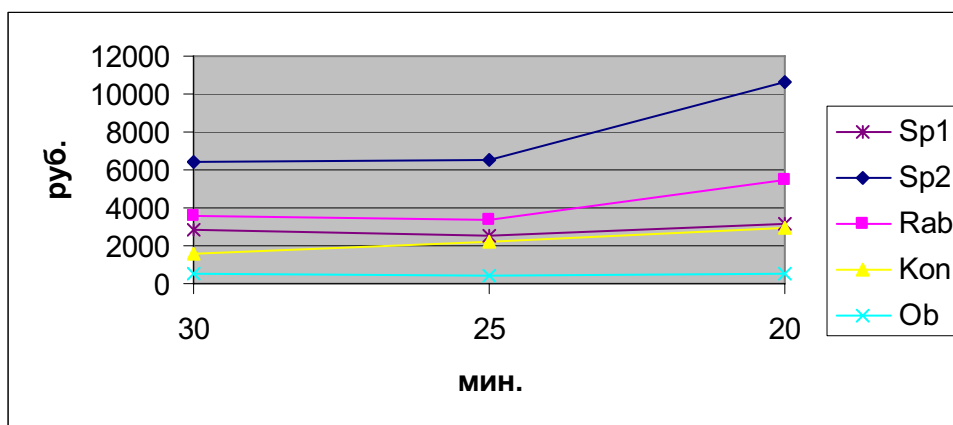


Рисунок 3.8 - Зависимость затрат на доработку одного требования от безработного от интенсивности поступления требования

Промоделируем в системе GPSS World функционирование биржи труда в течение десяти рабочих дней (8 часов x 10 дней = 4800 минут) (см. приложение 4). Аналогично можно моделировать функционирование биржи труда на различных временных интервалах с целью прогнозирования ситуации.

Таблица 3. 6 - Расходы биржи труда при повторной обработке требований

Интенсивность поступления требований от безработных, мин.	Максимальные убытки, руб.				
	Sp1	Sp2	Rab	Kon	Ob
9	2849.1	6376.5	3527.4	1628	542.68
8	2577.7	6512.2	3391.8	2170.7	407.01
7	3120.4	10582	5426.8	2984.7	542.68

На рисунке 2 показана вероятность обслуживания требований от безработных на бирже труда.

Статистика проведенных экспериментов свидетельствует о том, что работа биржи труда требует корректировки различных временных этапах. Так, например, с увеличением времени будет накапливаться очередь. Поэтому необходимо следить за ситуацией по отделам и вовремя регулировать процесс обслуживания безработных.

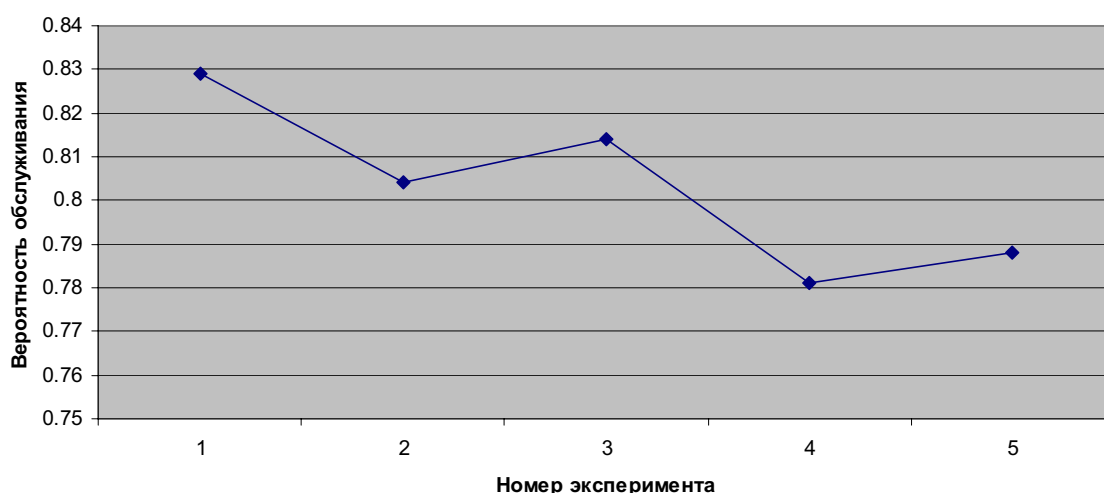


Рисунок 3.9 - Вероятность обслуживания

Таким образом, после проведения серии экспериментов построенной модели биржи труда можно выделить следующие устойчивые тенденции:

1. Предложенная организация биржи труда дает заметный положительный результат в процессе моделирования.

2. Варьирование показателей интенсивности поступления требований от безработных, интенсивности их обслуживания позволяет определить оптимальное количество отделов биржи труда.

3. Одна из устойчиво наблюдаемых закономерностей состоит в том, что наибольшая нагрузка в процессе обслуживания ложится на отделы первичного и повторного обслуживания.

Анализируя данные таблиц 3.3 – 3.5, статистику проведенных экспериментов (см. приложения 4) сделаем следующие выводы об очередях:

- чем больше интенсивность поступления требований от безработных, обслуживаемых вне очереди, тем выше максимальное содержимое очереди, время пребывания одного требования в очереди, а также вероятность занятости устройства;

- чем меньше интенсивность поступления требований от безработных из первого источника, тем больше максимальное содержимое очереди и время пребывания в очереди.

Поэтому для более эффективной работы биржи труда оптимальное время поступления требований от безработных должно быть в пределах 6 мин. или 7 мин. При этом время обслуживания требований от безработных в отделах Sp1, Sp2, Rab, Kon должно быть соответственно 6 мин., 5 мин., 5 мин., 5 мин. Так как количество обслуженных требований от безработных в отделе Ob недостаточно мало, необходимо организовать работу в нем определенным образом, например, один или два раза в неделю.

В связи с тем, что основная нагрузка поступающего потока требований от безработных ложится на отделы Sp1 и Sp2, то целесообразно организовать в них параллельную работу нескольких специалистов.

При большом потоке требований от безработных возможно включение в работу отделов Rab, Kon.

Несмотря на то, что минимальными затраты будут и при времени поступлении требований от безработных, равном 8 мин., это решение не будет оптимальным, так как тогда будут малые вероятности занятости биржи труда, т.е. отделы биржи труда будут простаивать основную часть периода моделирования. При увеличении времени между поступлениями требований от безработных их количество уменьшается, но при этом и уменьшается время, проведенное в очередях.

Указанные узкие места работы биржи труда можно ликвидировать с помощью создания телекоммуникационных сетей. Создание электронной базы данных требований от безработных, с присвоением каждому из них идентификационного номера, позволит существенно улучшить работу биржи труда.

3.4. Выводы

Полученные данные в результате проведенных экспериментов позволяют сделать следующие выводы.

1. Вероятностная модель биржи труда позволяет определить основные характеристики функционального состояния биржи труда для устойчивого и

неустойчивого состояний рынка труда.

2. Имитационная модель биржи труда, реализованная на языке GPSS позволяет эффективно и экономично проводить сбор данных и анализ состояния биржи труда, не прибегая к натурным экспериментам.

3. Выполнение указанных в работе условий функционирования биржи на рынке труда позволяет существенно повысить эффективность ее работы с безработными по своевременному обеспечению их работой.

4. Модельные эксперименты показали, что наибольший выигрыш рынок труда получает в том случае, когда предложенная первоначально вакансия на бирже труда удовлетворит требование от безработного.

5. С помощью созданного имитационного модельного комплекса удалось провести количественный анализ результатов функционирования биржи труда: интенсивности поступления требований безработных в различные отделы биржи труда; времени ожидания обслуживания в отделах биржи труда; времени обслуживания требования от безработного; распределения ресурсов между отделами биржи труда для выполнения соответствующих функций; коэффициента использования (доля времени моделирования) отделов биржи труда.

6. Узкие места функционирования биржи труда, выявленные в процессе имитационного моделирования, можно ликвидировать, используя телекоммуникационные сети.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведенные в диссертационной работе исследования позволили разработать модель самоорганизации рынка труда для нескольких отраслей экономики, исследовать рынок труда на устойчивость и определить основные его характеристики (параметры), разработать вероятностную модель биржи труда. Получены следующие научные и практические результаты.

1. Разработана аналитическая модель самоорганизации рынка труда многоотраслевой экономической системы, позволяющая исследовать на устойчивость конкретный ее сектор при возмущении начального его состояния. Данная модель является обобщением начатого в этом направлении исследования для одной отрасли экономики, предпринятого А.Н. Васильевым [12]. Приведены примеры, иллюстрирующие использование предложенной модели.

2. Разработана программная реализация модели самоорганизации рынка труда для нескольких отраслей экономики.

3. Предложена методика исследования на устойчивость процесса самоорганизации рынка труда. Данная методика реализована на ЭВМ с помощью пакета прикладных программ MathCad.

4. Разработана вероятностная модель функционирования биржи труда, использующая методы теории массового обслуживания и позволяющая определить основные вероятностные характеристики биржи.

5. С помощью системы моделирования GPSS World разработана имитационная модель функционирования биржи труда, позволяющая воспроизводить процесс ее работы.

6. Проведен анализ данных, полученных в результате моделирования, установлено, что выполнение указанных в работе условий функционирования биржи на рынке труда позволяет существенно повысить эффективность ее работы с безработными по своевременному обеспечению их работой.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Закон «О занятости населения в Российской Федерации». – М. – 1991. - № 1032-1.
2. MATHCAD 6.0 PLUS. Финансовые, инженерные и научные расчеты в среде Windows 95. /Перевод с англ. – М.: Информационно-издательский дом «Филинь», 1996. – 712 с.
3. Акинин П.В., Гаевский В.В., Рязанцев С.В. Экономика Ставропольского края. – Ставрополь: Книжное издательство, 2000. – 317 с.
4. Амосов А.А., Дубинский Ю.А., Копченова Н.В. Вычислительные методы для инженеров: Учебное пособие. – М.: Высш. шк., 1994. – 65 с.
5. Асеев А. А., Боев В. Д., Кулешов И. А., Сеченев Д. М. Основы моделирования систем связи и автоматизации на GPSS/PC: Учеб. пособие. - СПб.: ВУС, 2000. - 230 с.
6. Афанасьев В. Н. и др. Математическая теория конструирования систем управления: Учебник для вузов / В.Н. Афанасьев, В.Б. Колмановский, В.Р. Носов. - 2-е изд., доп. - М.: Высшая школа, 1998 – 574 с.
7. Бережная Е.В., Бережной В.И. Математические методы моделирования экономических систем: Учеб. пособие. – М.: Финансы и статистика, 2001. – 368 с.
8. Бесслер Р., Дойч А. Проектирование сетей связи: Справочник: Пер. с нем. – М.: Радио и связь, 1988. -272 с.
9. Боев В. Д. Моделирование систем. Инструментальные средства GPSS World. - Санкт-Петербург:ВНУ-Санкт-Петербург, 2004 г. - 368 с.
10. Бусленко Н.П. Моделирование сложных систем. – М.: Наука, 1978. – 400 с.
11. Варжапетян А. Г., Глушенко В. В. Системы управления: исследование и компьютерное проектирование: Учеб. пособие. - М.: Вузовская книга, 2000. - 328 с.
12. Васильев А.Н. Модель самоорганизации рынка труда // Экономика

и математические методы. - 2001. Том 37. № 2. - С. 123-127.

13. Васильев Я.Т. Совершенствование региональной занятости населения в условиях становления рынка труда: Автореф. дисс. ... докт. экон. наук. М. 1997.

14. Васильков Ю.В., Василькова Н.Н. Компьютерные технологии вычислений в математическом моделировании: Учеб. пособие. – М.: Финансы и статистика, 2002. - 256 с.: ил.

15. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Прикладные задачи теории вероятностей. – М.: Радио и связь, 1983. – 415 с.

16. Вентцель Е.С. Теория вероятностей: Учеб. для вузов. - 7-е изд. стер. – М.: Высш. шк., 2001. – 575 с.: ил.

17. Вержбицкий В.М. Численные методы (линейная алгебра и нелинейные уравнения): Учеб. пособие для вузов. – М.: Высш. шк., 2000. – 266 с.: ил.

18. Вержбицкий В.М. Численные методы (Математический анализ и обыкновенные дифференциальные уравнения): Учеб. пособие для вузов. – М.: Высш. шк., 2001. – 382 с.: ил.

19. Волков И.К., Зуев С.М., Цветкова Г.М. Случайные процессы: Учебник для вузов / Под редакцией В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. – 2-е изд., стереотип. – М.: Изд-во МГТУ им. Баумана, 2003. – 448 с.

20. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. - М.: Наука, 1966. – 576 с.

21. Глухов В.В., Медников М.Д., Коробко С.Б. Математические методы и модели для менеджмента. – СПб.: Лань, 2000. – 480 с.

22. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике: Учеб. пособие для вузов. - 3-е изд., перераб. и доп. – М.: Высш. шк., 1979. – 400 с.: ил.

23. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика: Учеб. пособие для вузов. - Изд. 6-е, стер. – М.: Высш. шк., 1998. – 479 с.: ил.

24. Гнеденко Б.В., Коваленко И.Н. Введение в теорию массового обслуживания. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. – 336 с.

25. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей: Учебник – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. – 448 с.
26. Гнеденко Б.В., Хинчин А.Я. Элементарное введение в теорию вероятностей: Учебник – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1976. – 168 с.
27. Голенко Д.И. Моделирование и статистический анализ псевдослучайных чисел на электронных вычислительных машинах. – М.: Наука, 1965. – 228 с.
28. Горчаков А.А., Орлов И.В. Компьютерные экономико-математические модели. – ЮНИТИ, 1995. – 134 с.
29. Добронравова И.С. Синергетика: становление нелинейного мышления. – К.: Лыбидь, 1990. – 152 с.
30. Дьяконов В.П., Абраменкова И.В. MathCad 7 в математике, физике и в Internet. – М.: Нолидж, 1998. – 352 с.
31. Дьяконов В.П. Компьютерная математика. Теория и практика. – М.: Нолидж, 2001. – 1296 с.
32. Дьяконов В.П. Справочник по MathCad PLUS 6.0 – М.: СК Пресс, 1997. – 336 с.
33. Дьяконов В.П. Справочник по MathCad 7.0 PRO – М.: СК Пресс, 1998. – 352 с.
34. Емельянов А.А. и др. Имитационное моделирование экономических процессов: Учебное пособие / А.А. Емельянов, Е.А. Власова, Р.В. Дума; Под ред. А.А. Емельянова. – М.: Финансы и статистика, 2004. – 368 с.: ил.
35. Зайцева И.В. Имитационное моделирование работы биржи труда: материалы 49-й научно-методической конференции преподавателей и студентов «Университетская наука – региону». – Ставрополь: Изд-во СГУ, 2004. – 201 с.
36. Зайцева И.В. Использование имитационного моделирования для анализа процессов биржи труда // Актуальные вопросы социальной теории и практики: Сборник научных статей – Вып. III. – Ставрополь: СКСИ, 2004.– 404с.

37. Зайцева И.В. Применение имитационного моделирования для исследования работы биржи труда // Рынок труда, занятость, доходы: проблемы и тенденции развития. Материалы всероссийской научно-практической конференции. – Орел: ОГУ, 2005. - С. 74-77.
38. Зайцева И.В. Уточнение математической модели самоорганизации рынка труда для нескольких отраслей // Обозрение прикладной и промышленной математики. – 2004. - Т.11. в.4. - С. 809-810.
39. Замков О.О., Толстопятенко А.В., Черенных Ю.Н. Математические методы в экономике. - 3-е изд. – М.: ДИС, 2001. – 368 с.
40. Иващенко А.В., Сыпченко Р.П. Основы моделирования сложных систем на ЭВМ: Учебник. – Л.: ЛВВИУС, 1988. – 272 с.
41. Карпелевич Ф.И., Садовский Л.Е. Элементы линейной алгебры и линейного программирования. – М.: Физматгиз, 1963. – 276 с.
42. Квейд Э. Анализ сложных систем. Пер. с англ. Под ред. И.И. Ануреева, И.М. Верещагина. – М.: Изд-во «Советское радио», 1969. – 520 с.
43. Кобелев Н.Б. Основы имитационного моделирования сложных экономических систем: Учеб. Пособие. – М.: Дело, 2003. – 336 с.
44. Кобелев Н.Б. Практика применения экономико-математических моделей. – М.: Финстатинформ, 2000. – 246 с.
45. Кокс Д.Р., Смит У.Л. Теория очередей. – М.: Мир, 1966. – 218 с.
46. Кораблин М.А. Информатика поиска управленческих решений. – М.: СОЛОН-Пресс, 2003. – 192 с.: ил.
47. Коротец И.Д. Проблема создания рынка рабочей силы в ходе реформирования России: Социально-философский аспект: Автореф. дисс. ... докт. филос. наук. Ростов-на-Дону. 1995.
48. Краснов М.Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Высш. шк., 1983. – 128 с.
49. Красс М.С., Чупрынов Б.П. Основы математики и ее приложения в экономическом образовании. – М.: Дело, 2003. – 688 с.
50. Круглински Д., Уингоу С., Шеферд Дж. Программирование на

Microsoft Visual C++ 6.0 для профессионалов. СПб.: Питер, Русская редакция, 2001. – 864 с.

51. Кудрявцев Е.М. GPSS World. Основы имитационного моделирования различных систем. – М.: ДМК Пресс, 2003. – 320 с.

52. Лабскер Л.Г., Бабешко Л.О. Теория массового обслуживания в экономической сфере. - М.: Банки и биржи. Изд. Объединение «ЮНИТИ, 1998. – 320 с.

53. Лоскутов А.Ю., Михайлов А.С. Введение в синергетику. - М.: Наука, 1990. – 272 с.

54. Максимей И.В. Имитационное моделирование на ЭВМ. – М.: Радио и связь, 1988. – 323 с.

55. Марков А.А. Моделирование информационно-вычислительных процессов: учебное пособие для вузов. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1999.

56. Мартин Ф. Моделирование на вычислительных машинах. /Пер. с англ. – М.: Сов. радио, 1972. – 288 с.

57. Мышкин А.Д. Лекции по высшей математике: Учеб. пособие. – 2-е изд., перераб. – М.: Наука, 1967. – 640 с.

58. Нейлор Т. Машинные имитационные эксперименты с моделями экономических систем. – М.: Мир, 1975. – 500 с.

59. Нейман Ю. Вводный курс теории вероятностей и математической статистики. – М.: Наука, 1968. – 448 с.: ил.

60. Ниворожкина Л.И., Ниворожкин Е.М., Шухмин А.Г. Моделирование поведения населения на рынке труда крупного города: Продолжительность регистрируемой безработицы. – М.: РПЭИ, 2001. – 55 с.

61. Очков В.Ф. MATHCAD 7.0 Pro для студентов и инженеров. – М.: Компьютер Пресс, 1998. – 384 с.

62. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление для вузов. Т. 2. – М.: Наука; Физматлит, 1985. – 560 с.

63. Плис А.И., Сливина Н.А. MathCad. Математический практикум для

инженеров и экономистов: Учеб. пособие. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Финансы и статистика, 2003. – 656 с.: ил.

64. Плис А.И., Сливина Н.А. MathCad. Математический практикум. – М.: Финансы и статистика, 1999. – 655 с.

65. Прокопов Ф.Т. Безработица и эффективность государственной политики труда в переходной экономике России: Автореф. дисс. ... докт. экон. наук. М. 1999.

66. Региональный рынок труда в условиях трансформации российской экономики (на материалах Южного Федерального округа) / Под ред. П.В. Акинина, С.В. Степановой. – Ставрополь: Сервисшкола, 2002. – 368 с.

67. Роберт И.В., Самойленко П.И. Информационные технологии в науке и образовании. - М.: Наука, 1998. – 178 с.

68. Розенберг И. Г. Биржа труда // Итоги. -14 сентября 1999. – С. 14.

69. Руководство пользователя по GPSS World. /Перевод с английского/. – Казань: Изд-во «Мастер Лайн», 2002. – 384 с.

70. Рыжиков Ю.И. Имитационное моделирование: Теория и технологии. – СПб.: Корона принт; М.: Альтекс-А, 2004. – 384 с.

71. Рыжиков Ю.И. Решение научно-технических задач на персональном компьютере. – СПб.: Корона принт, 2000. – 272 с.

72. Савостицкий Ю.А. Оценка необходимого числа линий обслуживания при технико-экономическом обосновании многоканальных производственных систем // Экономика и производство. – 2002. - № 10 – С. 16-21.

73. Салманов О.Н. Математическая экономика с применением Mathcad и Excel. – СПб.: БХВ-Петербург, 2003. – 464 с.: ил.

74. Самуэльсон П. Экономика. М.: БИНОМ, 1997. – с. 800.

75. Санин А.Л. Структуры и хаос – проблемы физики. Л.: Знание, 1985. – 32 с.

76. Сатвалдиев А.А. Управление занятостью населения в Республике Узбекистан: Автореф. дисс. ... докт. экон. наук. Санкт-Петербург. 1993.

77. Семененко М.Г. Введение в математическое моделирование. М.: СОЛОН-Р, 2002. – 112 с.
78. Семенчин Е.А., Зайцева И.В. Вероятностная модель функционирования биржи труда // Вестник Ставропольского государственного университета. – 2004. - Выпуск 38. - С. 58-60.
79. Семенчин Е.А., Зайцева И.В. Имитационная модель работы биржи труда// Обзорение прикладной и промышленной математики, 2005. - Т.12. в.2. – С. 508 - 509.
80. Семенчин Е.А., Зайцева И.В. Математическое моделирование работы биржи труда // Обзорение прикладной и промышленной математики. – 2004. - Т.11. в.2. - С. 398-399.
81. Семенчин Е.А., Зайцева И.В. Математическая модель самоорганизации рынка труда двухотраслевой экономики: Сборник трудов третьей региональной научной конференции. – Ставрополь: СевКавГТУ, 2003. – 239 с.
82. Семенчин Е.А., Зайцева И.В. Математическая модель самоорганизации рынка труда для двух отраслей экономики // Экономика и математические методы. – 2004. – Т. 40. № 4. – С. 137-139.
83. Семенчин Е.А., Зайцева И.В. Математическая модель самоорганизации рынка труда для нескольких отраслей // Обзорение прикладной и промышленной математики, 2003. - Т.10. в.3. - С.740-741.
84. Семенчин Е.А., Зайцева И.В. Математическая модель самоорганизации рынка труда для нескольких отраслей экономики: Материалы Воронежской весенней математической школы «Понтрягинские чтения – XIV». – Воронеж: Воронежский государственный университет, 2003. – 177 с.
85. Семенов В.В., Пантелеев А.В., Бортановский А.С. Математическая теория управления в примерах и задачах. – М.: Изд-во МАИ, 1997. 261 с.: ил., табл.
86. Симонович С.В., Евсеев Г.А., Алексеев А.Г. Специальная информатика: Учебное пособие. – М.: АСТ-ПРЕСС; Инфорком-Пресс, 1999. –

480 с.

87. Снапелев Ю.М., Старосельский В.А. Моделирование и управление в сложных системах. – М.: Советское радио, 1974. – 264 с.
88. Советов Б.Я. Моделирование систем. Практикум: Учебное пособие для вузов/ Б.Я. Советов, С.А. Яковлев. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Высш. шк., 2003. – 295 с.:ил.
89. Советов Б.Я., Яковлев С.А. Моделирование систем: учебник для вузов. – М.: Высш. шк., 2001. – 395 с.
90. Томашевский В.Н., Жданова Е.Г. Имитационное моделирование в среде GPSS. – М.: Бестселлер, 2003. – 416 с.
91. Тутубалин В.Н. Теория вероятностей и случайных процессов: Учеб. Пособие. – М.: Изд-во МГУ, 1992. – 400 с.
92. Тюрин Ю.Н., Макаров А.А. Статистический анализ данных на компьютере. – М.: Инфа-М, 1998. – 528 с.
93. Учебное пособие по GPSS World. /Перевод с английского/. - Казань: Изд-во «Мастер Лайн», 2002. – 270 с.
94. Фаддеев Д.К., Фаддеева В.Н. Вычислительные методы линейной алгебры. – 2-е изд., доп. – М.: ФИЗМАТГИЗ, 1963. – 736 с.
95. Харвей Г. Excel 97 для Windows для «чайников» / Пер. с англ. – М.: Издат. Дом «Вильямс», 2000. – 386 с.
96. Шапот Д.В., Карбовский И.К., Лукацкий А.М., Федорова Г.В. Имитационная модель экономического поведения производителей товаров и услуг // Экономика и математические методы. - 2004. Том 40. № 3. - С. 88-102.
97. Шевцов Г.С. Линейная алгебра: теория и прикладные аспекты: Учеб. пособие. – М.: Финансы и статистика, 2003. – 576 с.
98. Шрайбер Г.Дж. Моделирование на GPSS.- М.: Машиностроение, 1980. – 592 с.
99. Экономико-математические методы и прикладные модели / Под ред. В.В. Федосеева. - М.: ЮНИТИ, 1999. – 391 с.
100. Эскеров Д.Б. Социально - экономические проблемы формирования

рынка труда и управления занятостью в депрессивно-трудноизбыточном регионе (на примере Дагестана): Автореф. дисс. ... докт. экон. наук. Санкт-Петербург. 1999.

101. Юферева Л.Е. Регулирование формирования и использования трудового потенциала в условиях рынка труда (на примере Восточной Сибири и Дальнего Востока): Автореф. дисс. ... докт. экон. наук. М. 1992.

**Листинг модуля для определения устойчивости системы
дифференциальных уравнений с использованием интерполяционного
метода в системе Mathcad**

```

N_otr := rows ( P_0 )                                size := N_otr + 2
P := | 0
      P if cols ( P_0 ) = rows ( P_0 ) = N_otr ^ rows ( P_1 ) = N_otr
fnW_R_U ( a , b ) := | 0
                      | ( P_0 )_{a , b - N_otr} if b ≥ N_otr ^ a < N_otr
                      | [ - ( P_0 )_{a , b - N_otr} ] if a = b - N_otr
i := 0 .. N_otr
fnW ( a , b ) := | 0
                  | if a ≥ N_otr ^ b ≥ N_otr
                  | | 0
                  | | - ( ∑_i |fnW_R_U ( i , b ) | ) if a = b
                  | | fnW_R_U ( a , b ) if ( a < N_otr ) ^ ( b ≥ N_otr )
                  | | ( P_1 )_b if a ≥ N_otr ^ b < N_otr
                  | | if a < N_otr ^ b < N_otr
                  | | 0
                  | | [ - ( P_1 ) ]_a if a = b
W := matrix ( size , size , fnW )                    E := identity ( size )
W λ ( n ) := W - E · n
leq_r ( a , b ) := | W λ ( a + 1 ) | - ( a + 1 )^{size}
Mleq_r := matrix ( size , 1 , leq_r )
leq_l ( a , b ) := ( a + 1 )^{size - 1 - b}
Mleq_l := matrix ( size , size , leq_l )
a := lsolve ( Mleq_l , Mleq_r )
ka ( i ) := | 1 if i = size
            | a_{size - i - 1} if i ≠ size
MPf ( i , j ) := | if ( i < N_otr )
                  | | r_e ← i · 2 + 1
                  | | 0
                  | | ka ( r_e - j ) if j ≤ r_e
                  | if i ≥ N_otr
                  | | l_e ← ( i - N_otr ) · 2 + 1
                  | | 0
                  | | ka ( l_e - j + size ) if j ≥ l_e
MP := matrix ( size , size , MPf )
stability := | s ← 0
              | for i ∈ 0 .. size - 1
              | s ← s + 1 if |submatrix ( MP , 0 , i , 0 , i ) | > 0

```

stability matrix: yes -1, no - 0.

**Листинг модуля для определения устойчивости системы
дифференциальных уравнений с использованием метода А. Н. Крылова в
системе Mathcad**

```

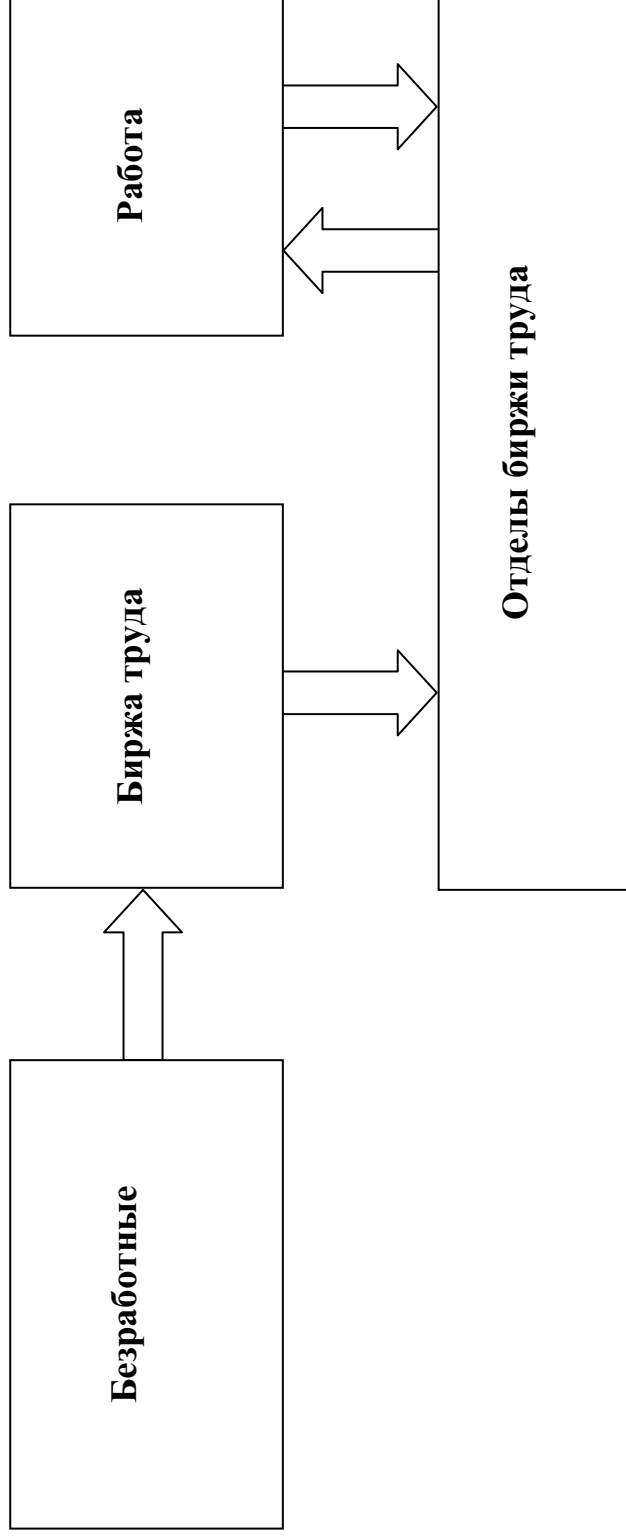
N_otr := rows (P_0) *                               size := N_otr * 2 *
P := | 0
      | P if cols (P_0) = rows (P_0) = N_otr ^ rows (P_1) = N_otr
fnW_R_U (a, b) := | 0
                  | (P_0)_{a, b-N_otr} if b ≥ N_otr ^ a < N_otr
                  | [ -(P_0)_{a, b-N_otr} ] if a = b - N_otr
i := 0 .. N_otr
fnW (a, b) := | 0
              | if a ≥ N_otr ^ b ≥ N_otr
              | | 0
              | | - ( ∑_i |fnW_R_U (i, b)| ) if a = b
              | | fnW_R_U (a, b) if (a < N_otr) ^ (b ≥ N_otr)
              | | (P_1)_b if a ≥ N_otr ^ b < N_otr
              | | if a < N_otr ^ b < N_otr
              | | 0
              | | [ -(P_1) ]_a if a = b
W := matrix (size, size, fnW)                       E := identity (size)
x0fn (x, y) := if (x < size - 1, x + 1, 0)
x(n) := | matrix (size, 1, x0fn)
        | ( (x(n-1))^T · W )^T if n ≠ 0
ra := -1 · x (size)
lslq (ly, lx) := x (size - lx - 1) ly
Mlslq := matrix (size, size, lslq)
a := lsolve (Mlslq, ra)
ka (i) := | 1 if i = size
          | a_{size-i-1} if i ≠ size
MPf (i, j) := | if (i < N_otr)
              | | r_e ← i · 2 + 1
              | | 0
              | | ka (r_e - j) if j ≤ r_e
              | if i ≥ N_otr
              | | l_e ← (i - N_otr) · 2 + 1
              | | 0
              | | ka (l_e - j + size) if j ≥ l_e
MP := matrix (size, size, MPf)
stability := | s ← 0
            | for i ∈ 0 .. size - 1
            | s ← s + 1 if |submatrix (MP, 0, i, 0, i)| > 0

```

stability matrix: yes -1, no - 0.

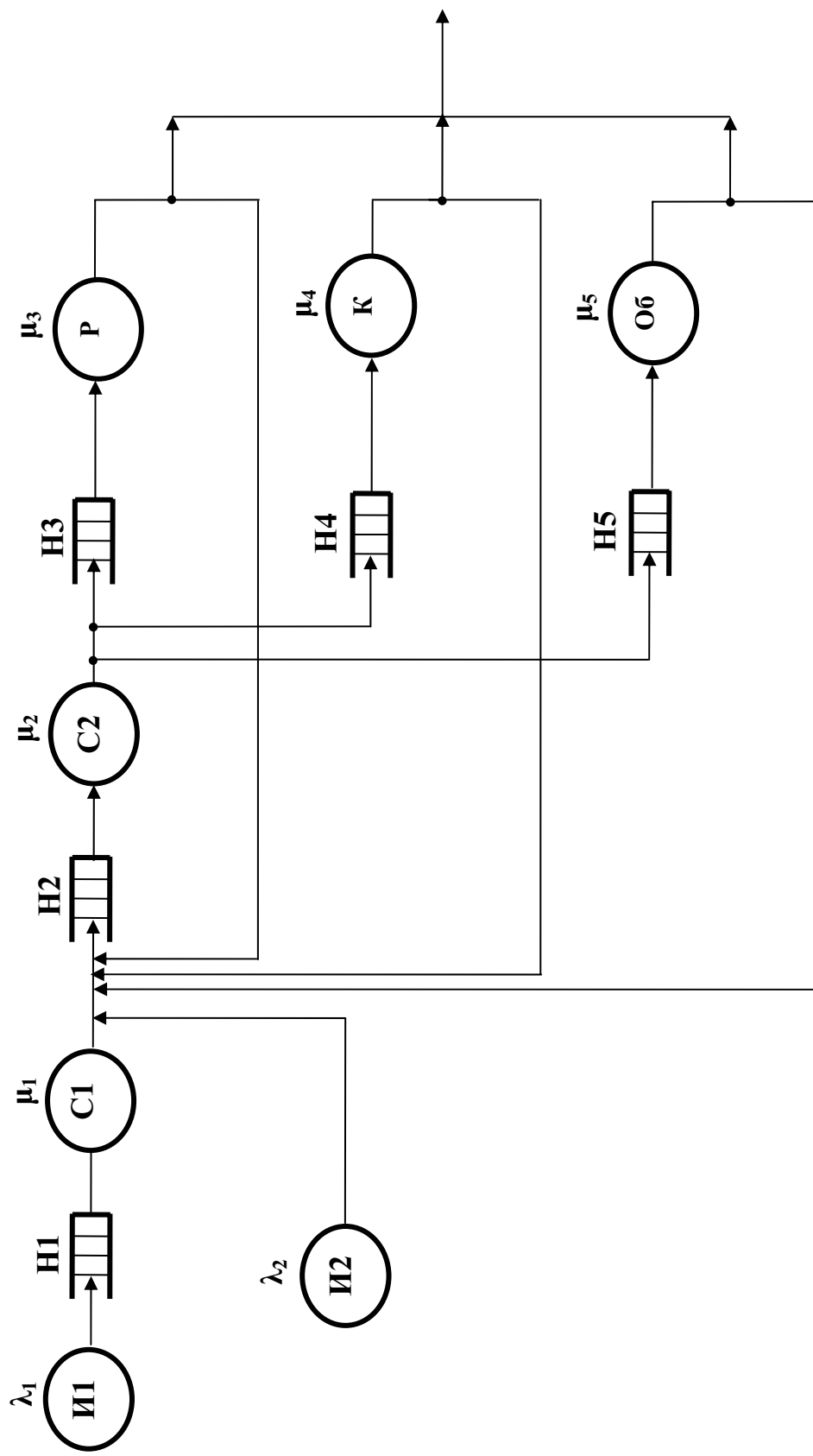
Приложение В

Структурная схема работы биржи труда г. Ставрополя

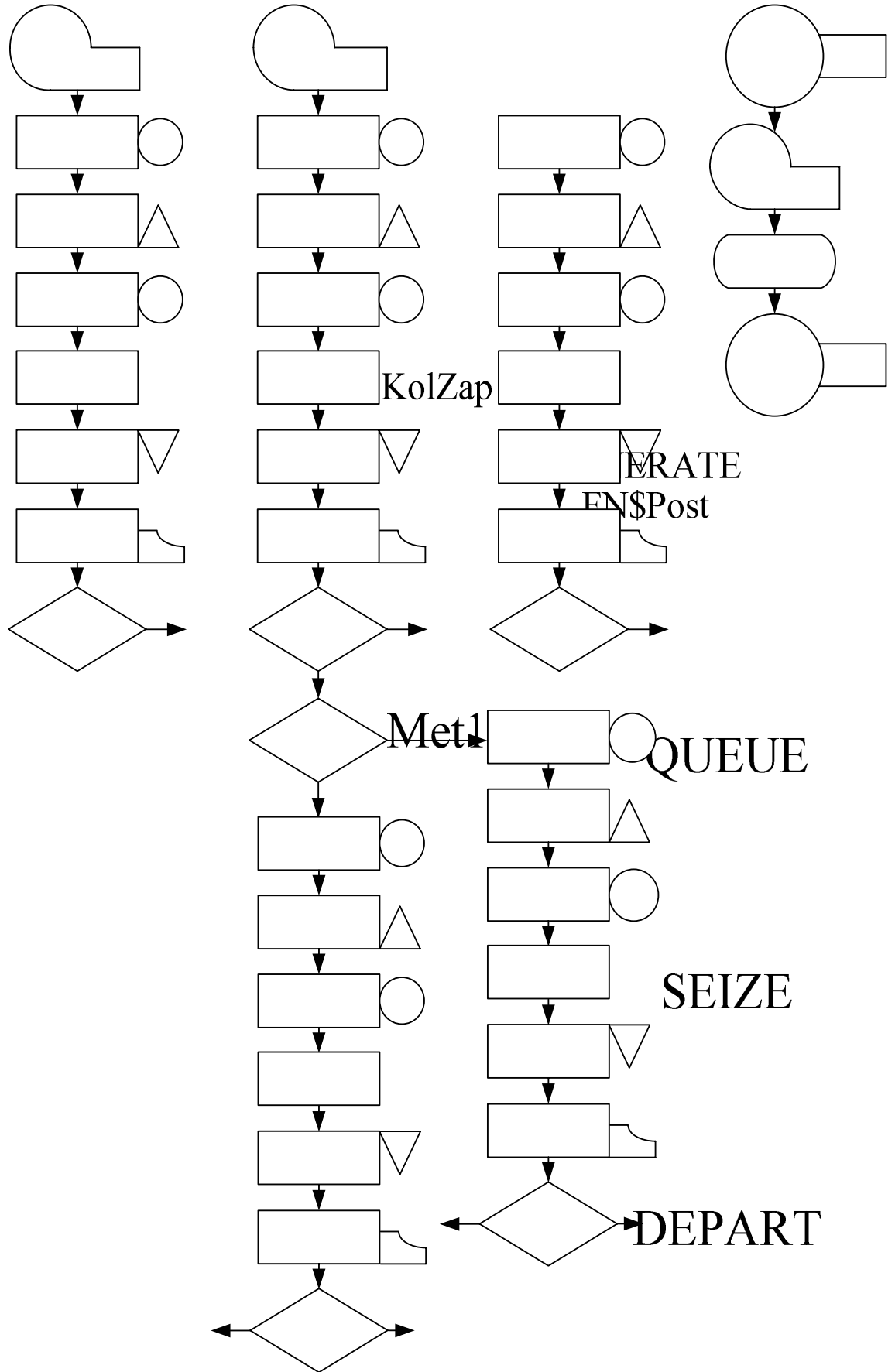


Комплекс имитационной модели биржи труда в системе моделирования GPSS World

Q-схема биржи труда



Блок-диаграмма модели биржи труда



ADVANCE
Exponential(2,0,5)

Листинг модуля функционирования биржи труда на языке GPSS World

```

; Определение таблиц
VrSp1      Table      M1,10,5,5
VrSp2      Table      M1,10,5,5
VrKon      Table      M1,10,5,5
VrOb       Table      M1,10,5,5
VrRab      Table      M1,10,5,5
;Определение функции экспоненциального распределения
Post       FUNCTION   RN1,D7
.4,1/.5,2/.6,3/.7,4/.8,5/.9,6/1,8
;Задание исходных данных
VrMod      EQU        480
; Описание арифметических выражений
;Вероятность обслуживания требования в отделе Sp1
VerObrSp1  FVARIABLE  N$ObrZapSp1/N$KolZap
;Вероятность обслуживания требования в отделе Sp2
VerObrSp2  FVARIABLE  N$ObrZapSp2/N$Met2
;Вероятность обслуживания требования в отделе Rab
VerObrRab  FVARIABLE  N$ObrZapRab/N$Met4
;Вероятность обслуживания требования в отделе Kon
VerObrKon  FVARIABLE  N$ObrZapKon/N$Met5
;Вероятность обслуживания требования в отделе Ob
VerObrOb   FVARIABLE  N$ObrZapOb/N$Met6
;Вероятность обслуживания требования на бирже труда
VerBirga   FVARIABLE
          (V$VerObrSp1+V$VerObrSp2+V$VerObrRab+V$VerObrKon+V$VerObrOb) /5
;Вероятность отказа в обслуживании требования на бирже труда
VOtk       FVARIABLE  1-X$VerBirga
;Вероятность безотказной работы биржи труда
VerOtk     FVARIABLE  (AC1-X$VOtk)/AC1
;Сегмент имитации обслуживания в отделе Sp1
KolZap     GENERATE   FN$Post          ; Поступление требований от безработных
Met1       QUEUE      SpQ1              ; Встать в очередь в отдел Sp1
          SEIZE       Sp1                ; Занять отдел Sp1
          DEPART      SpQ1              ; Покинуть очередь в отдел Sp1
          ADVANCE     (Exponential(2,0,5)) ; Обслуживание в отделе Sp1
          RELEASE     Sp1                ; Освободить Sp1
ObrZapSp1  TABULATE   VrSp1            ; Данные об отделе Sp1 в таблицу
;Сегмент имитации обслуживания в отделе Sp2
          TRANSFER    .73,Met2,Met7      ; Обслуженные в отделе Sp2
KolZapVtor GENERATE   (Exponential(3,0,10)) ; Поступление
требований от безработных
Met2       QUEUE      SpQ2              ; Встать в очередь в отдел Sp2
          SEIZE       Sp2                ; Занять отдел Sp2
          DEPART      SpQ2              ; Покинуть очередь в отдел Sp2
          ADVANCE     7,3                ; Обслуживание в отделе Sp2
          RELEASE     Sp2                ; Освободить Sp2
ObrZapSp2  TABULATE   VrSp2            ; Данные об отделе Sp2 в таблицу
          TRANSFER    0.63,Met3,Met4     ; Уход из отдела
Met3       TRANSFER   0.1,Met5,Met6      ; Уход из отдела
;Сегмент имитации обслуживания в отделе Rab
Met4       QUEUE      RabQ              ; Встать в очередь в отдел Rab
          SEIZE       Rab                ; Занять отдел Rab
          DEPART      RabQ              ; Покинуть очередь в отдел Rab
          ADVANCE     5,3                ; Обслуживание в отделе Rab
          RELEASE     Rab                ; Освободить Rab
ObrZapRab  TABULATE   VrRab            ; Данные об отделе Rab
          TRANSFER    0.3,Met2,Met7      ; Уход из отдела Rab
;Сегмент имитации обслуживания в отделе Ps
Met5       QUEUE      KonQ              ; Встать в очередь в отдел Kon
          SEIZE       Kon                ; Занять отдел Kon
          DEPART      KonQ              ; Покинуть очередь в отдел Kon
          ADVANCE     5,3                ; Обслуживание в отделе Kon

```

```

RELEASE      Kon          ; Освободить Kon
ObrZapKon    TABULATE   VrKon          ; Данные об отделе Kon
TRANSFER    0.1, Met2, Met7 ; Уход из отдела Kon
;Сегмент имитации обслуживания в отделе Ob
Met6        QUEUE      ObQ          ; Встать в очередь в отдел Ob
           SEIZE      Ob          ; Занять отдел отдел Ob
           DEPART    ObQ          ; Покинуть очередь в отдел Ob
           ADVANCE   5,3          ; Обслуживание в отделе Ob
           RELEASE   Ob          ; Освободить Ob
ObrZapOb     TABULATE   VrOb          ; Данные об отделе Ob
TRANSFER    0.1, Met2, Met7 ; Уход из отдела Ob
Met7        TERMINATE          ; Обслуженные требования
;Сегмент задания времени моделирования
GENERATE    VrMod
SAVEVALUE   VerObrSp1, V$VerObrSp1 ;Вероятность обслуживания
требований в отделе Sp1
SAVEVALUE   VerObrSp2, V$VerObrSp2 ;Вероятность обслуживания
требований в отделе Sp2
SAVEVALUE   VerObrRab, V$VerObrRab ;Вероятность обслуживания
требований в отделе Rab
SAVEVALUE   VerObrKon, V$VerObrKon ;Вероятность обслуживания
требований в отделе Kon
SAVEVALUE   VerObrOb, V$VerObrOb   ;Вероятность обслуживания
требований в отделе Ob
SAVEVALUE   VerBirga, V$VerBirga   ;Вероятность обслуживания
требований на бирже труда
SAVEVALUE   VOtk, V$VOtk          ;Вероятность отказа в обслуживании
требования на бирже труда
SAVEVALUE   VerOtk, V$VerOtk      ;Вероятность безотказной работы биржи
труда
TERMINATE   1

```

Листинг стандартного отчета эксперимента № 1

START TIME	END TIME	BLOCKS	FACILITIES	STORAGES
0.000	480.000	49	5	0

NAME	VALUE
INTZAP	5.000
KOLZAP	1.000
KOLZAPVTR	9.000
KON	10023.000
KONQ	10022.000
MET1	2.000
MET2	10.000
MET3	17.000
MET4	18.000
MET5	25.000
MET6	32.000
MET7	39.000
OB	10025.000
OBQ	10024.000
OBRZAPKON	30.000
OBRZAPOB	37.000
OBRZAPRAB	23.000
OBRZAPSP1	7.000
OBRZAPSP2	15.000
POST	10005.000
RAB	10021.000
RABQ	10020.000
SP1	10017.000
SP2	10019.000
SPQ1	10016.000
SPQ2	10018.000
VERBIRGA	10013.000
VEROBRKON	10011.000
VEROBROB	10012.000
VEROBRRAB	10010.000
VEROBRSP1	10008.000
VEROBRSP2	10009.000
VEROTK	10015.000
VOTK	10014.000
VRKON	10002.000
VRMOD	480.000
VROB	10003.000
VRRAB	10004.000
VRSP1	10000.000
VRSP2	10001.000

LABEL	LOC	BLOCK TYPE	ENTRY COUNT	CURRENT	COUNT	RETRY
KOLZAP	1	GENERATE	132		0	0
MET1	2	QUEUE	132		55	0
	3	SEIZE	77		0	0
	4	DEPART	77		0	0
	5	ADVANCE	77		1	0
	6	RELEASE	76		0	0
OBRZAPSP1	7	TABULATE	76		0	0
	8	TRANSFER	76		0	0
KOLZAPVTR	9	GENERATE	47		0	0
MET2	10	QUEUE	123		52	0
	11	SEIZE	71		0	0
	12	DEPART	71		0	0

	13	ADVANCE	71	1	0
	14	RELEASE	70	0	0
OBRZAPSP2	15	TABULATE	70	0	0
	16	TRANSFER	70	0	0
MET3	17	TRANSFER	28	0	0
MET4	18	QUEUE	42	0	0
	19	SEIZE	42	0	0
	20	DEPART	42	0	0
	21	ADVANCE	42	0	0
	22	RELEASE	42	0	0
OBRZAPRAB	23	TABULATE	42	0	0
	24	TRANSFER	42	0	0
MET5	25	QUEUE	25	0	0
	26	SEIZE	25	0	0
	27	DEPART	25	0	0
	28	ADVANCE	25	0	0
	29	RELEASE	25	0	0
OBRZAPKON	30	TABULATE	25	0	0
	31	TRANSFER	25	0	0
MET6	32	QUEUE	3	0	0
	33	SEIZE	3	0	0
	34	DEPART	3	0	0
	35	ADVANCE	3	0	0
	36	RELEASE	3	0	0
OBRZAPOB	37	TABULATE	3	0	0
	38	TRANSFER	3	0	0
MET7	39	TERMINATE	70	0	0
	40	GENERATE	1	0	0
	41	SAVEVALUE	1	0	0
	42	SAVEVALUE	1	0	0
	43	SAVEVALUE	1	0	0
	44	SAVEVALUE	1	0	0
	45	SAVEVALUE	1	0	0
	46	SAVEVALUE	1	0	0
	47	SAVEVALUE	1	0	0
	48	SAVEVALUE	1	0	0
	49	TERMINATE	1	0	0

FACILITY	ENTRIES	UTIL.	AVE. TIME	AVAIL.	OWNER	PEND	INTER	RETRY
DELAY								
SP1	77	0.977	6.091	1	106	0	0	0
55								
SP2	71	0.986	6.667	1	64	0	0	0
52								
RAB	42	0.416	4.751	1	0	0	0	0
0								
KON	25	0.249	4.787	1	0	0	0	0
0								
OB	3	0.036	5.804	1	0	0	0	0
0								

QUEUE	MAX	CONT.	ENTRY	ENTRY (0)	AVE. CONT.	AVE. TIME	AVE. (-0)	
RETRY								
SPQ1	55	55	132	3	29.185	106.126	108.594	0
SPQ2	52	52	123	1	29.436	114.872	115.814	0
RABQ	1	0	42	39	0.015	0.170	2.385	0
KONQ	1	0	25	22	0.007	0.135	1.128	0
OBQ	1	0	3	3	0.000	0.000	0.000	0

TABLE	MEAN	STD. DEV.	RANGE	RETRY	FREQUENCY
CUM. %					

VRSP1	94.140	68.383				0	
17.11			-	-	10.000		13
21.05			10.000	-	15.000		3
23.68			15.000	-	20.000		2
30.26			20.000	-	25.000		5
100.00			25.000	-	-		53
VRSP2	168.498	107.424				0	
1.43			-	-	10.000		1
4.29			10.000	-	15.000		2
5.71			15.000	-	20.000		1
7.14			20.000	-	25.000		1
100.00			25.000	-	-		65
VRKON	180.642	103.714				0	
4.00			20.000	-	25.000		1
100.00			25.000	-	-		24
VROB	110.177	47.936				0	
100.00			25.000	-	-		3
VRRAB	173.702	112.765				0	
4.76			10.000	-	15.000		2
7.14			15.000	-	20.000		1
7.14			20.000	-	25.000		0
100.00			25.000	-	-		39

SAVEVALUE	RETRY	VALUE
VEROBRSP1	0	0.576
VEROBRSP2	0	0.569
VEROBRAB	0	1.000
VEROBRKON	0	1.000
VEROBRROB	0	1.000
VERBIRGA	0	0.829
VOTK	0	0.171
VEROTK	0	1.000

FEC XN	PRI	BDT	ASSEM	CURRENT	NEXT	PARAMETER	VALUE
181	0	482.000	181	0	1		
106	0	482.635	106	5	6		
64	0	483.707	64	13	14		
182	0	493.155	182	0	9		
183	0	960.000	183	0	40		

Листинг стандартного отчета эксперимента № 2

START TIME	END TIME	BLOCKS	FACILITIES	STORAGES
0.000	480.000	49	5	0

NAME	VALUE
INTZAP	5.000
KOLZAP	1.000
KOLZAPVTR	9.000
KON	10023.000
KONQ	10022.000
MET1	2.000
MET2	10.000
MET3	17.000
MET4	18.000
MET5	25.000
MET6	32.000
MET7	39.000
OB	10025.000
OBQ	10024.000
OBRZAPKON	30.000
OBRZAPOB	37.000
OBRZAPRAB	23.000
OBRZAPSP1	7.000
OBRZAPSP2	15.000
POST	10005.000
RAB	10021.000
RABQ	10020.000
SP1	10017.000
SP2	10019.000
SPQ1	10016.000
SPQ2	10018.000
VERBIRGA	10013.000
VEROBRKON	10011.000
VEROBROB	10012.000
VEROBRRAB	10010.000
VEROBRSP1	10008.000
VEROBRSP2	10009.000
VEROTK	10015.000
VOTK	10014.000
VRKON	10002.000
VRMOD	480.000
VROB	10003.000
VRRAB	10004.000
VRSP1	10000.000
VRSP2	10001.000

LABEL	LOC	BLOCK TYPE	ENTRY COUNT	CURRENT COUNT	RETRY
KOLZAP	1	GENERATE	146	0	0
MET1	2	QUEUE	146	78	0
	3	SEIZE	68	0	0
	4	DEPART	68	0	0
	5	ADVANCE	68	1	0
	6	RELEASE	67	0	0
OBRZAPSP1	7	TABULATE	67	0	0
	8	TRANSFER	67	0	0
KOLZAPVTR	9	GENERATE	47	0	0
MET2	10	QUEUE	126	45	0
	11	SEIZE	81	0	0

	12	DEPART	81	0	0
	13	ADVANCE	81	1	0
	14	RELEASE	80	0	0
OBRZAPSP2	15	TABULATE	80	0	0
	16	TRANSFER	80	0	0
MET3	17	TRANSFER	31	0	0
MET4	18	QUEUE	49	0	0
	19	SEIZE	49	0	0
	20	DEPART	49	0	0
	21	ADVANCE	49	0	0
	22	RELEASE	49	0	0
OBRZAPRAB	23	TABULATE	49	0	0
	24	TRANSFER	49	0	0
MET5	25	QUEUE	27	1	0
	26	SEIZE	26	0	0
	27	DEPART	26	0	0
	28	ADVANCE	26	1	0
	29	RELEASE	25	0	0
OBRZAPKON	30	TABULATE	25	0	0
	31	TRANSFER	25	0	0
MET6	32	QUEUE	4	0	0
	33	SEIZE	4	0	0
	34	DEPART	4	0	0
	35	ADVANCE	4	0	0
	36	RELEASE	4	0	0
OBRZAPOB	37	TABULATE	4	0	0
	38	TRANSFER	4	0	0
MET7	39	TERMINATE	66	0	0
	40	GENERATE	1	0	0
	41	SAVEVALUE	1	0	0
	42	SAVEVALUE	1	0	0
	43	SAVEVALUE	1	0	0
	44	SAVEVALUE	1	0	0
	45	SAVEVALUE	1	0	0
	46	SAVEVALUE	1	0	0
	47	SAVEVALUE	1	0	0
	48	SAVEVALUE	1	0	0
	49	TERMINATE	1	0	0

FACILITY DELAY	ENTRIES	UTIL.	AVE. TIME	AVAIL.	OWNER	PEND	INTER	RETRY
SP1	68	0.982	6.929	1	94	0	0	0
78								
SP2	81	0.984	5.830	1	130	0	0	0
45								
RAB	49	0.501	4.903	1	0	0	0	0
0								
KON	26	0.280	5.176	1	123	0	0	0
1								
OB	4	0.041	4.925	1	0	0	0	0
0								

QUEUE RETRY	MAX	CONT.	ENTRY	ENTRY (0)	AVE. CONT.	AVE. TIME	AVE. (-0)	
SPQ1	79	78	146	3	37.949	124.763	127.381	0
SPQ2	46	45	126	1	22.929	87.347	88.046	0
RABQ	1	0	49	38	0.039	0.381	1.699	0
KONQ	1	1	27	21	0.023	0.417	1.876	0
OBQ	1	0	4	4	0.000	0.000	0.000	0

TABLE	MEAN	STD. DEV.	RANGE	RETRY	FREQUENCY
-------	------	-----------	-------	-------	-----------

CUM. %							
VRSP1	119.159	81.888				0	
			-	-	10.000		5
7.46							
			10.000	-	15.000		1
8.96							
			15.000	-	20.000		5
16.42							
			20.000	-	25.000		5
23.88							
			25.000	-			51
100.00							
VRSP2	145.891	102.304				0	
			-	-	10.000		1
1.25							
			10.000	-	15.000		2
3.75							
			15.000	-	20.000		1
5.00							
			20.000	-	25.000		2
7.50							
			25.000	-			74
100.00							
VRKON	147.152	89.840				0	
			20.000	-	25.000		1
4.00							
			25.000	-			24
100.00							
VROB	141.769	86.775				0	
			25.000	-			4
100.00							
VRRAB	147.788	104.615				0	
			15.000	-	20.000		2
4.08							
			20.000	-	25.000		2
8.16							
			25.000	-			45
100.00							

SAVEVALUE	RETRY	VALUE
VEROBRSP1	0	0.459
VEROBRSP2	0	0.635
VEROBRAB	0	1.000
VEROBRKON	0	0.926
VEROBROB	0	1.000
VERBIRGA	0	0.804
VOTK	0	0.196
VEROTK	0	1.000

FEC XN	PRI	BDT	ASSEM	CURRENT	NEXT	PARAMETER	VALUE
123	0	481.256	123	28	29		
195	0	482.000	195	0	1		
94	0	484.286	94	5	6		
130	0	484.453	130	13	14		
196	0	493.155	196	0	9		
197	0	960.000	197	0	40		

Листинг стандартного отчета эксперимента № 3

START TIME	END TIME	BLOCKS	FACILITIES	STORAGES
0.000	480.000	49	5	0

NAME	VALUE
KOLZAP	1.000
KOLZAPVTOR	9.000
KON	10022.000
KONQ	10021.000
MET1	2.000
MET2	10.000
MET3	17.000
MET4	18.000
MET5	25.000
MET6	32.000
MET7	39.000
OB	10024.000
OBQ	10023.000
OBRZAPKON	30.000
OBRZAPOB	37.000
OBRZAPRAB	23.000
OBRZAPSP1	7.000
OBRZAPSP2	15.000
POST	10005.000
RAB	10020.000
RABQ	10019.000
SP1	10016.000
SP2	10018.000
SPQ1	10015.000
SPQ2	10017.000
VERBIRGA	10012.000
VEROBRKON	10010.000
VEROBROB	10011.000
VEROBRRAB	10009.000
VEROBRSP1	10007.000
VEROBRSP2	10008.000
VEROTK	10014.000
VOTK	10013.000
VRKON	10002.000
VRMOD	480.000
VROB	10003.000
VRRAB	10004.000
VRSP1	10000.000
VRSP2	10001.000

LABEL	LOC	BLOCK TYPE	ENTRY COUNT	CURRENT COUNT	RETRY
KOLZAP	1	GENERATE	154	0	0
MET1	2	QUEUE	154	91	0
	3	SEIZE	63	0	0
	4	DEPART	63	0	0
	5	ADVANCE	63	1	0
	6	RELEASE	62	0	0
OBRZAPSP1	7	TABULATE	62	0	0
	8	TRANSFER	62	0	0
KOLZAPVTOR	9	GENERATE	47	0	0
MET2	10	QUEUE	120	39	0
	11	SEIZE	81	0	0
	12	DEPART	81	0	0
	13	ADVANCE	81	1	0
	14	RELEASE	80	0	0

OBRZAPSP2	15	TABULATE	80	0	0
	16	TRANSFER	80	0	0
MET3	17	TRANSFER	32	0	0
MET4	18	QUEUE	48	0	0
	19	SEIZE	48	0	0
	20	DEPART	48	0	0
	21	ADVANCE	48	0	0
	22	RELEASE	48	0	0
OBRZAPRAB	23	TABULATE	48	0	0
	24	TRANSFER	48	0	0
MET5	25	QUEUE	30	0	0
	26	SEIZE	30	0	0
	27	DEPART	30	0	0
	28	ADVANCE	30	0	0
	29	RELEASE	30	0	0
OBRZAPKON	30	TABULATE	30	0	0
	31	TRANSFER	30	0	0
MET6	32	QUEUE	2	0	0
	33	SEIZE	2	0	0
	34	DEPART	2	0	0
	35	ADVANCE	2	0	0
	36	RELEASE	2	0	0
OBRZAPOB	37	TABULATE	2	0	0
	38	TRANSFER	2	0	0
MET7	39	TERMINATE	69	0	0
	40	GENERATE	1	0	0
	41	SAVEVALUE	1	0	0
	42	SAVEVALUE	1	0	0
	43	SAVEVALUE	1	0	0
	44	SAVEVALUE	1	0	0
	45	SAVEVALUE	1	0	0
	46	SAVEVALUE	1	0	0
	47	SAVEVALUE	1	0	0
	48	SAVEVALUE	1	0	0
	49	TERMINATE	1	0	0

FACILITY DELAY	ENTRIES	UTIL.	AVE. TIME	AVAIL.	OWNER	PEND	INTER	RETRY
SP1	63	0.998	7.603	1	86	0	0	0
91								
SP2	81	0.982	5.822	1	9	0	0	0
39								
RAB	48	0.528	5.279	1	0	0	0	0
0								
KON	30	0.273	4.362	1	0	0	0	0
0								
OB	2	0.020	4.885	1	0	0	0	0
0								

QUEUE RETRY	MAX	CONT.	ENTRY	ENTRY (0)	AVE.CONT.	AVE.TIME	AVE. (-0)	
SPQ1	93	91	154	1	46.341	144.439	145.384	0
SPQ2	39	39	120	1	21.840	87.360	88.095	0
RABQ	2	0	48	32	0.104	1.045	3.134	0
KONQ	1	0	30	28	0.003	0.043	0.648	0
OBQ	1	0	2	2	0.000	0.000	0.000	0

TABLE CUM. %	MEAN	STD. DEV.	RANGE	RETRY	FREQUENCY
VRSP1	139.882	94.120	- -	0	5
				10.000	

8.06				10.000	-	15.000		0
8.06				15.000	-	20.000		1
9.68				20.000	-	25.000		0
9.68				25.000	-			56
100.00					-			
VRSP2	153.745	95.779			-	10.000	0	1
1.25					-	10.000		1
2.50				10.000	-	15.000		1
5.00				15.000	-	20.000		2
5.00				20.000	-	25.000		0
5.00				25.000	-			76
100.00					-			
VRKON	141.951	81.271			-	25.000	0	1
3.33				20.000	-	25.000		1
3.33				25.000	-			29
100.00					-			
VROB	132.048	96.653			-		0	2
100.00					-			
VRRAB	171.300	104.693			-		0	1
2.08					-	10.000		1
2.08				10.000	-	15.000		0
2.08				15.000	-	20.000		1
4.17				20.000	-	25.000		1
6.25				25.000	-			45
100.00					-			

SAVEVALUE	RETRY	VALUE
VEROBRSP1	0	0.403
VEROBRSP2	0	0.667
VEROBRAB	0	1.000
VEROBRKON	0	1.000
VEROBRROB	0	1.000
VERBIRGA	0	0.814
VOTK	0	0.186
VEROTK	0	1.000

CEC XN	PRI	M1	ASSEM	CURRENT	NEXT	PARAMETER	VALUE
203	0	480.000	203	0	1		

FEC XN	PRI	BDT	ASSEM	CURRENT	NEXT	PARAMETER	VALUE
86	0	480.510	86	5	6		
9	0	482.352	9	13	14		
204	0	493.155	204	0	9		
205	0	960.000	205	0	40		

Листинг стандартного отчета эксперимента № 4

START TIME	END TIME	BLOCKS	FACILITIES	STORAGES
0.000	480.000	49	5	0

NAME	VALUE
KOLZAP	1.000
KOLZAPVTOR	9.000
KON	10022.000
KONQ	10021.000
MET1	2.000
MET2	10.000
MET3	17.000
MET4	18.000
MET5	25.000
MET6	32.000
MET7	39.000
OB	10024.000
OBQ	10023.000
OBRZAPKON	30.000
OBRZAPOB	37.000
OBRZAPRAB	23.000
OBRZAPSP1	7.000
OBRZAPSP2	15.000
POST	10005.000
RAB	10020.000
RABQ	10019.000
SP1	10016.000
SP2	10018.000
SPQ1	10015.000
SPQ2	10017.000
VERBIRGA	10012.000
VEROBRKON	10010.000
VEROBROB	10011.000
VEROBRAB	10009.000
VEROBRSP1	10007.000
VEROBRSP2	10008.000
VEROTK	10014.000
VOTK	10013.000
VRKON	10002.000
VRMOD	480.000
VROB	10003.000
VRRAB	10004.000
VRSP1	10000.000
VRSP2	10001.000

LABEL	LOC	BLOCK TYPE	ENTRY COUNT	CURRENT COUNT	RETRY
KOLZAP	1	GENERATE	162	0	0
MET1	2	QUEUE	162	106	0
	3	SEIZE	56	0	0
	4	DEPART	56	0	0
	5	ADVANCE	56	1	0
	6	RELEASE	55	0	0
OBRZAPSP1	7	TABULATE	55	0	0
	8	TRANSFER	55	0	0
KOLZAPVTOR	9	GENERATE	47	0	0
MET2	10	QUEUE	116	47	0
	11	SEIZE	69	0	0
	12	DEPART	69	0	0
	13	ADVANCE	69	1	0

	14	RELEASE	68	0	0
OBRZAPSP2	15	TABULATE	68	0	0
	16	TRANSFER	68	0	0
MET3	17	TRANSFER	23	0	0
MET4	18	QUEUE	45	0	0
	19	SEIZE	45	0	0
	20	DEPART	45	0	0
	21	ADVANCE	45	1	0
	22	RELEASE	44	0	0
OBRZAPRAB	23	TABULATE	44	0	0
	24	TRANSFER	44	0	0
MET5	25	QUEUE	22	0	0
	26	SEIZE	22	0	0
	27	DEPART	22	0	0
	28	ADVANCE	22	0	0
	29	RELEASE	22	0	0
OBRZAPKON	30	TABULATE	22	0	0
	31	TRANSFER	22	0	0
MET6	32	QUEUE	1	0	0
	33	SEIZE	1	0	0
	34	DEPART	1	0	0
	35	ADVANCE	1	0	0
	36	RELEASE	1	0	0
OBRZAPOB	37	TABULATE	1	0	0
	38	TRANSFER	1	0	0
MET7	39	TERMINATE	53	0	0
	40	GENERATE	1	0	0
	41	SAVEVALUE	1	0	0
	42	SAVEVALUE	1	0	0
	43	SAVEVALUE	1	0	0
	44	SAVEVALUE	1	0	0
	45	SAVEVALUE	1	0	0
	46	SAVEVALUE	1	0	0
	47	SAVEVALUE	1	0	0
	48	SAVEVALUE	1	0	0
	49	TERMINATE	1	0	0

FACILITY	ENTRIES	UTIL.	AVE. TIME	AVAIL.	OWNER	PEND	INTER	RETRY
DELAY								
SP1	56	0.998	8.554	1	76	0	0	0
106								
SP2	69	0.972	6.763	1	41	0	0	0
47								
RAB	45	0.511	5.450	1	134	0	0	0
0								
KON	22	0.229	4.988	1	0	0	0	0
0								
OB	1	0.014	6.948	1	0	0	0	0
0								

QUEUE	MAX	CONT.	ENTRY	ENTRY (0)	AVE.CONT.	AVE.TIME	AVE. (-0)
RETRY							
SPQ1	107	106	162	1	56.344	166.946	167.983
SPQ2	48	47	116	2	23.414	96.886	98.586
RABQ	1	0	45	32	0.045	0.482	1.668
KONQ	1	0	22	21	0.001	0.027	0.604
OBQ	1	0	1	1	0.000	0.000	0.000

TABLE	MEAN	STD.DEV.	RANGE	RETRY	FREQUENCY
CUM. %					
VRSP1	168.477	113.666		0	

9.09						10.000	5
				10.000	-	15.000	0
9.09				15.000	-	20.000	0
9.09				20.000	-	25.000	1
10.91				25.000	-		49
100.00							
VRSP2	164.711	108.769				0	
						10.000	2
2.94				10.000	-	15.000	1
4.41				15.000	-	20.000	2
7.35				20.000	-	25.000	0
7.35				25.000	-		63
100.00							
VRKON	179.128	96.266				0	
				20.000	-	25.000	1
4.55				25.000	-		21
100.00							
VROB	71.397	0.000				0	
				25.000	-		1
100.00							
VRRAB	167.585	116.351				0	
						10.000	1
2.27				10.000	-	15.000	0
2.27				15.000	-	20.000	1
4.55				20.000	-	25.000	1
6.82				25.000	-		41
100.00							

SAVEVALUE	RETRY	VALUE
VEROBRSP1	0	0.340
VEROBRSP2	0	0.586
VEROBRRAB	0	0.978
VEROBRKON	0	1.000
VEROBROB	0	1.000
VERBIRGA	0	0.781
VOTK	0	0.219
VEROTK	0	1.000

FEC XN	PRI	BDT	ASSEM	CURRENT	NEXT	PARAMETER	VALUE
212	0	481.000	212	0	1		
76	0	483.433	76	5	6		
134	0	483.806	134	21	22		
41	0	488.656	41	13	14		
211	0	493.155	211	0	9		
213	0	960.000	213	0	40		

Листинг стандартного отчета эксперимента № 5

START TIME	END TIME	BLOCKS	FACILITIES	STORAGES
0.000	480.000	49	5	0

NAME	VALUE
KOLZAP	1.000
KOLZAPVTOR	9.000
KON	10022.000
KONQ	10021.000
MET1	2.000
MET2	10.000
MET3	17.000
MET4	18.000
MET5	25.000
MET6	32.000
MET7	39.000
OB	10024.000
OBQ	10023.000
OBRZAPKON	30.000
OBRZAPOB	37.000
OBRZAPRAB	23.000
OBRZAPSP1	7.000
OBRZAPSP2	15.000
POST	10005.000
RAB	10020.000
RABQ	10019.000
SP1	10016.000
SP2	10018.000
SPQ1	10015.000
SPQ2	10017.000
VERBIRGA	10012.000
VEROBRKON	10010.000
VEROBROB	10011.000
VEROBRAB	10009.000
VEROBRSP1	10007.000
VEROBRSP2	10008.000
VEROTK	10014.000
VOTK	10013.000
VRKON	10002.000
VRMOD	480.000
VROB	10003.000
VRRAB	10004.000
VRSP1	10000.000
VRSP2	10001.000

LABEL	LOC	BLOCK TYPE	ENTRY COUNT	CURRENT COUNT	RETRY
KOLZAP	1	GENERATE	152	0	0
MET1	2	QUEUE	152	103	0
	3	SEIZE	49	0	0
	4	DEPART	49	0	0
	5	ADVANCE	49	1	0
	6	RELEASE	48	0	0
OBRZAPSP1	7	TABULATE	48	0	0
	8	TRANSFER	48	0	0
KOLZAPVTOR	9	GENERATE	47	0	0
MET2	10	QUEUE	99	34	0
	11	SEIZE	65	0	0
	12	DEPART	65	0	0
	13	ADVANCE	65	1	0

	14	RELEASE	64	0	0
OBRZAPSP2	15	TABULATE	64	0	0
	16	TRANSFER	64	0	0
MET3	17	TRANSFER	21	0	0
MET4	18	QUEUE	43	0	0
	19	SEIZE	43	0	0
	20	DEPART	43	0	0
	21	ADVANCE	43	1	0
	22	RELEASE	42	0	0
OBRZAPRAB	23	TABULATE	42	0	0
	24	TRANSFER	42	0	0
MET5	25	QUEUE	19	0	0
	26	SEIZE	19	0	0
	27	DEPART	19	0	0
	28	ADVANCE	19	0	0
	29	RELEASE	19	0	0
OBRZAPKON	30	TABULATE	19	0	0
	31	TRANSFER	19	0	0
MET6	32	QUEUE	2	0	0
	33	SEIZE	2	0	0
	34	DEPART	2	0	0
	35	ADVANCE	2	0	0
	36	RELEASE	2	0	0
OBRZAPOB	37	TABULATE	2	0	0
	38	TRANSFER	2	0	0
MET7	39	TERMINATE	59	0	0
	40	GENERATE	1	0	0
	41	SAVEVALUE	1	0	0
	42	SAVEVALUE	1	0	0
	43	SAVEVALUE	1	0	0
	44	SAVEVALUE	1	0	0
	45	SAVEVALUE	1	0	0
	46	SAVEVALUE	1	0	0
	47	SAVEVALUE	1	0	0
	48	SAVEVALUE	1	0	0
	49	TERMINATE	1	0	0

FACILITY	ENTRIES	UTIL.	AVE. TIME	AVAIL.	OWNER	PEND	INTER	RETRY
DELAY								
SP1	49	0.998	9.776	1	69	0	0	0
103								
SP2	65	0.968	7.145	1	41	0	0	0
34								
RAB	43	0.554	6.189	1	123	0	0	0
0								
KON	19	0.244	6.153	1	0	0	0	0
0								
OB	2	0.021	5.143	1	0	0	0	0
0								

QUEUE	MAX	CONT.	ENTRY	ENTRY (0)	AVE.CONT.	AVE.TIME	AVE. (-0)
RETRY							
SPQ1	103	103	152	1	52.827	166.824	167.928
SPQ2	34	34	99	2	19.695	95.492	97.461
RABQ	1	0	43	31	0.058	0.650	2.330
KONQ	1	0	19	17	0.008	0.208	1.977
OBQ	1	0	2	2	0.000	0.000	0.000

TABLE	MEAN	STD.DEV.	RANGE	RETRY	FREQUENCY
CUM. %					
VRSP1	159.837	116.551		0	

6.25				-	-	10.000	3
10.42			10.000	-		15.000	2
10.42			15.000	-		20.000	0
10.42			20.000	-		25.000	0
100.00			25.000	-	-		43
VRSP2	148.273	96.292				0	
1.56			-	-		10.000	1
1.56			10.000	-		15.000	0
3.13			15.000	-		20.000	1
7.81			20.000	-		25.000	3
100.00			25.000	-	-		59
VRKON	146.674	92.281				0	
5.26			20.000	-		25.000	1
100.00			25.000	-	-		18
VROB	241.957	111.999				0	
100.00			25.000	-	-		2
VRRAB	153.460	98.959				0	
2.38			10.000	-		15.000	1
2.38			15.000	-		20.000	0
2.38			20.000	-		25.000	0
100.00			25.000	-	-		41

SAVEVALUE	RETRY	VALUE
VEROBRSP1	0	0.316
VEROBRSP2	0	0.646
VEROBRAB	0	0.977
VEROBRKON	0	1.000
VEROBROB	0	1.000
VERBIRGA	0	0.788
VOTK	0	0.212
VEROTK	0	1.000

FEC	XN	PRI	BDT	ASSEM	CURRENT	NEXT	PARAMETER	VALUE
	41	0	481.211	41	13	14		
	69	0	481.781	69	5	6		
	123	0	481.841	123	21	22		
	201	0	482.000	201	0	1		
	202	0	493.155	202	0	9		
	203	0	960.000	203	0	40		